1. Sia G un gruppo. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori G' sono sottogruppi caratteristici di G.

2. Sia G un gruppo e sia $\mathrm{Inn}(G)$ il gruppo degli automorfismi interni di G. Dimostrare che $\mathrm{Inn}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.

3. Siano $N \subset H \subset G$ sottogruppi.
   (a) Dimostrare che se H è normale in G ed N è un sottogruppo caratteristico di H, allora N è un sottogruppo normale di G.
   (b) Esibire un esempio dove N è normale in H ed H è normale in G, ma N *non* è normale in G.

4. Sia G un gruppo con elemento neutro e.
   (a) Dimostrare che se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
   (b) Esibire un gruppo G non commutativo per cui $x^3 = e$ per ogni $x \in G$.

5. Sia p un numero primo e sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{Z}_p$ di dimensione finita. Dimostrare che gli unici sottogruppi caratteristici di V sono quelli banali.

6. Sia $G = \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{Aut}(G)$ è isomorfo al gruppo diedrale D_4.
   (b) Determinare i sottogruppi caratteristici di G (ce ne sono quattro).

7. Sia $n \geq 2$ e sia D_n il gruppo diedrale di ordine $2n$.
   (a) Determinare il centro di D_n.
   (b) Determinare il sottogruppo dei commutatori di D_n.

8. Sia $Q = \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\}$ il gruppo dei quaternioni di ordine 8. Determinare il centro $Z(Q)$ e il gruppo Q' dei commutatori di Q.

9. Sia G un gruppo finito che ha la proprietà che il suo sottogruppo G' dei commutatori è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.
   (a) Verificare che il gruppo diedrale D_4 e il gruppo Q dei quaternioni hanno questa proprietà.
   (b) Sia $g \in G$. Dimostrare che la mappa $G \longrightarrow G$ data da $x \mapsto [x, g]$ è un omomorfismo.
   (c) Dimostrare che se la cardinalità di $Z(G)$ è coprima all'indice $[G : Z(G)]$, allora G è abeliano.

10. Sia $n \geq 1$ e sia S_n il gruppo simmetrico su n simboli.
    (a) Sia $\sigma \in S_n$ un prodotto di cicli disgiunti γ. Dimostrare che l'ordine di σ è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli γ.
    (b) Esibire n tale che S_n contiene un elemento di ordine $> n^2$.

11. Sia H un sottogruppo di un gruppo finito G. Dimostrare che se $H \neq G$, allora G *non* è unione dei sottogruppi coniugati di H.