1. Sia N un sottogruppo normale di un gruppo G. Dimostrare che ogni sottogruppo $\overline{H}$ di G/N ha la forma H/N per un sottogruppo H di G che contiene N. Dimostrare che $\overline{H}$ è normale in G/N se e solo se H è normale in G.

2. Sia G un gruppo finito *commutativo*. Dimostrare che G ammette una seria di sottogruppi
$$\{1\} \subset \ldots \subset G_{n+1} \subset G_n \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$$
con la proprietà che per ogni $n \geq 0$ il quoziente G_n/G_{n+1} è isomorfo a $\mathbf{Z}_p$ per un primo p (che dipende da n). (Sugg. Per induzione: sia p un divisore primo di $\#G$. Per il Teorema di Cauchy esiste $x \in G$ di ordine p. Sia H il sottogruppo generato da x. Considerare il gruppo quoziente G/H e usare l'esercizio 1.)

3. Sia G un gruppo finito. Sia $G^{(0)} = G$ e per $n \geq 0$ sia $G^{(n+1)}$ il sottogruppo dei commutatori di $G^{(n)}$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti
   (a) Per n sufficientemente grande si ha che $G^{(n)} = \{1\}$.
   (b) Il gruppo G ammette una serie di sottogruppi
   $$\{1\} \subset \ldots \subset G_{n+1} \subset G_n \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$$
   con la proprietà che per ogni $n \geq 0$ si ha che G_{n+1} è un sottogruppo normale di G_n con quoziente G_n/G_{n+1} abeliano.
   (c) come (b), ma ogni quoziente G_n/G_{n+1} è isomorfo a $\mathbf{Z}_p$ per un primo p (che dipende da n).

   Un gruppo G che gode di queste proprietà (equivalenti) si dice *risolubile*. (Sugg. Usare gli esercizi 1 e 2)

4. Sia $n \geq 1$. Dimostrare che il gruppo diedrale D_n è risolubile.

5. Dimostrare che il gruppo simmetrico S_4 è risolubile.

6. Sia p un primo. Dimostrare che ogni gruppo di ordine una potenza di p è risolubile.

7. Sia G un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se la biezione $x \mapsto x^{-1}$ è un automorfismo di G, allora G è abeliano.
   (b) Dimostrare che se $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}\}$, allora $\#G \leq 2$.

8. Sia G un gruppo finito.
   (a) Dimostrare che se G ha solo due classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_2$.
   (b) Dimostrare che se G ha tre classi di coniugio, allora $G \cong \mathbf{Z}_3$ oppure $G \cong S_3$.

9. Determinare i gruppi G di cardinalità 12 a meno di isomorfismo. (Sugg. Ce ne sono cinque. Distinguere due casi: G ha un unico 3-sottogruppo di Sylow oppure ne ha 4.)

10. (per Natale) Dimostrare che ogni gruppo di ordine < 60 è risolubile.