

Spazi vettoriali euclidei.

1. Prodotto scalare, lunghezza e ortogonalità in $\mathbf{R}^n$.

Consideriamo lo spazio vettoriale

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\},$$

con la somma fra vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare definiti rispettivamente da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$, il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il numero reale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

• Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

(i) (*Proprietà commutativa*) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (*Proprietà distributiva*) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (*Omogeneità*) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y});$$

(iv) (*Positività*) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni. Il punto (i) segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto (ii) segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + \dots + x_n(y_n + z_n) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \dots + x_n y_n + x_n z_n = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= \lambda(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n, \\ (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= (\lambda x_1) y_1 + \dots + (\lambda x_n) y_n = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n, \\ \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) &= x_1 (\lambda y_1) + \dots + x_n (\lambda y_n) = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n,\end{aligned}$$

otteniamo (iii). Per dimostrare (iv), osserviamo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, chiaramente $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Viceversa, se per un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vale $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, allora $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$. Ciò è possibile solo se $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Mediante il prodotto scalare definiamo in $\mathbf{R}^n$ nozioni di lunghezza, distanza, ortogonalità e angolo.

Definizione. La norma o lunghezza $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, questo fatto è precisamente l'enunciato del Teorema di Pitagora.

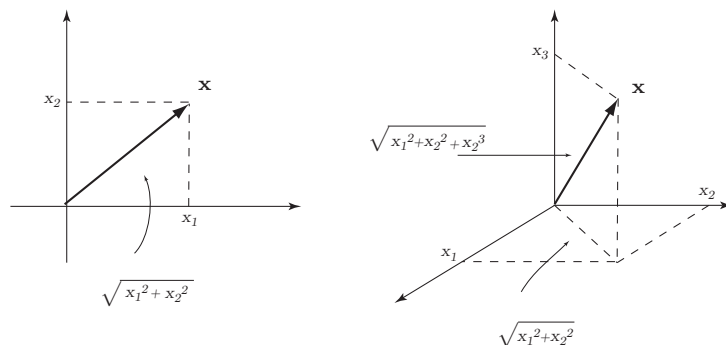


Fig.1. La norma di un vettore $\mathbf{x}$ in $\mathbf{R}^2$ e di un vettore $\mathbf{x}$ in $\mathbf{R}^3$

Definizione. La distanza fra i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n$ è definita da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

In particolare, $\|\mathbf{x}\|$ coincide con la distanza di $\mathbf{x}$ dall'origine.

• La norma gode delle seguenti proprietà:

- (i) (*Omogeneità*) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.
- (ii) (*Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

(iii) (*Disuguaglianza triangolare*) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Il punto (i) segue da

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

(ii) Se $\mathbf{x} = 0$ oppure $\mathbf{y} = 0$ la disuguaglianza è chiaramente soddisfatta. Supponiamo adesso $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{y} \neq 0$. Consideriamo un vettore della forma $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$, per $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Per le proprietà (i)(ii)(iii)(iv) del prodotto scalare, abbiamo che

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = \alpha^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \beta^2 \|\mathbf{y}\|^2 + 2\alpha\beta \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

In particolare, per $\alpha = \|\mathbf{y}\|^2$ e $\beta = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, troviamo

$$\|\mathbf{y}\|^4 \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 + \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{y}\|^4 \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \geq 0.$$

Dividendo per $\|\mathbf{y}\|^2 \neq 0$, otteniamo

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

che è equivalente alla disuguaglianza cercata.

(iii) La disuguaglianza triangolare è equivalente alla disuguaglianza

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Direttamente dalle definizioni e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

come richiesto.

Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la disuguaglianza triangolare dice appunto che nel triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, la lunghezza del lato $\overline{\mathbf{0}(\mathbf{x} + \mathbf{y})}$ è minore o uguale alla somma delle lunghezze dei lati $\overline{\mathbf{0}\mathbf{x}}$ e $\overline{\mathbf{x}(\mathbf{x} + \mathbf{y})}$.

