SPAZI VETTORIALI

Vincenzo Di Gennaro

1. La definizione di spazio vettoriale.

Sia V un insieme non vuoto, su cui sono assegnate due operazioni, che denoteremo con i simboli $+$ e $\cdot$. L'operazione $+$ e' un procedimento in base al quale ad ogni coppia di elementi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ di V si puo' associare un elemento di V, che denoteremo $\mathbf{u}+\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \longrightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V.$$

Invece l'operazione $\cdot$ e' un procedimento in base al quale ad ogni numero reale $a \in \mathbf{R}$ e ad ogni elemento $\mathbf{u}$ di V si puo' associare un elemento di V che denoteremo $a \cdot \mathbf{u}$, oppure piu' semplicemente $a\mathbf{u}$:

$$a \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in V \longrightarrow a \cdot \mathbf{u} \in V$$

(il numero a va messo a sinistra di $\mathbf{v}$). L'operazione $+$, che dicesi anche *addizione* o *somma*, e' un'operazione *interna* a V, nel senso che agisce tra elementi di V, mentre l'operazione $\cdot$, che dicesi anche *moltiplicazione*, e' un'operazione *esterna* a V, in quanto agisce tra un numero ed un elemento di V. Quando su un insieme V si hanno due operazioni del tipo suddetto, si dice anche che

$$(V, +, \cdot) \quad \textit{e' una struttura algebrica.}$$

L'insieme V si dice *il sostegno* della struttura algebrica $(V, +, \cdot)$. Per semplicita' la struttura algebrica viene denotata con V. Detto in altre parole, una struttura algebrica $(V, +, \cdot)$ e' un insieme non vuoto V, a priori qualunque, su cui sono state fissate una operazione interna ed una operazione esterna, anche loro procedimenti a priori qualunque. Come esempio, si puo' pensare all' insieme dei numeri reali, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione. In questo esempio dunque $V = \mathbf{R}$. Si osservi inoltre che in questo caso molto particolare, la moltiplicazione puo' essere vista sia come una operazione esterna che interna. Fra poco vedremo altri esempi di strutture algebriche.

Una struttura algebrica $(V, +, \cdot)$ dicesi *spazio vettoriale* se le operazioni assegnate soddisfano le seguenti otto proprieta'. Le prime quattro riguardano solo l'addizione, le successive due l'operazione di moltiplicazione esterna, e le ultime due riguardano il comportamento reciproco delle due operazioni.

- *Le proprieta' che definiscono uno spazio vettoriale.*

1) Comunque si assegnino elementi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in V, si ha $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' associativa dell'addizione.*

2) Esiste un elemento $\mathbf{0} \in V$ tale che per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Un tale elemento $\mathbf{0}$ si dice *elemento neutro per l'addizione* (proveremo tra poco che esso e' unico), e tale proprieta' dicesi *proprieta' dell'esistenza dell'elemento neutro.*

3) Per ogni elemento $\mathbf{u} \in V$, esiste un elemento $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Tale elemento $\mathbf{v}$ si dice *l'opposto di* $\mathbf{u}$, e si denota con il simbolo $-\mathbf{u} := \mathbf{v}$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' dell'esistenza dell'opposto.*

4) Comunque si assegnino elementi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in V, si ha $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' commutativa dell'addizione.*

5) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha: $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' associativa della moltiplicazione esterna.*

6) Per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

7) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in V, si ha: $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' distributiva della moltiplicazione esterna rispetto dell'addizione interna.*

8) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha: $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$. Tale proprieta' dicesi *proprieta' distributiva della moltiplicazione esterna rispetto dell'addizione tra numeri reali.*

Le proprieta' precedenti ci dicono che in uno spazio vettoriale si possono eseguire calcoli formali simili a quelli che possiamo eseguire tra numeri. In particolare la scrittura $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ non e' ambigua grazie alla proprieta' associativa. Si osservi che nell'uguaglianza $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$ della proprieta' 5), a sinistra appare due volte la moltiplicazione esterna, mentre a destra appare la moltiplicazione tra due numeri ab, e poi la moltiplicazione esterna. Percio' la proprieta' 5) stabilisce una sorta di compatibilita' tra la moltiplicazione esterna dello spazio vettoriale, e la moltiplicazione tra numeri reali. Una osservazione simile si puo' fare per la proprieta' 8). Infatti nell'uguaglianza $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$ abbiamo a sinistra la somma di due numeri, mentre a destra l'addizione nello spazio vettoriale.

Esercizio. Si consideri la seguente operazione interna definita sui numeri reali:

$$x \oplus y := x + 2y.$$

Dire se tale operazione possiede un elemento neutro (cioe' se e' vero che esiste un numero e tale che $x \oplus e = e \oplus x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$), se e' associativa (cioe' se e' vero che per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$ si ha $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$), e se e' commutativa (cioe' se e' vero che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha $x \oplus y = y \oplus x$).

Svolgimento. Per definizione abbiamo $1 \oplus 4 = 9$, mentre $4 \oplus 1 = 6$. Cio' prova che l'operazione $\oplus$ non e' commutativa. Non e' nemmeno associativa perche' $(1 \oplus 4) \oplus 3 = 15 \neq 21 = 1 \oplus (4 \oplus 3)$. Non possiede nemmeno l'elemento neutro. Infatti se e fosse un elemento neutro, avremmo $x + 2e = e + 2x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Allora deve essere $e = 0$. Ma $1 \oplus 0 = 1 \neq 2 = 0 \oplus 1$. ■

2. Alcune notazioni.

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, che indicheremo piu' semplicemente con V. Gli elementi di V, che indicheremo (ma non sempre) con lettere del tipo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$, si chiamano *vettori di* V. L'elemento neutro per l'addizione si dice *il vettore nullo di* V, e lo denoteremo con il simbolo $\mathbf{0}$. Per ogni vettore $\mathbf{u}$ di V denoteremo con $-\mathbf{u}$ il suo vettore opposto. Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, poniamo per definizione $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Nel contesto degli spazi vettoriali, i numeri reali, che denoteremo con lettere tipo $a, b, \dots \in \mathbf{R}$, si chiamano anche *scalari*, oppure *coefficienti*, oppure *pesi*. Diremo anche che V e' uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, per sottolineare che i coefficienti considerati sono numeri reali. Ma si potrebbero anche usare come coefficienti i numeri complessi, o anche solo i numeri razionali. In questi casi diremo che V e' uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ oppure su $\mathbf{Q}$.

3. Proprieta' di calcolo in uno spazio vettoriale.

Semplici conseguenze delle definizioni precedenti sono le seguenti proprieta' di calcolo in uno spazio vettoriale V.

• *Proprieta' di calcolo in uno spazio vettoriale* V

1) Il vettore nullo e' unico.

2) Il vettore opposto e' unico.

3) Per ogni scalare $a \in \mathbf{R}$ *si ha* $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4) Per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ *si ha* $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

5) $a\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff a = 0$ *oppure* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *(legge di annullamento del prodotto).*

6) $a(-\mathbf{u}) = (-a)\mathbf{u} = -(a\mathbf{u})$, $(-a)(-\mathbf{u}) = a\mathbf{u}$ *(la regola dei segni).*

7) Assegnati due vettori qualsiasi $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *ed uno scalare* $a \neq 0$, *esiste un unico vettore* $\mathbf{x}$ *tale che* $a\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, *e tale vettore e'* $\mathbf{x} = \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$.

Dimostrazione. 1) Siano $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ due vettori nulli per V. Poiche' entrambi sono elementi neutri per l'addizione, abbiamo:

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}.$$

Quindi $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$, cioe' il vettore nullo e' unico.

2) Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due vettori opposti per $\mathbf{u}$. Quindi abbiamo $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Applicando la proprieta' associativa ne consegue:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Cio' prova che $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, cioe' che l'opposto di $\mathbf{u}$ e' unico.

