COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ gli zeri del polinomio $X^3 + X^2 + 2X + 1$. Calcolare $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$.

2. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 99 è abeliano.

3. Sia p un primo e sia F il campo $\mathbf{Z}_p(X, Y)$.
   (a) Dimostrare che $F^p = \{f^p : f \in F\}$ è un sottocampo di F.
   (b) Determinare l'indice $[F : F^p]$.

4. Sia $f : \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6 \longrightarrow \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_6$ l'omomorfismo dato da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   (a) Dimostrare che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) Quanti elementi ha il quoziente $\ker(f)/\mathrm{im}(f)$?

5. Siano R_1 e R_2 due anelli commutativi.
   (a) Dimostrare che ogni ideale I di $R_1 \times R_2$ ha la forma $I = I_1 \times I_2$ dove I_1 è un ideale di R_1 e I_2 è un ideale di R_2.
   (b) Per $R_1 = \mathbf{Z}_4$ e $R_2 = \mathbf{Z}_2[X]/(X^2)$ determinare tutti gli ideali primi di $R_1 \times R_2$.