1. Siano $V \subset \mathbf{C}^3$ il piano di equazione cartesiana $z_1 + iz_2 = 2$ e sia $W \subset \mathbf{C}^3$ il piano di equazione cartesiana $z_2 - iz_2 = -1$. Determinare un'equazione parametrica per la retta complessa $V \cap W$.

2. Sia F il campo $\mathbf{Z}_3$ dei numeri interi modulo 3.
   (a) Risolvere il seguente sistema lineare sul campo F:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$
   (b) Risolvere il seguente sistema lineare sul campo F:
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

3. Sia p un numero primo. Quanti vettori possiede uno spazio vettoriale su $\mathbf{Z}_p$ di dimensione n?

4. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.
$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
   (c) Per ogni autovalore di f, determinare l'autospazio corrispondente.

6. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A.
   (a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
   (b) Dimostrare che se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

7. Sia A una matrice $n \times n$ che soddisfa $A^2 = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A.
   (a) Determinare gli autovalori di f.
   (c) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (d) Dimostrare che $\dim\ker(f) \geq n/2$.
   (e) Dare un esempio di una matrice $A \neq 0$, per cui vale $A^2 = 0$.