3) Per la proprieta' distributiva abbiamo:

$$a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0},$$

cioe'

$$a\mathbf{0} = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}.$$

Ora sommiamo ad entrambi i membri dell'uguaglianza precedente l'opposto del vettore $a\mathbf{0}$:

$$a\mathbf{0} + (-a\mathbf{0}) = (a\mathbf{0} + a\mathbf{0}) + (-a\mathbf{0}).$$

A sinistra abbiamo il vettore nullo per definizione di opposto. A destra, per la proprieta' associativa, abbiamo:

$$(a\mathbf{0} + a\mathbf{0}) + (-a\mathbf{0}) = a\mathbf{0} + (a\mathbf{0} + (-a\mathbf{0})) = a\mathbf{0} + \mathbf{0} = a\mathbf{0}.$$

Percio' deduciamo che

$$\mathbf{0} = a\mathbf{0},$$

che e' quello che volevamo provare.

4) Come prima, per la proprieta' distributiva abbiamo:

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}.$$

E adesso con un ragionamento analogo al precedente deduciamo che $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

5) Avendo gia' provato 3) e 4), occorre solo provare che se $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ allora $a = 0$ oppure $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Possiamo supporre $a \neq 0$. Allora, tenuto conto delle proprieta' 5) e 6) della moltiplicazione esterna di uno spazio vettoriale, abbiamo:

$$\mathbf{0} = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{0} = \frac{1}{a} \cdot (a\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u},$$

cioe' $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

6) Dire che $a(-\mathbf{u}) = -(a\mathbf{u})$ significa dire che $a(-\mathbf{u})$ e' l'opposto di $a\mathbf{u}$. Ora per provare che $a(-\mathbf{u})$ e' l'opposto di $a\mathbf{u}$ e' sufficiente provare che $a\mathbf{u}+a(-\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u})+a\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Per la proprieta' distributiva e per la proprieta' di calcolo 3) appena provata abbiamo:

$$a\mathbf{u} + a(-\mathbf{u}) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Similmente vediamo che

$$a(-\mathbf{u}) + a\mathbf{u} = a(-\mathbf{u} + \mathbf{u}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Resta provato che $a(-\mathbf{u}) = -(a\mathbf{u})$. Un ragionamento simile prova che $(-a)\mathbf{u} = -(a\mathbf{u})$. Infatti:

$$a\mathbf{u} + (-a)\mathbf{u} = (a - a)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0} = a\mathbf{u} + (-a)\mathbf{u}.$$

Per concludere occorre provare che $(-a)(-\mathbf{u}) = a\mathbf{u}$. Per quanto appena provato possiamo scrivere:

$$(-a)(-\mathbf{u}) = -(a(-\mathbf{u})) = -(-(a\mathbf{u})).$$

Ora osserviamo che in generale l'uguaglianza

$$\mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = (-\mathbf{w}) + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

ci dice che $\mathbf{w}$ e' l'opposto di $-\mathbf{w}$, cioe' $\mathbf{w} = -(-\mathbf{w})$. Percio' $-(-(a\mathbf{u})) = a\mathbf{u}$.

7) Cominciamo a provare l'esistenza, cioe' che il vettore $\mathbf{x} = \frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ soddisfa la condizione $a\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Infatti, tenuto conto delle proprieta' con cui abbiamo definito uno spazio vettoriale, abbiamo:

$$a\mathbf{x} + \mathbf{u} = a\left(\frac{1}{a}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\right) + \mathbf{u} = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

$$= 1 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}.$$

Per provare l'unicita', supponiamo che

$$a\mathbf{x} + \mathbf{u} = a\mathbf{y} + \mathbf{u}.$$

Sommando ad ambo i membri l'opposto di $\mathbf{u}$ otteniamo:

$$a\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{u} = a\mathbf{y} + \mathbf{u} - \mathbf{u}.$$

Cioe'

$$a\mathbf{x} = a\mathbf{y}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{a}$ otteniamo:

$$\frac{1}{a}(a\mathbf{x}) = \frac{1}{a}(a\mathbf{y}).$$

Per la proprieta' associativa della moltiplicazione esterna segue che:

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\mathbf{x} = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\mathbf{y}.$$

Quindi

$$1 \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{y}$$

cioe' $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. ■

Esercizio. Siano $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$ *vettori dello spazio vettoriale* V*, ed* $a_1, a_2, \dots, a_h \in \mathbf{R}$ *scalari tali che* $a_1 \neq 0$ *e* $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$*. Provare che*

$$\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\mathbf{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{a_h}{a_1}\right)\mathbf{u}_h.$$

Svolgimento. In base alla proprieta' di calcolo 7) sappiamo che

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{a_1}\left(-(a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h)\right).$$

L'uguaglianza da provare ora segue combinando la regola dei segni, la proprieta' distributiva, e la proprieta' associativa della moltiplicazione esterna. ■

4. Esempi di spazi vettoriali.

1) Lo spazio nullo.

Sia $V = \{*\}$ un insieme costituito da un solo elemento. E' chiaro che esiste un'unica struttura algebrica per V, e che tale struttura e' uno spazio vettoriale. L'unico elemento $*$ e' il vettore nullo. Tale spazio vettoriale si dice *lo spazio nullo.*

2) Lo spazio $\mathbf{R}$.

L'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ possiede due naturali operazioni $+$ e $\cdot$, quelle che si studiano a scuola. Tramite tali operazioni $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale. Chiameremo tale spazio *lo spazio dei numeri reali.* In tale spazio il vettore nullo e' il numero 0, cioe' $\mathbf{0} = 0$, e l'opposto del vettore $\mathbf{u} = x$ e' il numero $-x$.

3) Lo spazio $\mathbf{R}^2$.

Dati due numeri reali x_1 ed x_2, il simbolo

$$(x_1, x_2)$$

dicesi *coppia di numeri reali*, con prima componente x_1 e seconda componente x_2. Qualche libro usa anche la notazione $(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$. Diremo che due coppie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ed $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ sono uguali se hanno ordinatamente uguali le componenti. Cioe':

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_1 = y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = y_2.$$

In base a tale definizione la coppia $(1, 0)$ e' diversa dalla coppia $(0, 1)$. Indichiamo con $\mathbf{R}^2$ l'insieme di tutte le coppie di numeri reali. Cioe':

$$\mathbf{R}^2 := \{(x_1, x_2) \,:\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Per esempio le coppie $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, \sqrt{2})$, $(\pi, \sqrt{e})$ sono elementi dell'insieme $\mathbf{R}^2$. Su tale insieme possiamo definire in modo naturale due operazioni, ponendo:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e

$$a \cdot (x_1, x_2) := (ax_1, ax_2).$$

La struttura algebrica cosi' definita $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ verifica tutte le 8 condizioni richieste ad uno spazio vettoriale. La dimostrazione di cio' e' facile, ci si riconduce alle proprieta' delle operazioni tra numeri reali, ma non la vedremo nel dettaglio. Quindi $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale, che indicheremo con $\mathbf{R}^2$, detto lo spazio vettoriale delle coppie di numeri reali. In tale spazio il vettore nullo e' la coppia $(0, 0)$, mentre l'opposto del vettore (x_1, x_2) e' il vettore $(-x_1, -x_2)$.

Esercizio. Calcolare le componenti del vettore:

$$\mathbf{x} = 2(-1,3) + \sqrt{7}(1,-\sqrt{7}) - 5(0,1).$$

Svolgimento. Per le definizioni appena date abbiamo:

$$\mathbf{x} = (-2,6) + (\sqrt{7},-7) + (0,-5) = (\sqrt{7}-2,-6).$$

Percio' la prima componente di $\mathbf{x}$ e' $x_1 = \sqrt{7}-2$, e la seconda componente e' $x_2 = -6$.■

Osservazione. Nell'esempio precedente, si dice che il vettore $\mathbf{x} = (\sqrt{7}-2,-6)$ e' *la combinazione lineare* dei vettori $(-1,3)$, $(1,-\sqrt{7})$, $(0,1)$ con pesi $2, \sqrt{7}, -5$. In seguito daremo la definizione generale di combinazione lineare, che sara' un concetto importante nello studio degli spazi vettoriali.

L'esempio $\mathbf{R}^2$ si puo' generalizzare al caso delle $n-$ple di numeri, che andiamo a studiare nel prossimo esempio di spazio vettoriale.

