1. Calcolare i seguenti prodotti di matrici

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare i prodotti AB e BA dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Quali applicazioni sono lineari?
   (a) $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
   (b) $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$ per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $\mathbf{R}[X]$ l'insieme dei polinomi nella variabile X.
   (a) Verificare che $\mathbf{R}[X]$ con la solita somma e la solita moltiplicazione per i numeri reali, è uno spazio vettoriale.
   (b) Dimostrare che la dimensione di $\mathbf{R}[X]$ è infinita.
   Sia $h : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $h(p) = \frac{dp}{dX}$ per $p \in \mathbf{R}[X]$.
   (c) Calcolare $d(X^n)$ per ogni $n \geq 0$.
   (d) Dimostrare che h è un'applicazione lineare e determinare $\ker(h)$ e $\mathrm{im}(h)$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$ se e solo se $f^2 = 0$ (cioè se e solo se $f(f(v)) = 0$ per ogni $v \in V$).
   (b) Se

$$f(v) = A \cdot v, \qquad \text{(per ogni } v \in V\text{)},$$

   per qualche matrice A, dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$ se e solo se $A \cdot A = 0$ è la matrice nulla (una matrice B si dice nulla, e si indica con $B = 0$, se ogni coefficiente di B è zero).
   (c) Esibire una matrice A non nulla che ha la proprietà che $A \cdot A = 0$.