

1. Per ogni matrice determinare gli autovalori dell'applicazione lineare corrispondente. Determinare gli autospazi.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\text{Im}(f)$.
(b) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
(c) Per ogni autovalore di f , determinare l'autospazio corrispondente.
3. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A .
(a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
(b) Dimostrare che se λ è autovalore di A , allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1} .
4. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{pmatrix}$.
(a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e che f è lineare.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
5. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .
6. (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.