

1. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$ tali che $X^7 + X + 2 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_7)$.
 - (a) Determinare $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$;
 - (b) Dimostrare che $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$;
 - (c) Determinare $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$.

2. Determinare i discriminanti dei seguenti polinomi

$$X - 7, \quad X^2 + X - 5, \quad X^3 - 2, \quad X^4 + X + 2.$$

3. Siano x_1, x_2, x_3, x_4 gli zeri complessi del polinomio $f = X^4 + 3X + 7$.
 - (a) Calcolare $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$;
 - (b) Dimostrare che il discriminante di f è uguale a 85621.

4. Siano α, β, γ gli zeri complessi del polinomio $X^3 + X + 1$. Determinare

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

5. Siano α e β gli zeri del polinomio $X^2 - X - 1$.
 - (a) Calcolare $F_k = (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$ per $0 \leq k \leq 4$.
 - (b) Dimostrare che F_k sta in $\mathbf{Z}$ per ogni $k \geq 0$.
 - (c) Dimostrare che $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ per ogni $k \geq 1$.
6. Sia $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ e sia R un dominio. Dimostrare che per ogni $a \in R$ il discriminante del polinomio $X^n + a$ è uguale a $(-1)^{n(n-1)/2} n^n a^{n-1}$.
7. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio con zeri distinti in $\mathbf{C}$. Dimostrare che l'insieme dei numeri primi p con la proprietà che $f \pmod{p}$ ha uno zero di molteplicità ≥ 2 , è finito.
8. Siano $a, b, c \in \mathbf{Z}$ e siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gli zeri complessi del polinomio $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbf{Z}[X]$.
 - (a) Determinare la funzione simmetrica $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$ in termini dei coefficienti di f .
 - (b) Determinare la funzione simmetrica $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$ in termini dei coefficienti di f .
 - (c) Determinare il polinomio monico $g \in \mathbf{Z}[X]$ che ha $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$ e $\alpha_1 + \alpha_3$ come zeri.

9. (*Identità di Newton: http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_identities*)

Siano $s_1, s_2, \dots, s_n$ i polinomi simmetrici nell'anello $\mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Per ogni $k \geq 0$ sia $p_k = X_1^k + X_2^k + \dots + X_n^k$ la somma delle k -esime potenze.

- (a) Per ogni $k \in \{0, \dots, n\}$ dimostrare l'identità

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 - \dots + (-1)^{k-1}p_1s_{k-1} + (-1)^kks_k = 0.$$

- (b) Per ogni $k \geq n$ dimostrare l'identità

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 - \dots + (-1)^np_{k-n}s_n = 0.$$

(Sugg. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Determinare la “derivata logaritmica” $F'(T)/F(T) \in R[[T]]$ del polinomio $F(T) = \prod_{i=1}^n (1 - X_i T) \in R[T]$.)