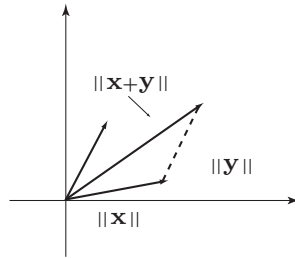


Fig.2. La disuguaglianza triangolare in $\mathbf{R}^2$.

Definizione. Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Questo si indica con $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

L'ortogonalità fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è anche caratterizzata dalla relazione

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, -\mathbf{y}).$$

Tale relazione è infatti equivalente a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

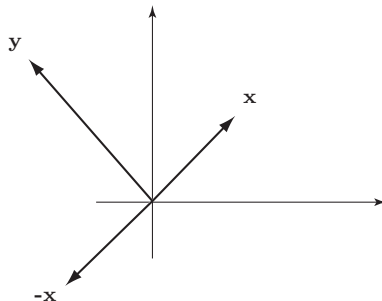


Fig.3. Ortogonalità fra vettori in $\mathbf{R}^2$.

- A partire dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz possiamo definire una nozione di angolo fra vettori non nulli in $\mathbf{R}^n$. Da essa segue infatti che dati $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

per cui esiste un unico angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \quad (1)$$

Definizione. Definiamo $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \in [0, \pi]$ come l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

In particolare, due vettori non nulli $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ risultano ortogonali se e solo se l'angolo fra essi è $\theta = \pi/2$.

- Dall'equazione (1), otteniamo la seguente relazione fra il prodotto scalare fra due vettori e le loro norme

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \theta.$$

Osservazione. Nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$, la stessa relazione si può ottenere applicando la regola del coseno al triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, i cui lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Ne segue che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi$ e quindi $-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi$ come richiesto.

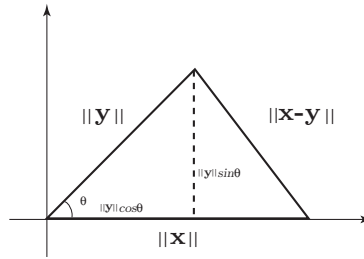


Fig.4. La regola del coseno.

- La *proiezione ortogonale* $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ è un vettore $\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}$ multiplo di $\mathbf{y}$ caratterizzato dalla proprietà

$$(\mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

In altre parole, la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{x}$ su un vettore $\mathbf{y} \neq 0$ determina una scomposizione del vettore $\mathbf{x}$ nella somma di un vettore parallelo a $\mathbf{y}$ e un vettore ortogonale a $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \perp \mathbf{y}. \quad (2)$$

Risulta

$$\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \cos \theta \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\| \|\mathbf{y}\|} \mathbf{y}.$$

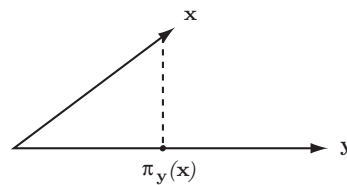


Fig.5. La proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{x}$ sul vettore $\mathbf{y}$.

2. Basi ortonormali. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Definizione. Un sottoinsieme $\{X_1, \dots, X_k\}$ di $\mathbf{R}^n$ si dice un insieme ortogonale se i suoi elementi sono a due a due ortogonali fra loro.

Esercizio. Gli elementi di un insieme ortogonale sono linearmente indipendenti.

Definizione. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ è una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i cui elementi hanno norma uno e sono a due a due ortogonali:

$$\|\mathbf{e}_1\| = \dots = \|\mathbf{e}_n\| = 1, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \quad i \neq j.$$

Esempio. I vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$.

Esempio. I vettori $\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Esempio. La base canonica di $\mathbf{R}^n$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale.

Il metodo di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt* permette di ottenere una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ a partire da una base qualsiasi.

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbf{R}^n$. Allora i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 \\ &\vdots = \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \dots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_{n-1}} \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned}$$

sono a due a due ortogonali (cfr. equazione (2)). Inoltre, poiché per ogni $1 \leq j \leq n$,

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j\}, \quad (3)$$

anche i vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ formano una base di $\mathbf{R}^n$. Infine i vettori

$$\{\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \dots, \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

Esempio. Sia data la base $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbf{R}^3$. Allora i vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

formano una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ e i vettori

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Osservazione. Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ il sottospazio generato dai primi k vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ della base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbf{R}^n$. Dalla relazione (3) segue che i vettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$, ottenuti nel corso del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, sono una base ortogonale di U .

