

1. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti in un campo F . Dimostrare che

$$\text{rango}(A + B) \leq \text{rango}(A) + \text{rango}(B).$$

2. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti in un campo F . Dimostrare che i polinomi caratteristici di AB e BA sono uguali.

3. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ con coefficienti in un campo F . Sia $1 \leq m \leq n$ e sia $B = (b_{ij})$ la matrice $m \times m$ data da $b_{ij} = a_{ij}$ per $1 \leq i, j \leq m$. Dimostrare che $\text{rango}(A) \geq \text{rango}(B)$.

4. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ con coefficienti reali con la proprietà che

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j; \\ \pm 1 & \text{se } i \neq j; \end{cases}$$

Dimostrare che per tutte le scelte dei segni, il rango di A è n se n è pari ed è $\geq n - 1$ se n è dispari. (Suggerimento: Per n pari dimostrare che il determinante di A è un intero dispari (e quindi non nullo) e per n dispari usare l'esercizio 3)

5. Siano $n_1 = 30, n_2 = 60, n_3 = 150, n_4 = 6000$. Determinare $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbf{Z}$ non nulli tali che

$$\prod_{i=1}^4 n_i^{e_i} = 1.$$

6. Determinare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$

7. (Olimpiadi della matematica, Mosca 2005) Ci sono 101 mucche in una mandria. Supponiamo che togliendo una qualunque mucca, le rimanenti possano essere suddivise in due gruppi di 50 mucche dello stesso peso totale. Dimostrare che tutte le mucche hanno lo stesso peso. (Suggerimento: usare l'esercizio 4)