1. Siano H ed N sottogruppi di un gruppo G. Supponiamo che N sia normale.
   (a) Dimostrare che $HN = \{hn : h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che l'inclusione $H \subset HN$ induce un isomorfismo di gruppi
   $$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$
2. Sia G un gruppo. Dimostrare che un sottogruppo normale di G è unione disgiunta di classi di coniugio di G.

3. Siano $K \subset H \subset G$ gruppi. Dimostrare che $[G : K] = [G : H][H : K]$.

4. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. È vero o falso che f manda il centro di G nel centro di H?

5. Sia G un gruppo di ordine $2m$ con m dispari. Il gruppo G agisce su stesso tramite traslazioni. Sia $t : G \longrightarrow S(G)$ l'omomorfismo corrispondente.
   (a) Determinare la struttura ciclica della permutazione di G indotta da un elemento di ordine 2 di G.
   (b) Sia $\varepsilon(s)$ il segno di una permutazione $s \in S(G)$. Dimostrare che l'omomorfismo composto
   $$G \xrightarrow{t} S(G) \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}$$
   è suriettivo.
   (c) Dimostrare che G ammette un sottogruppo normale di indice 2.

6. Determinare le classi di coniugio del gruppo alterno A_4. Verificare che la cardinalità di ogni classe divide $\#A_4 = 12$.

7. Sia k un campo e sia $n \geq 1$. Siano A, B due matrici in $\mathrm{GL}_n(k)$.
   (a) Dimostrare che se A e B sono due matrici coniugate in $\mathrm{GL}_n(k)$, allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   (b) Vale anche il viceversa?

8. Sia p un numero primo.
   (a) Dimostrare che il centro di un gruppo finito di ordine una potenza di p non è banale.
   (b) Dimostrare che ogni gruppo di ordine p^2 è abeliano.

9. Sia $X = \{A, B, C, D\}$ l'insieme dei vertici di un tetraedro T regolare in $\mathbf{R}^3$ e sia G il gruppo delle simmetrie di T. Dimostrare che l'applicazione naturale $G \longrightarrow S(X) \cong S_4$ che ad una simmetria in G associa la permutazione indotta sui vertici, è un isomorfismo di gruppi.

10. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_4)$. Sia H il gruppo generato da A.
    (a) Dimostrare che $\#H = 6$ e che H è il centralizzante di A.
    (b) Determinare il normalizzante $N_G(H)$ di H e verificare che $\#N_G(H) = 12$.
    (c) Determinare le classi di coniugio di $N_G(H)$.