4) Lo spazio $\mathbf{R}^n$.

Fissiamo un intero $n \geq 1$.

Dati n numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n$, il simbolo

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dicesi $n-$*pla di numeri reali*, con prima componente x_1, seconda componente x_2, ..., $n-$esima componente x_n. Diremo che due $n-$ple

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ed} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

sono uguali se hanno ordinatamente uguali le componenti. Cioe':

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_i = y_i \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots, n.$$

In base a tale definizione, assumendo per esempio $n = 3$, la terna $(1,0,0)$ e' diversa dalla terna $(0,1,0)$. Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ l'insieme di tutte le $n-$ple di numeri reali. Cioe':

$$\mathbf{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,:\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

Per esempio le terne $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(\sqrt{3}, \pi+e, \sqrt{\pi})$ sono elementi di $\mathbf{R}^3$, mentre le quadruple $(0,0,0,0)$, $(12,-4,9,9)$ sono elementi di $\mathbf{R}^4$. Sull'insieme $\mathbf{R}^n$ possiamo definire in modo naturale due operazioni, ponendo:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e

$$a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

La struttura algebrica cosi' definita $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale, che indicheremo con $\mathbf{R}^n$, detto lo spazio vettoriale delle $n-$ple di numeri reali, o anche *lo spazio vettoriale numerico di dimensione* n. Il termine *numerico* e' dovuto al fatto che gli elementi di tale spazio, detti anche *vettori numerici*, sono definiti utilizzando i numeri. In tale spazio il vettore nullo e' l' $n-$pla $(0, 0, \dots, 0)$, mentre l'opposto del vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e' il vettore $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Esercizio. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ *calcolare le componenti della seguente combinazione lineare:*

$$\mathbf{x} = 2(1, 0, 0) - \sqrt{5}(0, -1, 0) + 8(0, 0, 1).$$

Svolgimento. Per le definizioni appena date abbiamo:

$$\mathbf{x} = (2, 0, 0) + (0, \sqrt{5}, 0) + (0, 0, 8) = (2, \sqrt{5}, 8).$$

Percio' la prima componente di $\mathbf{x}$ e' $x_1 = 2$, la seconda componente e' $x_2 = \sqrt{5}$, e la terza componente e' $x_3 = 8$. ■

Si osservi che lo spazio $\mathbf{R}^n$, quando $n = 2$, coincide con lo spazio delle coppie $\mathbf{R}^2$ discusso nell'esempio precedente, quando $n = 1$ e' lo spazio $\mathbf{R}$, quando $n = 0$ possiamo assumere che sia lo spazio nullo. Una ulteriore generalizzazione e' lo spazio delle matrici che ora andiamo a studiare.

5) Lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m, n)$.

Fissiamo degli interi $m, n \geq 1$.

Una matrice con m righe ed n colonne e' una tabella A rettangolare di numeri $a_{ij} \in \mathbf{R}$ del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

In tale tabella appaiono mn numeri. Un modo piu' semplice per denotare la matrice A e' il seguente:

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n.$$

I numeri a_{ij} si chiamano le componenti della matrice A. Sono mn numeri, non necessariamente distinti tra loro, e l'indice i denota la riga a cui appartiene a_{ij}, mentre l'indice j denota la colonna di appartenenza. Date due matrici $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, diremo che sono uguali se hanno ordinatamente uguali le rispettive componenti, cioe':

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{per ogni } i, j.$$

Denoteremo con $\mathcal{M}(m, n)$ l'insieme di tutte le matrici $m \times n$, cioe' con m righe ed n colonne. Per esempio le matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono elementi di $\mathcal{M}(2,2)$. Sempre come esempio, si osservi che

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infatti gli insiemi delle componenti di tali matrici sono uguali, ma le componenti non compaiono nello stesso ordine, percio' le due matrici sono diverse. Assegnate due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathcal{M}(m,n)$, ed uno scalare $a \in \mathbf{R}$, possiamo definire:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$

e

$$aA := (aa_{ij}).$$

In tal modo otteniamo una struttura algebrica $(\mathcal{M}(m,n), +, \cdot)$, che risulta essere uno spazio vettoriale, che diremo *lo spazio delle matrici* $m \times n$. In tale spazio il vettore nullo e' rappresentato dalla matrice (0) con componenti tutte nulle, mentre la matrice opposta ad $A = (a_{ij})$ e' la matrice $-A = (-a_{ij})$.

Esercizio. Nello spazio $\mathcal{M}(2,3)$ *calcolare le componenti della seguente combinazione lineare:*

$$A = -2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Per le definizioni appena date abbiamo:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 3 + 2\sqrt{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Percio' le componenti della matrice A sono: $a_{11} = -6$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 4$, $a_{21} = 3 + 2\sqrt{2}$, $a_{22} = 6$, $a_{23} = 2$. ■

Si osservi che possiamo identificare $\mathbf{R}^n$ con $\mathcal{M}(1,n)$, e $\mathbf{R}^m$ con $\mathcal{M}(m,1)$. Percio' gli esempi di spazio vettoriale che abbiamo fatto sinora rientrano tutti nella famiglia degli spazi di matrici $\mathcal{M}(m,n)$. Il prossimo esempio invece e' un esempio un po' diverso, per motivi di cui parleremo piu' in la'.

6) Lo spazio dei polinomi $\mathbf{R}[t]$.

Fissati dei numeri reali $a_0, a_1, \dots, a_h \in \mathbf{R}$, si definisce *polinomio* $p(t)$ *con coefficienti* $a_0, a_1, \dots, a_h$ *nella variabile* t la funzione :

$$t \in \mathbf{R} \to p(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h \in \mathbf{R}.$$

Se $a_h \neq 0$, allora si dice che il polinomio $p(t)$ ha grado h, scriveremo $\deg p(t) = h$, ed a_h si chiama *il coefficiente direttore di* $p(t)$. Per il polinomio nullo, cioe' il polinomio con coefficienti tutti nulli, il grado non e' definito. Per esempio il polinomio $p(t) = -3 + \frac{1}{4} t$ e' un polinomio di grado 1 con coefficiente direttore $a_1 = \frac{1}{4}$, il polinomio $p(t) = 2 + t^3 + t^8$ ha grado 8, il polinomio $p(t) = 5$ ha grado 0. Un polinomio di grado 0 si dice anche *polinomio costante*.

Poiche' abbiamo definito un polinomio come una funzione, si pone naturale la domanda se la funzione determina i coefficienti, cioe' se sia possibile che la stessa funzione polinomio possa essere rappresentata da sequenze diverse di coefficienti. La risposta e' fornita dal cosiddetto *principio di identita' dei polinomi* che dice che due polinomi sono uguali (come funzioni) se e solo se hanno i coefficienti ordinatamente uguali. Cioe' se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k$ sono due polinomi, allora

$$p(t) = q(t) \quad \forall t \in \mathbf{R} \iff a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_i = b_i, \dots .$$

In particolare se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h$ e' un polinomio per cui $p(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, allora $a_0 = a_1 = \dots a_h = 0$, cioe' *il polinomio nullo e' l'unico polinomio $p(t)$ per il quale $p(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$*. Inoltre due polinomi uguali hanno lo stesso grado. Questo principio di identita' ci consente di confrontare due polinomi per capire se sono uguali oppure no.

Denoteremo con $\mathbf{R}[t]$ l'insieme di tutti i polinomi. Dati due polinomi $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k$, ed uno scalare $a \in \mathbf{R}$, definiamo:

$$p(t) + q(t) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_i + b_i)t^i + \dots$$

e

$$ap(t) := aa_0 + aa_1 t + aa_2 t^2 + \cdots + aa_h t^h.$$

In altre parole definiamo la somma di due polinomi come quel polinomio che si ottiene sommando ordinatamente i coefficienti dei due polinomi, e definiamo la moltiplicazione di uno scalare a per un dato polinomio, come quel polinomio che si ottiene moltiplicando per a tutti i coefficienti del polinomio. In tal modo otteniamo una struttura algebrica $(\mathbf{R}[t], +, \cdot)$, e si puo' provare che tale struttura e' in realta' uno spazio vettoriale, che diremo *lo spazio dei polinomi*. Nello spazio dei polinomi, il polinomio nullo funge da vettore nullo, e l'opposto del polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_h t^h$ e' il polinomio $-p(t) = (-a_0) + (-a_1)t + (-a_2)t^2 + \cdots + (-a_h)t^h$.