Esercizio. Dato un sottospazio U in $\mathbf{R}^n$ di dimensione k , esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

con la proprietà che $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ è una base ortonormale di U e $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base ortonormale di $U^\perp$. In altre parole, data una base ortonormale di U , essa può essere completata ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

• Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base *ortogonale* di $\mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Allora le coordinate di $\mathbf{x}$ in $\mathcal{B}$ sono date da

$$x_1 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}, \dots, x_n = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n}.$$

In particolare, se la base $\mathcal{B}$ è *ortonormale*, le coordinate di $\mathbf{x}$ in $\mathcal{B}$ sono date da

$$x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1, \dots, x_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n.$$

Dimostrazione. Il vettore $\mathbf{x}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n.$$

Per $1 \leq j \leq n$,

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_j \cdot x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_j \cdot x_n \mathbf{v}_n = x_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j,$$

da cui

$$x_j = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j}.$$

3. Complementi ortogonali. Proiezioni ortogonali.

Sia U un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$.

Definizione. Un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si dice ortogonale a U se è ortogonale a tutti gli elementi di U . L'ortogonale $U^\perp$ di U è per definizione

$$U^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Proposizione. $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp$, $\lambda \in \mathbf{R}$ e sia $\mathbf{u}$ un arbitrario elemento di U . Dalle proprietà del prodotto scalare e dalle ipotesi segue che

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0, \quad (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \lambda 0 = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U^\perp$ e $\lambda \mathbf{x} \in U^\perp$, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, come richiesto.

Esempio.

(i) Sia $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^2$. Allora $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$ è la retta per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Sia $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$ è il piano per l'origine ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Sia $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^3$. Allora $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \right\}$ è la retta per l'origine parallela a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

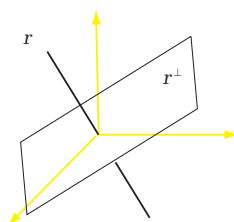


Fig.6. Il complemento ortogonale ad una retta in $\mathbf{R}^3$.

- Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k e $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ è una base di U , allora

$$U^\perp = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0 \end{cases} \right\}.$$

In questo caso, $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - k$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in U^\perp$. Segue immediatamente dalla definizione che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \dots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x}$ soddisfi il sistema $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = \dots = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0$. Poiché un arbitrario elemento di U si scrive come $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$, si ha

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k = 0.$$

In altre parole, $\mathbf{x} \in U^\perp$. Questa caratterizzazione esprime $U^\perp$ come lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di k equazioni indipendenti. Di conseguenza, $U^\perp$ ha dimensione $n - k$.

Esercizio. Verificare che $U \cap U^\perp = \{O\}$.

- Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$, il sottospazio $U^\perp$ si chiama complemento ortogonale di U . Lo spazio $\mathbf{R}^n$ si decompone infatti come somma diretta di U e $U^\perp$

$$\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp \quad U \cap U^\perp = \{O\}.$$

In particolare, ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ si scrive *in modo unico* come somma di un elemento in U e un elemento in $U^\perp$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_{U^\perp}, \quad \mathbf{x}_U \in U, \quad \mathbf{x}_{U^\perp} \in U^\perp, \quad \text{e vale} \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_{U^\perp}\|^2.$$

Definizione. Per definizione i vettori $\mathbf{x}_U$ e $\mathbf{x}_{U^\perp}$ sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di $\mathbf{x}$ su U e su $U^\perp$

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}).$$

Calcolo della proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio.

Proposizione. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ una qualunque base ortogonale di U . Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ un vettore. Allora la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U è data da

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{R}^n$ che completa $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$. In particolare, $\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base ortogonale di $U^\perp$. In questa base,

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n.$$

Per l'unicità di $\mathbf{x}_U$ e di $\mathbf{x}_{U^\perp}$, segue che

$$\mathbf{x}_U = \pi_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k$$

e analogamente

$$\mathbf{x}_{U^\perp} = \pi_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1}}{\mathbf{u}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n}{\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n.$$

Osservazione. L'applicazione

$$\pi_U: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \pi_U(\mathbf{x}),$$

che ad un vettore associa la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U , è un'applicazione lineare. Vale infatti

$$\pi_U(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \pi_U(\mathbf{x}) + \beta \pi_U(\mathbf{y}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

Inoltre, la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U è data dalla somma delle proiezioni di $\mathbf{x}$ sui singoli vettori *ortogonali* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$.

