Algebra 2 (Schoof) 3^o appello 28 giugno 2010, ore 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Siano H_1, H_2 due sottogruppi di un gruppo G. Sia C_1 una classe laterale sinistra di H_1. Dimostrare che se $C_1 \subset H_2$, allora si ha che $H_1 \subset H_2$.

2. Sia $n \geq 1$ un intero. Determinare il discriminante del polinomio $X^n - 1$.

3. Siano A, B sottogruppi di un gruppo commutativo C. Sia dato il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \cap B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_3"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_4"] & P \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_2"] & C \arrow[r, "h"] & Q \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

dove le mappe i_1, i_2, i_3 e i_4 sono le inclusioni. Supponiamo che le sue righe siano esatte. Dimostrare che f è iniettiva.

4. Sia p un primo e sia $\mathbf{F}_q$ un campo di $q = p^m$ elementi dove $m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Per $x \in \mathbf{F}_q$ definiamo $t(x) = x + x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^{m-1}}$.
   (a) Dimostrare che $t(x + y) = t(x) + t(y)$ per ogni $x, y \in \mathbf{F}_q$.
   (b) Dimostrare che l'immagine di t è contenuto nel sottocampo $\mathbf{F}_p$ di $\mathbf{F}_q$.
   (c) Dimostrare che l'applicazione $t : \mathbf{F}_q \longrightarrow \mathbf{F}_p$ è suriettiva.

5. Sia G un gruppo e sia G^2 il sottogruppo generato dagli elementi della forma x^2 con $x \in G$.
   (a) Dimostrare che G^2 è un sottogruppo normale di G.
   (b) Dimostrare che G^2 contiene il sottogruppo $[G, G]$ dei commutatori di G.

1. Sia $y \in G$ tale che $C_1 = yH_1$. Il fatto che C_1 è contenuto in H_2 implica quindi che $y \in H_2$. Sia $x \in H_1$ arbitrario. Allora $yx \in C_1 \subset H_2$. E quindi si ha che $x = (xy)y^{-1} \in H_2$.

2. Questo è un caso speciale dell'esercizio 6 del Foglio 9.

3. Sia $x \in P$ e supponiamo che $f(x) = 0$. Per la suriettività di g esiste $y \in B$ con $g(y) = x$. Per la commutatività del diagramma si ha che $h(i_4(y)) = f(x) = 0$. Per l'esattezza esiste quindi $z \in A$ con $i_2(z) = i_4(y)$. In altre parole, $y = z$ è contenuto in $A \cap B$. Ma allora $x = f(y) = f(i_1(y)) = 0$ e concludiamo che f è iniettiva.

4. La parte (a) segue dal fatto che $(x + y)^p = x^p + y^p$ per ogni $x, y \in \mathbf{F}_q$. Per la parte (b) sia $x \in \mathbf{F}_q$ arbitrario. Si ha che $t(x)^p = x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^m}$. Poichè $x^{p^m} = x$, ne segue che $t(x)^p = t(x)$ e quindi $t(x) \in \mathbf{F}_p$. Per la parte (c) si osservi che il polinomio $X + X^p + X^{p^2} + \ldots + X^{p^{m-1}}$ ha $\leq p^{m-1}$ zeri. In altre parole, si ha che $\# \ker t \leq p^{m-1}$. Questo implica che l'immagine di t ha cardinalità almeno $q/p^{m-1} = p$. La parte (b) implica quindi che t è suriettiva.

5. Per definizione G^2 è un sottogruppo. Per vedere che è normale basta osservare che $gx^2g^{-1} = (gxg^{-1})^2$ per ogni $x, g \in G$. Per l'esercizio 4 del Foglio 13 il gruppo G/G^2 è abeliano. Questo fatto implica che $[G, G] \subset G^2$.