

1. Sia R un anello e sia $I \subset R$ un ideale. Dimostrare che ogni ideale di R/I ha la forma J/I per un ideale J di R che contiene I . Far vedere che l'ideale J è unico.
2. Sia R un anello commutativo e sia $R[[X]]$ l'anello delle serie di potenze con coefficienti in R . Dimostrare che $R[[X]]^* = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots \in R[[X]] : a_0 \in R^*\}$.
3. Sia $R = \mathbf{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ e sia I l'ideale generato da $X_1, X_2, \dots, X_n$. Esibire un isomorfismo di anelli $R/I \cong \mathbf{R}$.
4. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$
 - (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$;
 - (b) Dimostrare che $I^m + J^m = R$ per ogni $m \geq 1$;
 - (c) (Teorema cinese del resto) Dimostrare che la mappa naturale

$$R/IJ \longrightarrow R/I \times R/J$$

è un isomorfismo di anelli.

- (d) Generalizzare la parte (c) a n ideali $I_1, \dots, I_n$ coprimi a due a due.
5. Sia R un anello commutativo e sia $e \in R$ un elemento *idempotente*. Cioè, si ha che $e^2 = e$.
 - (a) Dimostrare: anche $1 - e$ è idempotente.
 - (b) Dimostrare: la mappa naturale $R \longrightarrow R/(e) \times R/(1 - e)$ è un isomorfismo di anelli.
 - (c) Determinare gli elementi idempotenti di $\mathbf{Z}_{100}$.
6. Sia R un anello commutativo. Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se

$$x^N = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{N \text{ volte}} = 0 \quad \text{per un certo } N > 0.$$

- (a) Sia p un numero primo e sia $m \geq 1$. Far vedere che $\bar{p} \in \mathbf{Z}_{p^m}$ è nilpotente.
- (b) Caratterizzare i numeri $n \geq 1$ per cui l'unico elemento nilpotente di $\mathbf{Z}_n$ è $\bar{0}$.
- (c) Dimostrare che gli elementi nilpotenti formano un ideale di R .
7. (a) Sia R un dominio e siano $x, y \in R$ con $(x) = (y)$. Dimostrare che esiste $u \in R^*$ con $ux = y$.
- (b) Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato da $5X$ e X^2 e sia $R = \mathbf{Z}[X]/I$. Far vedere che R non è un dominio. Dimostrare che gli ideali generati dagli elementi $\bar{X}$ e $2\bar{X}$ di R sono uguali, ma che *non* esiste nessuna unità $u \in R^*$ tale che $2\bar{X} = u\bar{X}$.
8. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali. Dimostrare che si ha $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$. Vale sempre l'uguaglianza?