Esercizio. Sia $\mathbf{x}$ un vettore in $\mathbf{R}^3$. La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ sul piano β passante per l'origine di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ è data da

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{n}, \quad \text{ove } \lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Sol. Sia $\pi(\mathbf{x})$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano β . Allora $\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$ è un vettore perpendicolare a β e dunque soddisfa

$$\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{n}$$

per un opportuno scalare λ . Poiché $\pi(\mathbf{x})$ appartiene a β vale $\mathbf{n} \cdot \pi(\mathbf{x}) = 0$, da cui si ricava $\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ e quindi

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

come richiesto.

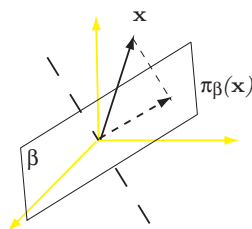


Fig.7. La proiezione del vettore $\mathbf{x}$ sul piano β .

La proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{x}$ su un sottospazio U è il punto di U più vicino ad $\mathbf{x}$.

Proposizione. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_U$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su U . Allora, per ogni $\mathbf{u} \in U$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_U) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} \in U$ un elemento arbitrario. L'identità

$$\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_U - \mathbf{u}, \quad \text{con } \mathbf{x} - \mathbf{x}_U \in U^\perp, \quad \mathbf{x}_U - \mathbf{u} \in U$$

scomponere di $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ come somma di due vettori ortogonali. In particolare implica

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\|^2 + \|\mathbf{x}_U - \mathbf{u}\|^2$$

e

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_U\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|$$

come richiesto.

Definizione. La distanza di un vettore $\mathbf{x}$ da un sottospazio U è per definizione la distanza fra $\mathbf{x}$ e la sua proiezione ortogonale su U

$$d(\mathbf{x}, U) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_U).$$

In particolare, se $\mathbf{x} \in U$, allora $\mathbf{x}_U = \mathbf{x}$ e $d(\mathbf{x}, U) = 0$.

4. Un'applicazione: il metodo dei minimi quadrati.

I sistemi lineari che si incontrano nelle applicazioni pratiche dell'algebra lineare spesso sono incompatibili e non hanno soluzioni. Il metodo dei *minimi quadrati* è un procedimento per trovare “il miglior sostituto” alle soluzioni di un sistema lineare incompatibile e si basa sul fatto che la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio è il punto del sottospazio ad esso più vicino.

Esempio Supponiamo che, secondo una certa teoria, esista un rapporto di tipo lineare fra due quantità fisiche X e Y :

$$Y = \lambda X + \mu$$

per certe costanti λ e μ che dipendono dalla situazione. Effettuando varie misurazioni delle quantità X e Y , si cerca di risalire alle costanti λ e μ . Nella figura, ogni punto rappresenta i dati di un esperimento. Per esempio il punto $P_1 = (3, 1)$ corrisponde ad un esperimento i cui risultati erano $X = 3$ e $Y = 1$.

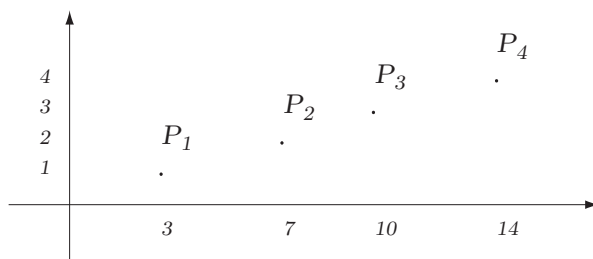


Fig.8. I dati.

