1. Siano $a, b, d \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica data da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in $\mathbf{R}$.
   (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ di autovettori di A.

2. Sia B la matrice simmetrica
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Esibire una base ortonormale di autovettori di B.

3. Siano V e W gli spazi vettoriali dati da
$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0 \}, \qquad \text{e} \qquad W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x - y + 2z = 0 \}.$$
   Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è una base di V e che $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ è una base di W.
   Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ l'applicazione lineare di matrice rappresentativa (rispetto alle basi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ uguale a
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Calcolare $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   (c) Determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione φ rispetto alla base $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ di V e la base $\mathbf{f}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{f}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Siano dati i punti $(t, s) \in \mathbf{R}^2$:
$$(0, -2), \quad (1, -1), \quad (2, -1), \quad (3, 0), \quad (4, 1), \quad (5, 1).$$
   Col metodo dei minimi quadrati, determinare una retta che passa più vicina a tali punti.