Esercizio. Nello spazio $\mathbf{R}[t]$ calcolare i coefficienti del seguente polinomio:

$$p(t) = -3(1 + t^2) + 5(t - t^6) - (1 + t + t^3) + 4(5 - t - t^4).$$

Svolgimento. Eseguendo prima la moltiplicazione esterna e poi l'addizione abbiamo:

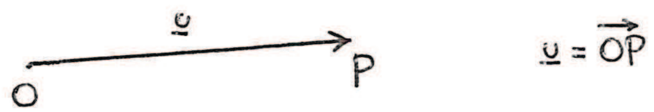
$$p(t) = (-3 - 3t^2) + (5t - 5t^6) + (-1 - t - t^3) + (20 - 4t - 4t^4) = 16 - 3t^2 - t^3 - 4t^4 - 5t^6.$$

Percio' il polinomio $p(t)$ e' un polinomio di grado 6, con coefficiente direttore -5, e con coefficienti dati da: $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (16, 0, -3, -1, -4, 0, -5)$. ■

Tutti gli esempi fatti sin qui di spazio vettoriale sono esempi "numerici", nel senso che i vettori sono stati definiti utilizzando numeri. Il prossimo esempio e' un esempio diverso, in cui i vettori sono dei segmenti, percio' di natura "geometrica".

7) Lo spazio dei vettori geometrici $\mathcal{V}_O$.

Dati due punti O e P nello spazio fisico $\mathcal{E}$ che ci circonda, denoteremo con $\overrightarrow{OP}$ il segmento orientato con origine in O ed estremo in P. Il punto O si dice anche punto di applicazione del segmento $\overrightarrow{OP}$. Il termine "orientato" si riferisce al fatto che, se si decide di percorrere il segmento $\overrightarrow{OP}$, allora cio' deve avvenire da O verso P. In qualche libro i segmenti orientati sono anche chiamati vettori geometrici. A volte denoteremo $\overrightarrow{OP}$ con una lettera tipo $\mathbf{u}$. Il segmento $\overrightarrow{OO}$ che si riduce solo al punto O si chiama il segmento nullo.



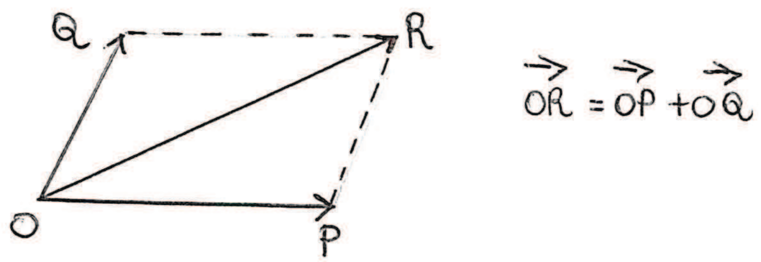
Fissato un punto O di applicazione, denoteremo con $\mathcal{V}_O$ l'insieme costituito da tutti i vettori geometrici $\overrightarrow{OP}$, al variare di P nello spazio fisico $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{V}_O := \left\{ \overrightarrow{OP} : \quad P \in \mathcal{E} \right\}.$$

In tale insieme possiamo definire una addizione interna ed una moltiplicazione esterna nel seguente modo. Dati due vettori geometrici $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$, trasportiamo il vettore $\overrightarrow{OQ}$ parallelamente a se stesso con il punto di applicazione lungo il segmento $\overrightarrow{OP}$. Quando O si sara' sovrapposto all'estremo P, il segmento $\overrightarrow{OQ}$ avra' raggiunto una certa posizione $\overrightarrow{PR}$. Definiamo:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} := \overrightarrow{OR}$$

Nel caso in cui $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$ non si trovino sulla stessa retta, possiamo dire piu' semplicemente che il vettore $\overrightarrow{OR}$ rappresenta la diagonale, applicata in O, del parallelogramma costruito con i lati $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$.



Dati invece uno scalare a ed un segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, si definisce il segmento orientato

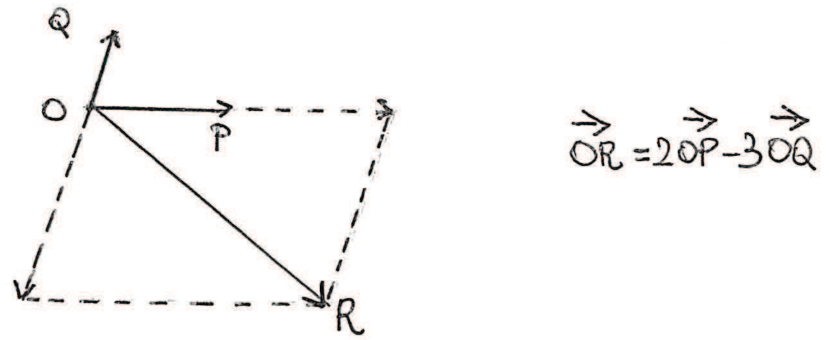
$$a\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OS}$$

come quel segmento $\overrightarrow{OS}$ applicato in O, che si trova sulla stessa retta di $\overrightarrow{OP}$, che ha lunghezza pari al prodotto della lunghezza di $\overrightarrow{OP}$ per $|a|$, e tale che l'estremo S si trovi dalla stessa parte di P rispetto al punto di applicazione, o dalla parte opposta, a seconda che $a > 0$ oppure $a < 0$. Se $a = 0$ si pone $a\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO}$.

Con tali operazioni abbiamo definito una struttura algebrica $(\mathcal{V}_O, +, \cdot)$. Utilizzando le proprieta' dei triangoli si puo' provare che tale struttura e' uno spazio vettoriale, che chiameremo *lo spazio dei vettori geometrici.* In tale spazio il vettore nullo e' dato dal segmento nullo $\overrightarrow{OO}$. L'opposto del vettore $\overrightarrow{OP}$ coincide con $(-1) \cdot \overrightarrow{OP}$ come costruito in precedenza con $a = -1$.

Esercizio. Assegnati i vettori geometrici $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$ come in figura, disegnare il vettore $\overrightarrow{OR} := 2\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ}$.

Svolgimento.



5. Altri esempi di spazi vettoriali: i sottospazi.

Uno spazio vettoriale V induce in modo naturale, su certi particolari sottoinsiemi di V, una struttura di spazio vettoriale. Questi sottoinsiemi sono i cosiddetti *sottospazi*, che pertanto costituiscono altri esempi di spazi vettoriali. Ora andremo a studiare questa nozione in dettaglio.

Fissiamo uno spazio vettoriale V. Sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme di V, cioe' un insieme i cui elementi stanno in V. W si dice *sottospazio di* V se verifica le seguenti tre condizioni:

- *Le proprieta' che definiscono un sottospazio.*

1) il vettore nullo appartiene a W;

2) comunque siano assegnati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in W allora $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e' ancora un elemento di W (questa proprieta' si esprime anche dicendo che W e' stabile, o chiuso, rispetto all'operazione di addizione);

3) per ogni scalare $a \in \mathbf{R}$ ed ogni $\mathbf{u}$ in W il vettore $a\mathbf{u}$ appartiene ancora a W (cioe' W e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna).

Osservazione. Sia W un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Allora W e' un sottospazio di V se e solo se W non e' vuoto, e per ogni scelta di scalari $a, b \in \mathbf{R}$, e di vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in W, si ha che $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ appartiene ancora a W.

Dimostrazione. Supponiamo che W sia un sottospazio. Allora e' chiaro che non e' vuoto perche' $\mathbf{0} \in W$. Ora siano $a, b \in \mathbf{R}$, e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Poiche' W e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, allora $a\mathbf{u}$ e $b\mathbf{v}$ appartengono a W. E poiche' W e' stabile rispetto all'addizione deve essere anche $a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \in W$. Cio' prova la prima implicazione.

