1. Dimostrare che l'applicazione naturale $\mathbf{Z}_{2n}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_n^*$ è un isomorfismo di gruppi se e solo se n è dispari.

2. Sia φ la funzione di Eulero. Determinare
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n}.$$

3. Sia R un anello commutativo e sia M un R-modulo. Per ogni $m \in M$ sia $\operatorname{Ann} m = \{\lambda \in R : \lambda m = 0\}$ l'annulatore di m. Sia $T(M) = \{m \in M : \operatorname{Ann} m \neq \{0\}\}$ l'insieme degli elementi di torsione di M.
   (a) Dimostrare che $\operatorname{Ann} m$ è un R-ideale per ogni $m \in M$.
   (b) Dimostrare che se R è un dominio, allora $T(M)$ è sottomodulo di M.
   (c) Esibire un anello R e R-modulo M tale che $T(M)$ non è un sottomodulo di M.

4. Sia R un anello e sia
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow R \longrightarrow 0$$
una successione esatta di R-moduli. Dimostrare che si spezza.

5. Sia $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3$ l'applicazione lineare data da $f(x, y, z) = (2x, 3y, x + 2z)$. Esibire una base $\underline{B}$ di $\mathbf{C}^3$ con la proprietà che la matrice rappresentativa di f rispetto a $\underline{B}$ ha la forma normale di Jordan.

6. Sia k un campo. Per i seguenti $k[X]$-moduli, determinare una matrice rappresentativa per la moltiplicazione per X:
   (a) $k[X]/(X^4)$;
   (b) $k[X]/(X^2) \times k[X]/(X^2)$;
   (c) $k[X]/(X) \times k[X]/(X + 1) \times k[X]/(X + 2) \times k[X]/(X + 3)$.

7. Siano R e K i sottoanelli del campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali, dati rispettivamente da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$ e $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$. Sia $N : K \longrightarrow \mathbf{Q}$ l'applicazione 'norma' data da $N(a + b\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.
   (a) Dimostrare che K è isomorfo al campo quoziente di R.
   (b) Dimostrare che la norma soddisfa $N(xy) = N(x)N(y)$ per ogni $x, y \in K$.
   (c) Dimostrare che per ogni $x \in K$ esiste $y \in R$ tale che $|N(x - y)| \leq \frac{1}{2}$.
   (d) (divisione con resto) Dimostrare che per ogni $x \in R$ e ogni $y \in R - \{0\}$ esistono un quoziente q e resto r in R tale che $x = qy + r$ e $|N(r)| \leq \frac{1}{2}|N(y)|$.
   (e) Dimostrare che $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ è un dominio a ideali principali.

8. Per gli anelli finiti $R = \mathbf{Z}_{2000}$, $\mathbf{Z}_{2009}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]/(5 + 3\sqrt{2})$ e $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$, scrivere il gruppo moltiplicativo R^* come prodotto di gruppi ciclici.

9. Determinare il più grande numero naturale n tale che
   (a) $x^2 = \overline{1}$ per ogni $x \in \mathbf{Z}_n^*$;
   (b) $x^3 = \overline{1}$ per ogni $x \in \mathbf{Z}_n^*$;
   (c) $x^6 = \overline{1}$ per ogni $x \in \mathbf{Z}_n^*$.