Si verifica facilmente che non esiste una retta $y = \lambda x + \mu$ passante per tutti i punti P_i . In altre parole, il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 &= & 3\lambda &+ & \mu \\ 2 &= & 7\lambda &+ & \mu \\ 3 &= & 10\lambda &+ & \mu \\ 4 &= & 14\lambda &+ & \mu \end{cases}$$

non ha soluzioni λ, μ . Con il metodo dei minimi quadrati si trovano dei valori λ_0 e μ_0 che, in un certo senso, sono ottimali rispetto ai dati trovati. La retta corrispondente $y = \lambda_0 x + \mu_0$, pur non passando per i punti P_i , sarà quella che si avvicina di più ad essi.

Il metodo. Sia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Scriviamo questo sistema come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Il sistema ha soluzioni se e soltanto se il vettore $\mathbf{b}$ è contenuto nell'immagine della applicazione $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ data dalla moltiplicazione per la matrice A . Se il sistema *non* ha soluzioni, possiamo cercare un vettore $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ tale che $A\mathbf{x}_0$ sia più vicino possibile al vettore $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$:

$$\|A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Il punto nell'immagine di A che è più vicino a $\mathbf{b}$ è la proiezione ortogonale $\mathbf{b}'$ di $\mathbf{b}$ sullo spazio $\text{Im}(A)$. È ragionevole considerare una soluzione $\mathbf{x}_0$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ come una buona “soluzione approssimativa” del sistema originale. Il Teorema 1 ci dice come trovare $\mathbf{x}_0$ *senza calcolare* la proiezione $\mathbf{b}'$.

Teorema 1. *Le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ coincidono con le soluzioni del sistema di n equazioni in n incognite*

$${}^t A \cdot A\mathbf{x} = {}^t A\mathbf{b}.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}_0$ una soluzione del sistema ${}^t A \cdot A\mathbf{x} = {}^t A\mathbf{b}$. Equivalentemente ${}^t A \cdot (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0$. Questo vuol dire che il vettore $A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ è perpendicolare ad ogni riga della matrice ${}^t A$ e quindi ad ogni colonna della matrice A . Siccome $\text{Im}(A)$ è lo span delle colonne di A , questo significa che $A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ è ortogonale all'immagine della matrice A . L'unico vettore $\mathbf{b}'$ in $\mathbf{R}^m$ con la proprietà che $\mathbf{b}' - \mathbf{b}$ è perpendicolare a $\text{Im}(A)$ è la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{b}$ sull'immagine di A . Di conseguenza, $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}'$ e le soluzioni del sistema ${}^t A \cdot A\mathbf{x} = {}^t A\mathbf{b}$ sono anche soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. Il viceversa è immediato.

I sistemi lineari che si considerano in molte applicazioni pratiche sono incompatibili perché sovradeterminati, ossia perché hanno “più equazioni che incognite”. Precisamente, sono del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$\text{rango}(A) \text{ massimo}, \quad \text{rango}(A) < \text{rango}(A|\mathbf{b}).$$

Il Teorema 2, dice che per tali sistemi esiste un'unica soluzione $\mathbf{x}_0$ del sistema ${}^t A \cdot A\mathbf{x} = {}^t A\mathbf{b}$, che rappresenta la miglior “soluzione approssimativa” del sistema originale.

Teorema 2. *Il sistema ${}^t A \cdot A\mathbf{x} = {}^t A\mathbf{b}$ ha un'unica soluzione se e solo se le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti.*

Come applicazione, cerchiamo una “soluzione approssimativa” $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ dell'esempio sopra. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

risulta incompatibile e soddisfa le ipotesi del Teorema 2. Calcoliamo ${}^tA \cdot A$ e ${}^tA\mathbf{b}$.

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 344 & 34 \\ 34 & 4 \end{pmatrix},$$

$${}^tA\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ${}^tAA\mathbf{x} = {}^tA\mathbf{b}'$ è

$$\begin{pmatrix} 344 & 34 \\ 34 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Questo sistema ha un'unica soluzione $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ data da

$$\lambda' = \frac{103 \cdot 4 - 10 \cdot 34}{344 \cdot 4 - 34 \cdot 34} = \frac{18}{55} \approx 0.327, \quad \mu' = \frac{344 \cdot 10 - 34 \cdot 103}{344 \cdot 4 - 34 \cdot 34} = -\frac{31}{110} \approx -0.282.$$

L'equazione della retta che passa più vicina ai punti P_i è quindi $Y = 0.327X - 0.282$. Per curiosità calcoliamo $\mathbf{b}' = A \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ e controlliamo che la soluzione è effettivamente buona. Questo vuol dire che il vettore $\mathbf{b}'$ è “vicino” al vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. Troviamo

$$A \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.327 \\ -0.282 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.01 \\ 2.99 \\ 4.3 \end{pmatrix}$$

Infatti, gli errori sono relativamente piccoli: 0.3, 0.01, 0.01 e 0.3.

