

COGNOME .....

NOME .....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Dire se i seguenti ideali degli anelli  $\mathbf{Z}[X]$ ,  $\mathbf{Q}[X]$  e  $\mathbf{Z}_5[X]$  sono primi o meno:

$$(X^3 - 10X + 20), \quad (X^3 - 10X + 20, 3), \quad (X^3 - 10X + 20, X - 1).$$

(Sono richieste quindi  $3 \times 3 = 9$  risposte ....)

Sia  $I_1 = (X^3 - 10X + 20)$ . Il polinomio  $X^3 - 10X + 20$  è di Eisenstein rispetto al primo 5 ed è irriducibile in  $\mathbf{Z}[X]$ . Per il Lemma di Gauss lo è anche in  $\mathbf{Q}[X]$ . Poiché  $\mathbf{Z}[X]$  e  $\mathbf{Q}[X]$  sono UFD, l'ideale  $I_1$  è quindi primo in questi anelli. In  $\mathbf{Z}_5[X]$  invece, l'anello quoziente  $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3)$  non è un dominio e quindi  $I_1$  non è primo.

Sia  $I_2 = (X^3 - 10X + 20, 3)$ . L'elemento 3 è invertibile in  $\mathbf{Q}[X]$  e  $\mathbf{Z}_5[X]$ . Poiché  $I_1$  contiene 3, l'ideale  $I_2$  è uguale all'anello stesso e quindi non è primo in  $\mathbf{Q}[X]$  e  $\mathbf{Z}_5[X]$ . Invece  $\mathbf{Z}[X]/I_2 \cong \mathbf{Z}_3[X]/(X^3 - X - 1)$  è un dominio perchè  $X^3 - X - 1$  è irriducibile e quindi primo nel PID  $\mathbf{Z}_3[X]$ . L'ideale  $I_2$  è quindi primo in  $\mathbf{Z}[X]$ .

Infine, sia  $I_3 = (X^3 - 10X + 20, X - 1)$ . Per ogni anello commutativo  $R$  abbiamo che  $R[X]/(X - 1) \cong R$  tramite l'isomorfismo che manda  $f \in R[X]$  in  $f(1)$ . Si ha quindi che  $R[X]/(X^3 - 10X + 20, X - 1) \cong R/(1^3 - 10 \cdot 1 + 20) = R/(11)$ . Poiché 11 è invertibile quando  $R = \mathbf{Q}$  o  $R = \mathbf{Z}_5$ , si tratta dell'anello zero. L'ideale  $I_3$  non è primo in questi casi. Invece per  $R = \mathbf{Z}$ , l'anello  $R/(11)$  è un campo e quindi l'ideale  $I_3$  è primo in questo caso.

2. Siano  $A, B, C, D, A', B', C'$  e  $D'$  gruppi abeliani. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\chi} & D \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow k \\ A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \xrightarrow{\chi'} & D' \end{array}$$

Dimostrare che se  $f$  è suriettiva e  $g$  e  $k$  sono iniettive, allora  $h$  è iniettiva.

Sia  $c \in C$  con  $h(c) = 0$ . Sia  $d = \chi(c)$ . Allora per la commutatività del diagramma si ha che  $k(d) = 0$ . Poiché  $k$  è iniettiva, questo implica che  $d = 0$ . Esiste quindi per esattezza  $b \in B$  con  $\psi(b) = c$ . Per la commutatività l'elemento  $b' = g(b)$  soddisfa  $\psi'(b') = 0$ . Esiste quindi per l'esattezza  $a' \in A'$  con  $\phi'(a') = b'$ . Per la suriettività di  $f$  esiste  $a \in A$  con  $f(a) = a'$ . Sia  $\tilde{b} = \phi(a)$ . Per la commutatività si ha che  $g(\tilde{b}) = b'$ . Poichè  $b' = g(b)$  si ha che  $g(b) = g(\tilde{b})$ . Per l'iniettività di  $g$  si ha quindi  $\tilde{b} = b$  e poi  $c = \psi(b) = \psi(\tilde{b}) = \psi\phi(a) = 0$ , dimostrando l'iniettività di  $h$ .

3. Determinare l'ordine del gruppo moltiplicativo dell'anello  $\mathbf{Z}[X]/(3, X^3 + X + 1)$ .

L'anello  $R = \mathbf{Z}[X]/(3, X^3 + X + 1)$  è isomorfo a  $\mathbf{Z}_3[X]/(X^3 + X + 1)$ . Si ha che  $X^3 + X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$  in  $\mathbf{Z}_3[X]$ . Il polinomi  $X - 1$  e  $X^2 + X - 1$  sono irriducibili in  $\mathbf{Z}_3[X]$ . Siccome  $\mathbf{Z}_3[X]$  è un PID, generano ideali massimali. Per il Teorema Cinese del resto abbiamo che

$$R \cong \mathbf{Z}_3[X]/(X - 1) \times \mathbf{Z}_3[X]/(X^2 + X - 1).$$

Il primo fattore è isomorfo al campo  $\mathbf{Z}_3$  e il secondo ad un campo  $k$  di  $3^2 = 9$  elementi. Abbiamo quindi che  $R^* \cong \mathbf{Z}_3^* \times k^*$ . Il gruppo  $R^*$  ha quindi  $(3 - 1)(9 - 1) = 16$  elementi.

4. Sia  $M$  l' $\mathbf{R}[X]$ -modulo  $\mathbf{R}[X]/(X^3)$ . Determinare gli  $\mathbf{R}[X]$ -sottomoduli di  $M$ .

Il modulo  $M = \mathbf{R}[X]/(X^3)$  ha anche la struttura di anello. Gli  $\mathbf{R}[X]$ -sottomoduli di  $M$  sono esattamente gli ideali di  $\mathbf{R}[X]/(X^3)$ . Gli ideali di  $\mathbf{R}[X]/(X^3)$  sono le immagini degli ideali di  $\mathbf{R}[X]$  che contengono  $X^3$ . Siccome  $\mathbf{R}[X]$  è un PID, si tratta degli ideali generati dai divisori  $1, X, X^2$  e  $X^3$  di  $X^3$ . I sottomoduli sono quindi  $M, (X)/(X^3), (X^2)/(X^3)$  e  $\{0\}$ . Fine.

Osserviamo che il modulo  $M$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$  di dimensione 3. Una base è data da  $\{1, X, X^2\}$ . In questi termini si ha che  $(X)/(X^3) = \text{Span}\{X, X^2\}$  e  $(X^2)/(X^3) = \text{Span}\{X^2\}$ .