1. Dire se i seguenti ideali degli anelli $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$ sono primi o meno:
$$(X^3 - 18X + 12), \qquad (X^3 - 18X + 12, 5), \qquad (X^3 - 18X + 12, X - 1).$$
(Sono richieste quindi $3 \times 3 = 9$ risposte ....)

2. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^2 - Y^2$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 9X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $3X^4 + X - 1$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) 247 con $R = \mathbf{Z}$.

3. Fattorizzare i seguenti elementi dell'anello R in fattori irriducibili di R.
   (a) $X^3 - Y^3$ con $R = \mathbf{Q}[X, Y]$;
   (b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ con $R = \mathbf{Z}[X]$;
   (c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ con $R = \mathbf{Q}[X]$;
   (d) $2i - 9$ con $R = \mathbf{Z}[i]$.

4. (a) Calcolare il prodotto$(X^{10} - X + 3)(X^{10} + X - 3)$;
   (b) Fattorizzare $X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 25$ in fattori irriducibili di $\mathbf{Z}[X]$;
   (c) Fattorizzare $X^6 - X^2 + 20X - 100$ in fattori irriducibili di $\mathbf{Z}[X]$.
   (d) Fattorizzare 999919 in fattori irriducibili di $\mathbf{Z}$.

5. Fattorizzare in fattori irriducibili in $\mathbf{Q}[X, Y]$:
   (a) $Y^5 - X^2 - 2$;
   (b) $X^{12} + Y^3 + Y$;
   (c) $X^4 + 4Y^4$;
   (d) $Y^3 - (X + 2)Y^2 + Y + X(X + 1)$.

6. (a) Determinare i polinomi irriducibili di grado 2 in $\mathbf{Z}_2[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$;
   (b) Fattorizzare $X^5 - X + 1$ in fattori irriducibili in $\mathbf{Z}_2[X]$ e $\mathbf{Z}_3[X]$;
   (c) Fattorizzare $X^5 - X + 1$ in fattori irriducibili in $\mathbf{Z}[X]$.

7. Sia k un campo. Sia $V = k^2$ con la struttura di $k[X]$-modulo definita da
$$X \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v.$$
   (a) Sia $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$. Dimostrare che $\mathrm{Span}(w)$ è un $k[X]$-sottomodulo di V.
   (b) Determinare tutti i $k[X]$-sottomoduli di V. (Ce ne sono quattro.)

8. Sia R un anello, sia $I \subset R$ un ideale e sia M un R-modulo.
   (a) Dimostrare che $\{m \in M : \lambda m = 0 \text{ per ogni } \lambda \in I\}$ è un sottomodulo di M.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{Ann}(M) = \{\lambda \in R : \lambda m = 0 \text{ per ogni } m \in M\}$ è un ideale di R.