1. Sia G un gruppo e siano N_1, N_2 due sottogruppi normali di G. Dimostrare che se $N_1 \cap N_2 = \{e\}$, allora N_1 e N_2 commutano. Dimostrare che G contiene un sottogruppo isomorfo a $N_1 \times N_2$.

2. Sia $H \subset G$ un sottogruppo con $[G : H] = n$. Dimostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, con la proprietà che $[G : N]$ divide $n!$.

3. Sia G un gruppo finito di ordine n e sia p un divisore primo di n. Dimostrare che se G ammette un unico p-sottogruppo di Sylow, allora questo sottogruppo è normale in G.

4. Siano p e q due numeri primi. Dimostrare che ogni gruppo G di ordine pq ammette un sottogruppo normale diverso da G e da $\{1\}$.

5. Sia $n \geq 1$. Sia $H \subset S_n$ un sottogruppo transitivo, cioè tale che l'azione di H ha un'unica orbita su $\{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a) Dimostrare che n divide $\#H$.
   (b) Dimostrare che H contiene un elemento senza punti fissi. (Sugg. usare la formula di Burnside.)

6. Determinare i sottogruppi di Sylow del gruppo A_5. Quanti sono? E com'è la loro struttura?

7. Sia G un gruppo di ordine 15.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che $G \cong \mathbf{Z}_{15}$. (Sugg. usare l'esercizio 1.)

8. Sia G un gruppo di ordine 45.
   (a) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.
   (b) Dimostrare che G è abeliano.

9. Sia G un gruppo di ordine 12.
   (a) Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 3-sottogruppo di Sylow normale.
   (b) Esibire esempi con 2-sottogruppi di Sylow non normali (resp. 3-sottogruppi di Sylow non normali).

10. Sia G un gruppo di ordine n. Dimostrare che G ammette un sottogruppo normale, diverso da G e da $\{1\}$ nei seguenti casi:
    (a) $n = 36$; (b) $n = 48$.
    (Sugg. usare la teoria di Sylow e l'esercizio 2.)

11. Sia p un numero primo e sia $n \geq 1$.
    (a) Determinare l'ordine del gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.
    (b) Esibire un p-sottogruppo di Sylow di $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.

12. Sia G un gruppo di ordine 56. Dimostrare che G ammette un 2-sottogruppo di Sylow normale oppure un 7-sottogruppo di Sylow normale. (Sugg. Se i 7-sottogruppi di Sylow non sono normali, determinare la cardinalità del complemento dell'unione dei 7-sottogruppi di Sylow)