5. Il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$.

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in $\mathbf{R}^3$ che ad una coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ associa un terzo vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$, ortogonale ai primi due. Si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano $\mathbf{R}^2$, né in $\mathbf{R}^n$ per $n > 3$. È una nozione che *esiste solo in $\mathbf{R}^3$* .

Definizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ gode delle seguenti proprietà:

(i)

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y};$$

(ii) Il vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è *perpendicolare* sia ad $\mathbf{x}$ che a $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ soddisfa

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin \varphi,$$

dove φ è l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Dimostrazione. (i) Direttamente dalla definizione, abbiamo

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Per dimostrare (ii), calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \end{aligned}$$

Similmente troviamo $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$.

Per la parte (iii) abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

6. Volumi.

In questo paragrafo, richiamiamo un'importante interpretazione geometrica del determinante di una matrice quadrata. Ci limitiamo a dimostrarla nei casi 2×2 e 3×3 .

Proposizione. *L'area del parallelogramma di vertici di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^2$ è data da*

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Dimostrazione. Sia A l'area del parallelogramma in questione. Poiché l'altezza del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{y}\| \sin \varphi$, l'area risulta

$$A = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \sin \varphi.$$

Allora

$$\begin{aligned} A^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \varphi = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2. \end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate troviamo

$$A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

come richiesto.

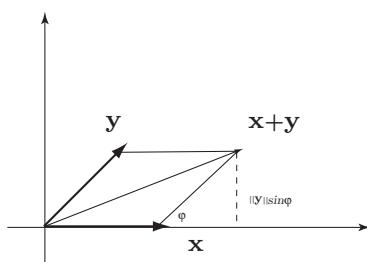


Fig.9. Il parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Corollario. L'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è uguale al modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Inoltre, dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ risulta uguale a $\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|$.

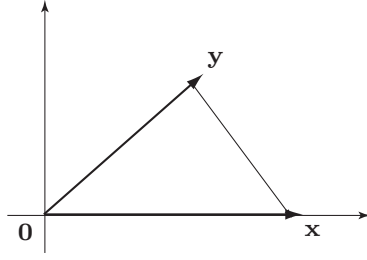


Fig.10. Il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Proposizione. Il parallelepipedo di spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ in $\mathbf{R}^3$ ha volume V uguale a

$$V = |x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3 - z_1y_2x_3|$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Dimostrazione. Il volume V del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ è uguale all'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore $\mathbf{z}$ sulla retta che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

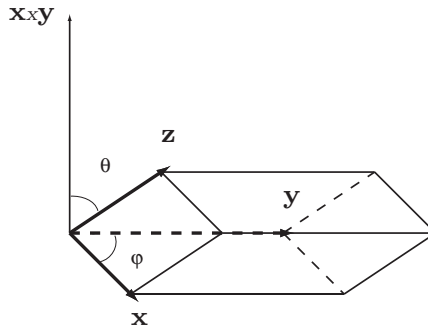


Fig.11. Il parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

Per la proposizione precedente, l'area del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi$, ove φ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e la lunghezza della proiezione di $\mathbf{z}$ sulla retta per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è uguale a $\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta$, ove ϑ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$. Il volume V è quindi dato da

$$V = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta$$

$$= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta$$

$$= \|\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\|$$

$$= |z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)|.$$

Osserviamo infine che l'espressione $z_1(x_2y_3-x_3y_2)+z_2(x_3y_1-x_1y_3)+z_3(x_1y_2-x_2y_1)$ coincide col determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

e ciò completa la dimostrazione della proposizione.