Viceversa, supponiamo che $W \neq \emptyset$, e che per ogni scelta di scalari $a, b \in \mathbf{R}$, e di vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in W, si ha $a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \in W$. Poiche' W non e' vuoto, ci sara' qualche vettore $\mathbf{u}$ in W. Stanti le ipotesi anche il vettore $0\mathbf{u}+0\mathbf{u}$ appartiene a W, ma tale vettore e' proprio il vettore nullo. Percio' $\mathbf{0} \in W$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono in W allora per ipotesi anche il vettore $1 \cdot \mathbf{u} + 1 \cdot \mathbf{v}$ appartiene a W, cioe' appartiene a W anche il vettore $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Cio' dimostra che W e' stabile rispetto all'addizione. Infine, se $a \in \mathbf{R}$ ed $\mathbf{u} \in W$ allora, per le ipotesi, anche il vettore $a\mathbf{u}+0\mathbf{u}$ sta in W, cioe' sta in W anche il vettore $a\mathbf{u}$. Cio' prova che W e' anche stabile rispetto alla moltiplicazione. In conclusione W e' un sottospazio di V. ■

Osservazione. Supponiamo che W sia un sottospazio di V. Poiche' W e' stabile rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ di V, allora tali operazioni inducono, per restrizione, una struttura algebrica $(W, +, \cdot)$ su W:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \to \mathbf{u}+\mathbf{v} \in W, \qquad a \in \mathbf{R}, \mathbf{u} \in W \to a\mathbf{u} \in W.$$

Osserviamo di nuovo che tali operazioni sono ben definite proprio perche' W e' stabile (se W non fosse stabile potrebbe accadere che per una opportuna scelta di $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ si ha $\mathbf{u}+\mathbf{v} \notin W$, e quindi $+$ non sarebbe un'operazione interna a W). Ed e' evidente che la struttura $(W, +, \cdot)$ e' uno spazio vettoriale. Infatti tutte le proprieta' che valgono per le operazioni di V valgono anche per le stesse operazioni riguardate tra i vettori di W. In particolare c'e' un vettore nullo, e' proprio il vettore nullo di V, ed ogni $\mathbf{u} \in W$ ha un opposto, che coincide con l'opposto $-\mathbf{u}$ di $\mathbf{u}$ in V, in quanto $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} \in W$ per la stabilita'. Percio' i sottospazi di uno spazio vettoriale sono a loro volta, in maniera naturale, degli spazi vettoriali. ■

Ora andiamo a vedere qualche esempio di sottoinsieme che e' un sottospazio, e qualche sottoinsieme che non lo e'.

Esempi.

1) Cominciamo con l'osservare che se V e' uno spazio vettoriale, allora V stesso e $\{\mathbf{0}\}$ sono senz'altro dei sottospazi. Poiche' questi sottospazi ci sono sempre, si dicono anche *i sottospazi banali di V*.

2) Supponiamo che $V = \mathbf{R}$, e sia W un suo sottospazio. Supponiamo anche che $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Allora esiste un vettore $\mathbf{u} = x$ non nullo in W. Sia ora $\mathbf{v} = y \in \mathbf{R}$ un qualunque vettore in $\mathbf{R}$. Poiche' $\mathbf{v} = y = \frac{y}{x}x = \frac{y}{x}\mathbf{u}$, allora $\mathbf{v} \in W$. Cio' prova che quando $V = \mathbf{R}$, allora in V ci sono soltanto i sottospazi banali.

3) Sia $V = \mathbf{R}^2$, e consideriamone il sottoinsieme W formato dalle coppie (x_1, x_2) tali che $x_1 + x_2 = 1$, cioe'

$$W := \{(x_1, x_2) : \quad x_1 + x_2 = 1\}.$$

Ebbene W non e' un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ perche' $\mathbf{0}$ non appartiene a W.

4) Cambiamo sottoinsieme, ponendo:

$$W := \{(x_1, x_2) : \quad x_1 + x_2 = 0\}.$$

In questo caso W e' un sottospazio. Infatti e' chiaro che $\mathbf{0} \in W$. Poi se $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ sono due elementi di W allora $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, e poiche' $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 0$, allora:

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0,$$

e quindi $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$. Infine se $\mathbf{u} \in W$ ed a e' uno scalare, allora $a\mathbf{u} = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$. E poiche' $x_1 + x_2 = 0$ allora $ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2) = 0$, e percio' $a\mathbf{u} \in W$, e W e' stabile anche rispetto alla moltiplicazione.

5) Restando sempre in $\mathbf{R}^2$, consideriamo ora:

$$W := \{(x_1, x_2) : \quad x_1 + x_2 \geq 0\}.$$

In tal caso W non e' un sottospazio. Infatti e' vero che $\mathbf{0} \in W$, e' vero che W e' stabile rispetto all'addizione, ma non e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Infatti $(1, 1) \in W$ ma $(-1)(1, 1) = (-1, -1) \notin W$.

6) In $\mathbf{R}^3$ consideriamo il seguente sottoinsieme:

$$W := \{(0, 0, 0), (1, 2, 1)\}.$$

Osserviamo che W e' formato solo da due elementi. Non puo' essere un sottospazio. Infatti $(1, 2, 1) + (1, 2, 1) = (2, 4, 2) \notin W$. Quindi W non e' stabile rispetto a $+$, e nemmeno rispetto a $\cdot$.

7) Consideriamo invece

$$W := \{a(1, 2, 1) : \quad a \in \mathbf{R}\}.$$

Allora W e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Infatti ponendo $a = 0$ otteniamo il vettore nullo. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ stanno in W allora esistono scalari a e b tali che $\mathbf{u} = a(1, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = b(1, 2, 1)$. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + b)(1, 2, 1) \in W$. Similmente si prova che W e' stabile rispetto alla moltiplicazione.

8) Con ragionamenti analoghi ai precedenti si vede che

$$W := \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)\}$$

e' un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ ma non e' un sottospazio;

$$W := \{a(1,0,0) + b(0,1,0) : \quad a, b \in \mathbf{R}\}$$

e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$;

$$W := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \quad a + c = b + d \right\}$$

e' un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$.

9) Mettiamoci nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[t]$. Fissato un intero $h \geq 1$, denotiamo con $\mathbf{R}[t]_h$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}[t]$ costituito dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado h. Se moltiplichiamo un polinomio di grado h per uno scalare non nullo, il grado del polinomio rimane inalterato, percio' $\mathbf{R}[t]_h$ e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Ma non lo e' rispetto all'addizione. Infatti la somma di due polinomi di grado h puo' avere grado inferiore ad h. Ad esempio se consideriamo i polinomi $p(t) = 1 + t + t^3$ e $q(t) = -3 + t^2 - t^3$, sono entrambi di grado 3, ma $p(t) + q(t) = -2 + t + t^2$ ha grado 2. Ne consegue che $\mathbf{R}[t]_h$ non e' un sottospazio. Se invece consideriamo il sottoinsieme $\mathbf{R}[t]_{\leq h}$ costituito dal polinomio nullo e da tutti i polinomi di grado minore o uguale ad h, dalla discussione precedente si capisce che $\mathbf{R}[t]_{\leq h}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}[t]$.

