

1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;
(c) $\det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$; (d) $\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\varphi \in \mathbf{R})$.

3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
(b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
(c) Calcolare $\det(A+B)$.

4. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

- (a) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(b) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(c) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

5. Sia D la matrice 10×10

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & \cdots & 89 & 90 \\ 91 & 92 & \cdots & 99 & 100 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare il determinante di D .
(b) Calcolare il rango di D .

6. Sia $f: \mathbf{R}^{10} \rightarrow \mathbf{R}^{10}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice D dell'esercizio 5.

- (a) Determinare una base per l'immagine di f .
(b) Determinare una base per il nucleo di f .