1. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W:

(a) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$; (b) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;

(c) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. (d) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

2. Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 1.

3. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da

$$V = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

(a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(b) Calcolare le dimensioni di V, W e $V \cap W$.
(c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

4. Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} : x - y + z - w = 0\right\}.$$

(a) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;
(b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

5. Siano $V = \text{Span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.
(a) Esibire una base di V e una base di W. Calcolare la dimensione di V e di W.
(b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' sottospazi di V. Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di V se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.