10) Consideriamo ora lo spazio dei vettori geometrici $\mathcal{V}_O$. Fissata una retta l passante per il punto di applicazione O, denotiamo con $\mathcal{V}_{O,l}$ l'insieme di tutti i vettori geometrici applicati in O e giacenti su l. Poi fissiamo un piano ρ passante per O, e denotiamo con $\mathcal{V}_{O,\rho}$ l'insieme di tutti i vettori geometrici applicati in O e giacenti su ρ. Cioe':

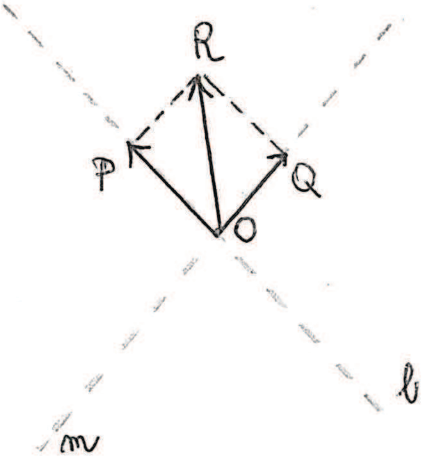
$$\mathcal{V}_{O,l} := \left\{ \overrightarrow{OP} : \quad P \in l \right\}, \quad \mathcal{V}_{O,\rho} := \left\{ \overrightarrow{OP} : \quad P \in \rho \right\}.$$

Per come sono state definite le operazioni tra i vettori geometrici, e' chiaro che $\mathcal{V}_{O,l}$ e $\mathcal{V}_{O,\rho}$ sono sottospazi di $\mathcal{V}_O$. In seguito proveremo che questi sono gli unici tipi di sottospazi (non banali) di $\mathcal{V}_O$. Detto in poche parole, i sottospazi non banali di $\mathcal{V}_O$ sono esattamente le rette ed i piani passanti per l'origine. Cio' fornisce una interpretazione geometrica di cosa sia un sottospazio.

11) Fissiamo due rette distinte passanti per O, diciamo l ed m. Consideriamo l'unione W dei due sottospazi $\mathcal{V}_{O,l}$ e $\mathcal{V}_{O,m}$, cioe'

$$W := \mathcal{V}_{O,l} \cup \mathcal{V}_{O,m} = \left\{ \overrightarrow{OP} : \quad P \in l \quad \text{oppure} \quad P \in m \right\}.$$

Osserviamo che W e' stabile rispetto alla moltiplicazione, ma non lo e' rispetto alla addizione. Infatti se $P \in l$ e $Q \in m$, e P e Q non coincidono con O, allora per la regola del parallelogramma $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \notin W$. Questo esempio dimostra che in generale l'unione di due sottospazi non e' un sottospazio. Piu' in la' studieremo in dettaglio l'unione e l'intersezione di due sottospazi.



$R \notin l \cup m$

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ} \notin W$

6. La costruzione dei sottospazi: il sottospazio generato.

Esiste una tecnica per costruire i sottospazi, basata sulla nozione di *sistema di generatori*, che ora andremo a studiare. Occorrono delle definizioni preliminari.

- *Definizione di un vettore che dipende linearmente da un sistema di vettori.*

1) *Fissiamo uno spazio vettoriale V, e sia*

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$$

una sequenza di h vettori di V, eventualmente anche con qualche ripetizione. Diremo che tale sequenza e' un sistema di vettori di V.

2) *Assegnati h scalari $a_1, a_2, \ldots, a_h$, il vettore*

$$\mathbf{u} := a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h$$

si dice combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$ con pesi $a_1, a_2, \ldots, a_h$ (qualcuno di questi pesi puo' anche essere nullo, anche tutti).

3) *In tal caso diremo anche che $\mathbf{u}$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$. Cioe' diremo che un vettore $\mathbf{u}$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$ se $\mathbf{u}$ si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$.*

Si osservi che, per la proprieta' commutativa dell'addizione, il fatto che un vettore sia una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$, non dipende dall'ordine con cui appaiono i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$.

In generale non e' detto che un vettore sia combinazione lineare di un sistema assegnato di vettori.

Esercizio. Dire se e' vero oppure no che il vettore $(4, 13)$ *e' una combinazione lineare dei vettori* $(1, 3), (1, 4)$.

Svolgimento. Si tratta di vedere se esistono pesi x e y tali che $(4,13) = x(1,3)+y(1,4)$. Cio' equivale a dire che esistono pesi x, y tali che $(4,13) = (x+y, 3x+4y)$. Per definizione di uguaglianza di coppie cio' equivale a dire che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

ammette una soluzione (x, y). Un semplice calcolo prova che tale sistema ammette come soluzione $x = 3$ ed $y = 1$. Percio' la risposta e' si'. E possiamo verificare la correttezza della risposta in quanto $(4,13) = 3(1,3) + (1,4)$. ■

Esercizio. Dire se e' vero oppure no che il vettore $(0,1,1)$ *dipende linearmente dai vettori* $(1,0,0), (0,1,0)$.

Svolgimento. Come prima, si tratta di vedere se esistono pesi x e y tali che $(0,1,1) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$. Cioe' se il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

ammette soluzioni. Il che e' palesemente impossibile, percio' la risposta in questo caso e' no. ■

• *La definizione di sottospazio generato.*

Fissiamo un sottoinsieme $S \subseteq V$ qualsiasi di V. L'insieme Span(S) costituito da tutte le possibili combinazioni lineari che si possono formare con i vettori di S si dice il sottospazio di V generato da S. In altre parole

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Span}(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{esistono opportuni vettori } \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_h \text{ in } S \\ \text{ed esistono opportuni scalari } a_1, a_2, \ldots, a_h \\ \text{tali che } \mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h. \end{array}$$

Fra poco studieremo le proprieta' generali di questo insieme, in particolare vedremo che Span(S) e' effettivamente un sottospazio. Prima pero' vediamo qualche esempio.

Esempi. 1) Se S e' l'insieme vuoto, si assume che Span(S)$= \{\mathbf{0}\}$.

2) Supponiamo che $S = \{(1,5)\} \subset \mathbf{R}^2$. Allora Span($S$)$= \{a(1,5) : \quad a \in \mathbf{R}\}$. Infatti un vettore $\mathbf{u}$ sta in Span(S) se e solo se e' una combinazione lineare dei vettori che stanno in S. In S c'e' un solo vettore, il vettore $(1,5)$. Quindi esistono pesi $a_1, a_2, \ldots, a_h$ tali che $\mathbf{u} = a_1(1,5)+a_2(1,5)+\cdots+a_h(1,5)$. Per la proprieta' distributiva $\mathbf{u} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_h)(1,5)$, e quindi $\mathbf{u} = a(1,5)$ con $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_h$. In altre parole, in questo caso, Span(S) e' formato dai *multipli* del vettore $(1,5)$. In generale, dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, diremo che $\mathbf{v}$ e' un *multiplo* di $\mathbf{u}$ se esiste uno scalare $a \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$. Ritornando all'esempio, in particolare in Span(S) ci sono i vettori: $(0,0)$ perche' $(0,0) = 0(1,5)$, $(1,5)$ perche' $(1,5) = 1(1,5)$, $(2,10)$, $(-8,-40)$, $(\frac{1}{5}, 1)$, $(-\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$, cioe' ci sono tutti e soli i vettori (x_1, x_2) per cui $5x_1 - x_2 = 0$.

3) Allo stesso modo, se $S = \{\mathbf{u}\}$ e' formato da un solo vettore allora Span(S) e' il sottoinsieme di V costituito da tutti i multipli di $\mathbf{u}$, cioe' Span(S)= $\{a\mathbf{u} : \quad a \in \mathbf{R}\}$.

4) Se $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset \mathbf{R}^3$, allora Span($S$)= $\{x(1,0,0)+y(0,1,0) : x, y \in \mathbf{R}\}$.

5) Si osservi che se S e' formato da un numero finito di vettori, diciamo $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}$, allora

$$\mathbf{u} \in \text{Span}(S) \quad \iff \mathbf{u} \text{ dipende linearmente dai vettori } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h.$$

Infatti se $\mathbf{u} \in \text{Span}(S)$ allora $\mathbf{u}$ e' una combinazione lineare di vettori di S. Per semplicita' di notazione supponiamo che sia una combinazione lineare dei primi i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i$. Cioe' $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_i\mathbf{u}_i$. Ma allora $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_i\mathbf{u}_i + 0\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{u}_h$, e percio' $\mathbf{u}$ dipende linearmente da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$.

Ora veniamo alle proprieta' del sottospazio generato.

• *Le proprieta' del sottospazio generato.*

1) Se S e' vuoto allora Span(S)= $\{\mathbf{0}\}$.

2) $S \subseteq$Span(S).

3) Span(S) e' un sottospazio di V.

4) $S \subseteq T \implies$ Span(S) $\subseteq$ Span(T) (proprieta' di monotonia).

