

1. Sia G un gruppo, sia $g \in G$ e sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che anche $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$ è un sottogruppo di G .
2. Sia X un insieme con un'azione del gruppo G . Sia $\sigma \in G$ e sia $x \in X$. Dimostrare che lo stabilizzatore di $\sigma(x)$ è uguale a $\sigma G_x \sigma^{-1}$.
3. Sia S_3 il gruppo delle permutazioni di $\{1, 2, 3\}$. Sia X l'insieme delle parti di $\{1, 2, 3\}$. Per $A \in X$ e $\sigma \in S_3$ definiamo $\sigma(A) = \{\sigma(a) : a \in A\}$.
 - (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di S_3 su X .
 - (b) Determinare le orbite dell'azione di S_3 su X .
4. Sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. La moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

permuta i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^n$. Determinare il segno di questa permutazione.

5. Sia $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$. Definiamo

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{per } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbf{R}).$$

- (a) Dimostrare che si tratta di un'azione di $\text{SL}_2(\mathbf{R})$ su $\mathbf{H}$.
 - (b) Dimostrare che l'azione è *transitiva* (c'è una sola orbita).
 - (c) Determinare lo stabilizzatore di $i \in \mathbf{H}$.
6. Sia G un gruppo di ordine n . Sia $S(G)$ il gruppo delle permutazioni di G .
 - (a) Dimostrare che $S(G) \cong S_n$.
 - (b) Dimostrare che la *traslazione* t_g per g , data da $t_g(x) = gx$ per $x \in G$, definisce un'azione di G su se stesso.
 - (c) (Cayley) Dimostrare che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_n . (Sugg. usare l'azione della parte (b))
7. Il *centro* $Z(G)$ di un gruppo G è definito da $Z(G) = \{g \in G : xg = gx \text{ per ogni } x \in G\}$.
 - (a) Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G .
 - (b) Dimostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico, allora G è abeliano.
 - (c) Sia $H \subset G$ un sottogruppo di 2 elementi. Dimostrare che se H è normale, allora $H \subset Z(G)$.