1. Sia $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polinomio in $\mathbf{Z}[X]$. Sia $\alpha = p/q$ (dove $p, q \in \mathbf{Z}$ con $q \neq 0$ e $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$) uno zero di f. Dimostrare che p divide a_0 e q divide a_n.

2. Decidere se il polinomio $X^5 + X^3 + 1$ è irriducibile o meno negli anelli $\mathbf{Z}_2[X]$, $\mathbf{Z}_3[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ e $\mathbf{R}[X]$.

3. (a) Dimostrare che i polinomi $X^6 + X^3 + 1$ e $X^5 - 8$ sono irriducibili in $\mathbf{Q}[X]$. (Sugg. usare il criterio di Eisenstein.)
   (b) Dimostrare che $X^4 - X^2 + 1$ è un polinomio irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$.

4. Sia $f : R_1 \longrightarrow R_2$ un omomorfismo di anelli commutativi. Sia $I \subset R_2$ un ideale massimale. È vero che $f^{-1}(I)$ è un ideale massimale di R_1?

5. Dimostrare che ogni dominio finito è un campo. Dedurre che gli ideali primi non nulli di $\mathbf{Z}[i]$ sono massimali.

6. Sia R un anello commutativo e sia $X = \mathrm{Spec}(R)$.
   (a) Dimostrare che $\mathfrak{p} \in X$ è un punto chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è un ideale massimale.
   (b) Dimostare che X è compatto (ogni ricoprimento aperto ammette un sottocoprimento finito.)

7. Un *anello locale* è un anello commutativo che possiede un unico ideale massimale.
   (a) Dimostrare che R è un anello locale se e solo se $R - R^*$ è un ideale di R.
   (b) Sia p un numero primo. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ l'anello $\mathbf{Z}/(p^n)$ è locale.
   (c) Sia p un primo. Dimostrare che l'anello $R = \{\frac{s}{t} \in \mathbf{Q} : s, t \in \mathbf{Z} \text{ con } t \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ è un anello locale.

8. Usiamo il Lemma di Zorn per dimostrare che ogni spazio vettoriale ammette una base. Sia k un campo e sia V uno spazio vettoriale su k. Sia

$$\Omega = \{(W, B) : W \text{ è un sottospazio di } V \text{ e } B \subset W \text{ è una base di } W\}.$$

   (a) Controllare che $\Omega \neq \emptyset$.
   (b) Dimostrare che la relazione "$(W, B) \leq (W', B')$ se e solo se $W \subset W'$ e $B \subset B'$" è un ordinamento parziale su Ω.
   (c) Sia $S = \{(W_a, B_a)\}_{a \in A}$ una catena in Ω. Dimostrare che $(\bigcup_{a \in A} W_a, \bigcup_{a \in A} B_a)$ sta in Ω ed è un maggiorante di S.
   (d) Concludere che Ω contiene un elemento massimale $(\overline{W}, \overline{B})$ e dimostrare che $\overline{W} = V$ e quindi $\overline{B}$ è una base di V.

9. Sia $R = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} : f \text{ è continua}\}$.
   (a) Dimostrare che R è un anello (con $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.)
   (b) Per ogni $x \in [0, 1]$ sia $M_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$. Dimostrare che M_x è un ideale massimale di R.
   (c) Dimostrare che ogni ideale massimale di R è uguale a M_x, per un certo $x \in [0, 1]$. (Sugg. Usare la compattezza dell'intervallo chiuso $[0, 1]$.)