5) S e' un sottospazio di $V \iff S =$ Span(S).

6) Se W e' un sottospazio di V contenente S allora Span(S) e' contenuto in W. In particolare Span(S) e' l'intersezione di tutti i sottospazi W di V contenenti S:

$$\textit{Span}(S) = \bigcap_{\substack{S \subseteq W, \\ W \textit{ sottospazio di } V}} W$$

e percio', tra tutti i sottospazi di V contenenti S, Span(S) e' il piu' piccolo (rispetto all'inclusione). Tale proprieta' e' detta "proprieta' di giustificazione".

Dimostrazione. Prima di cominciare la dimostrazione di tali proprieta', osserviamo che le proprieta' 3) e 6) spiegano (giustificano) perche' si usa il termine "sottospazio generato da S". La proprieta' 4) ci dice che la formazione del sottospazio generato e' "crescente" rispetto all'inclusione. La proprieta' 5) ci dice infine che se S in partenza e' gia' un sottospazio, la formazione del sottospazio generato da S non contiene nulla di nuovo rispetto a quello che gia' c'e' in S. La proprieta' 1) e' per definizione.

2) Sia $\mathbf{s} \in S$ un elemento di S. Poiche' $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{s}$, allora possiamo dire che $\mathbf{s}$ e' combinazione lineare di elementi di S. Percio' $\mathbf{s} \in \text{Span}(S)$ e dunque $S \subseteq \text{Span}(S)$.

3) Sia $\mathbf{s}$ un elemento di S. Allora $\mathbf{0} = 0\mathbf{s}$ e' una combinazione lineare di elementi di S, e percio' $\mathbf{0} \in \text{Span}(S)$. Siano ora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ elementi di Span(S). Secondo opportuni elementi $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_h, \mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_k$ di S ed opportuni scalari $a_1, a_2, \dots, a_h, a'_1, a'_2, \dots, a'_k$, avremo $\mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h$ e $\mathbf{v} = a'_1\mathbf{s}'_1 + a'_2\mathbf{s}'_2 + \cdots + a'_k\mathbf{s}'_k$. Quindi

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h + a'_1\mathbf{s}'_1 + a'_2\mathbf{s}'_2 + \cdots + a'_k\mathbf{s}'_k$$

rimane una combinazione lineare di vettori di S e percio' $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$. Cio' prova che $\mathrm{Span}(S)$ e' stabile rispetto all'addizione. Similmente, tenuto conto della distributivita', per ogni scalare a abbiamo:

$$a\mathbf{u} = a(a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h) = aa_1\mathbf{s}_1 + aa_2\mathbf{s}_2 + \cdots + aa_h\mathbf{s}_h \in \mathrm{Span}(S).$$

4) Supponiamo che $S \subseteq T$. Allora ogni vettore che sia una combinazione lineare di vettori di S puo' essere interpretato anche come una combinazione lineare di vettori di T. Questo vuol dire proprio che $\mathrm{Span}(S) \subseteq \mathrm{Span}(T)$.

5) Supponiamo che S sia un sottospazio di V, e sia $\mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h$ un vettore di $\mathrm{Span}(S)$. Poiche' S e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, allora i vettori $a_1\mathbf{s}_1, a_2\mathbf{s}_2, \ldots, a_h\mathbf{s}_h$ appartengono ad S. E poiche' S e' stabile anche rispetto all'addizione, allora anche la loro somma sta in S, cioe' $\mathbf{u}$ deve stare in S. Cio' prova che $\mathrm{Span}(S)$ e' contenuto in S. Gia' sappiamo che S e' sempre contenuto in $\mathrm{Span}(S)$, percio' resta provato che $S = \mathrm{Span}(S)$. Viceversa, se $S = \mathrm{Span}(S)$ allora e' ovvio che S e' un sottospazio, perche' lo e' $\mathrm{Span}(S)$.

6) Supponiamo che S sia un sottoinsieme di V contenuto nel sottospazio W, cioe' $S \subseteq W$. Per la proprieta' 4) allora sappiamo che $\mathrm{Span}(S) \subseteq \mathrm{Span}(W)$. Ma W e' un sottospazio, e abbiamo appena provato che in tal caso $W = \mathrm{Span}(W)$. Percio' $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$. ■

Esercizio. Dire se e' vero oppure no che in $\mathbf{R}^3$ *vale la seguente uguaglianza:*

$$\mathit{Span}((1,2,3),(-1,4,2)) = \mathit{Span}((0,6,5),(2,-2,1)).$$

Svolgimento. Poiche'

$$(0,6,5) = (1,2,3) + (-1,4,2) \quad \text{e} \quad (2,-2,1) = (1,2,3) - (-1,4,2)$$

allora

$$(0,6,5),(2,-2,1) \in \mathrm{Span}((1,2,3),(-1,4,2)).$$

Dalla proprieta' di giustificazione deduciamo

$$\mathrm{Span}((0,6,5),(2,-2,1)) \subseteq \mathrm{Span}((1,2,3),(-1,4,2)).$$

Un calcolo prova che anche i vettori $(1,2,3)$ e $(-1,4,2)$ sono combinazione lineare dei vettori $(0,6,5),(2,-2,1)$. Percio' vale anche l'altra inclusione. E la risposta e' si'. ■

• *Definizione di sistema di generatori e di spazio vettoriale finitamente generabile.*

1) *Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V tale che $V = \mathit{Span}(S)$. Allora diremo che S e' un sistema di generatori per V, e che V e' generato da S.*

2) *Uno spazio vettoriale V dicesi finitamente generabile se esiste un sistema S di generatori per V contenente un numero finito di vettori, cioe' V e' del tipo*

$$V = \mathit{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h\}).$$

Ora andremo a fare degli esempi di sistemi di generatori. Diciamo subito pero' che, come vedremo in seguito, tutti gli esempi di spazi che studieremo, a parte lo spazio dei polinomi, sono finitamente generabili. Il fatto che uno spazio vettoriale V sia finitamente generabile significa, in linea di principio, che i calcoli in V si possono ridurre ad un numero finito di passi, in particolare sono eseguibili tramite un computer.

Esempi di sistemi di generatori.

1) Lo spazio nullo $V = \{\mathbf{0}\}$ e' finitamente generato, perche' $V = \{\mathbf{0}\} = \mathrm{Span}(\emptyset)$.

2) Poiche' $V = \mathrm{Span}(V)$, allora V e' sempre un sistema di generatori per V, in generale e' un sistema di generatori infinito.

3) Supponiamo che $V = \mathbf{R}$. Per ogni vettore $\mathbf{u} = x \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere $\mathbf{u} = x = x \cdot 1$. Questo significa che $\mathbf{R} = \mathrm{Span}(\{1\})$. Quindi $\mathbf{R}$ e' finitamente generabile dal vettore $\mathbf{e} := 1$. E' chiaro che ogni altro vettore non nullo genera tutto $\mathbf{R}$.

4) Sia $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ un qualunque vettore di $\mathbf{R}^2$. Osserviamo che:

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1).$$

Cio' significa che ogni vettore di $\mathbf{R}^2$ e' combinazione lineare dei vettori $(1, 0)$, $(0, 1)$, con pesi dati proprio dalle componenti di $\mathbf{u}$. In particolare

$$\mathbf{R}^2 = \mathrm{Span}(\{(1, 0), (0, 1)\}).$$

Quindi $\mathbf{R}^2$ e' finitamente generabile, un sistema di generatori essendo $\mathbf{e}_1 := (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 := (0, 1)$. Tali vettori sono detti *i vettori canonici di* $\mathbf{R}^2$. Il termine canonico, che significa "naturale", si riferisce al fatto che le componenti di tali vettori sono formate solo da 1 e 0, i numeri piu' semplici.

5) E' chiaro che l'esempio precedente si puo' generalizzare allo spazio $\mathbf{R}^n$. Infatti, denotati con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ i vettori canonici di $\mathbf{R}^n$, ogni vettore di $\mathbf{R}^n$ e' combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ con pesi dati dalle proprie componenti:

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Il vettore canonico $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, di $\mathbf{R}^n$ e' quel vettore che ha tutte le componenti nulle tranne quella di posto i, che e' uguale ad 1. Per esempio, in $\mathbf{R}^3$, i vettori canonici sono $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Percio':

$$\mathbf{R}^3 = \mathrm{Span}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}).$$

In generale abbiamo:

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{Span}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

Quindi $\mathbf{R}^n$ e' finitamente generabile dal sistema formato dai vettori canonici

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

di $\mathbf{R}^n$.

6) Anche lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m,n)$ possiede un sistema finito di generatori canonici. Infatti per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ sia E_{ij} la matrice che ha le componenti tutte nulle, tranne quella di posto i, j, che e' uguale ad 1. Per esempio, in $\mathcal{M}(2,3)$ abbiamo 6 matrici canoniche, e cioe':

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ed ogni matrice A di $\mathcal{M}(2,3)$ si puo' scrivere:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$\mathcal{M}(2,3) =$$

$$\text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Piu' in generale abbiamo:

$$\mathcal{M}(m,n) = \text{Span}(\{E_{ij} : \quad i = 1, \dots, m, \, j = 1, \dots, n\}).$$

7) Un esempio di spazio che non e' finitamente generabile e' lo spazio dei polinomi $\mathbf{R}[t]$. Infatti, siano $p_1(t), \dots, p_r(t)$ un numero finito di polinomi qualsiasi, e sia m il massimo dei gradi dei polinomi $p_1(t), \dots, p_r(t)$. Allora il polinomio t^{m+1} non puo' essere combinazione lineare di $p_1(t), \dots, p_r(t)$, perche' una combinazione lineare non puo' aumentare il massimo grado dei polinomi $p_1(t), \dots, p_r(t)$. Questo argomento prova che per ogni sistema finito di vettori $p_1(t), \dots, p_r(t)$ si ha

$$\mathbf{R}[t] \neq \text{Span}(\{p_1(t), \dots, p_r(t)\}).$$

Quindi $\mathbf{R}[t]$ non e' finitamente generabile. Osserviamo pero' che, per ogni $h \geq 1$, il sottospazio troncato $\mathbf{R}[t]_{\leq h}$ e' finitamente generabile. Infatti ogni polinomio $p(t)$ di grado $\leq h$ si scrive nella forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_h t^h$$

(eventualmente $a_h = 0$), e percio'

$$\mathbf{R}[t]_{\leq h} = \text{Span}(\{1, t, t^2, \dots, t^h\}).$$

I monomi $1, t, t^2, \dots, t^h, t^{h+1} \dots$ si chiamano anche i polinomi canonici di $\mathbf{R}[t]$. Essi formano un sistema infinito di generatori perche' evidentemente si ha:

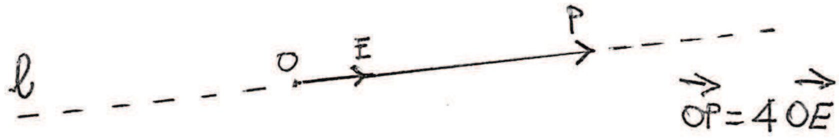
$$\mathbf{R}[t] = \mathrm{Span}(\{1, t, t^2, \dots, t^h, t^{h+1} \dots\}).$$

8) Ora vediamo qualche esempio con i vettori geometrici. Fissiamo un punto di applicazione O, e sia l una retta per O, e sia $\mathcal{V}_{O,l}$ lo spazio dei vettori applicati in O e giacenti su l. Sia $E \in l$ un punto diverso da O. Allora ogni vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_{O,l}$ lo possiamo scrivere come

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OE},$$

dove x e' il rapporto (relativo) tra la lunghezza di $\overrightarrow{OP}$ e quella di $\overrightarrow{OE}$. In particolare, se $\overrightarrow{OE}$ ha lunghezza 1, allora x e' proprio la lunghezza di $\overrightarrow{OP}$, presa con il segno + o − a seconda che $\overrightarrow{OP}$ sia concorde o no con $\overrightarrow{OE}$. Percio'

$$\mathcal{V}_{O,l} = \mathrm{Span}\left(\left\{\overrightarrow{OE}\right\}\right).$$



9) Fissiamo ora un piano ρ per O, e consideriamo lo spazio $\mathcal{V}_{O,\rho}$ dei vettori applicati in O e giacenti su ρ. Nel piano fissiamo due punti E_1, E_2 in modo tale che O, E_1, E_2 non siano allineati. Allora

$$\mathcal{V}_{O,\rho} = \mathrm{Span}\left(\left\{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\right\}\right).$$

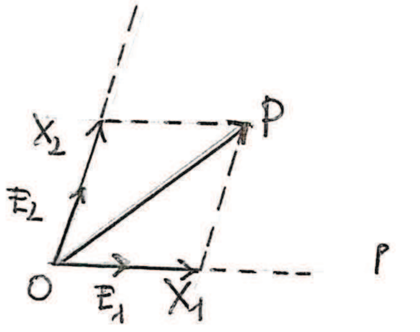
Infatti sia $\overrightarrow{OP}$ un qualunque vettore in $\mathcal{V}_{O,\rho}$. Partendo da P tracciamo la retta parallela ad $\overrightarrow{OE_2}$, e la retta parallela ad $\overrightarrow{OE_1}$. La prima retta interseca la retta (individuata da) $\overrightarrow{OE_1}$ in un certo punto X_1, mentre la seconda retta interseca la retta $\overrightarrow{OE_2}$ in un certo punto X_2 (tali punti sono detti le *proiezioni di P su $\overrightarrow{OE_1}$ ed $\overrightarrow{OE_2}$ secondo la direzione di $\overrightarrow{OE_2}$ e di $\overrightarrow{OE_1}$*). Per la regola del parallelogramma si ha:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2}.$$

D'altra parte, poiche' $\overrightarrow{OX_1}$ giace sulla retta $\overrightarrow{OE_1}$, per quanto visto in precedenza, deve essere un multiplo di $\overrightarrow{OE_1}$, cioe' deve essere del tipo $\overrightarrow{OX_1} = x_1\overrightarrow{OE_1}$, per un opportuno $x_1 \in \mathbf{R}$. Similmente si avra' $\overrightarrow{OX_2} = x_2\overrightarrow{OE_2}$, con $x_2 \in \mathbf{R}$. Percio'

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2}.$$

Cio' prova che $\mathcal{V}_{O,\rho} = \text{Span}\Big(\Big\{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\Big\}\Big)$. Osserviamo che se $\overrightarrow{OE_1}$ ed $\overrightarrow{OE_2}$ sono ortogonali e di lunghezza 1, allora gli scalari x_1 ed x_2 rappresentano le lunghezze (relative) della proiezione ortogonale di $\overrightarrow{OP}$ su $\overrightarrow{OE_1}$ e di $\overrightarrow{OP}$ su $\overrightarrow{OE_2}$.



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2}$$

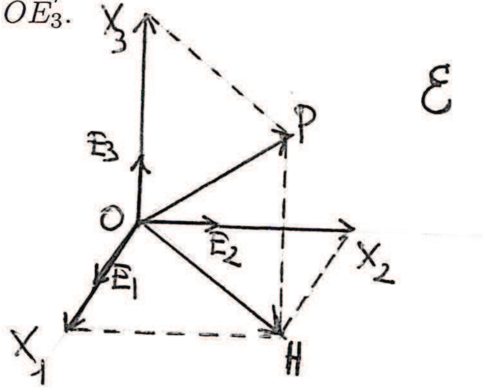
10) Siano ora E_1, E_2 ed E_3 tre punti nello spazio che ci circonda, in modo tale che i punti O, E_1, E_2, E_3 non siano complanari. Con un argomento grafico simile al precedente possiamo provare che

$$\mathcal{V}_O = \text{Span}\Big(\Big\{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}\Big\}\Big).$$

A tale proposito, per semplicita' (ma non e' necessario) supponiamo che $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$ siano di lunghezza 1, a due a due ortogonali fra di loro. Sia $\overrightarrow{OP}$ un qualunque vettore geometrico. La retta passante per P ed ortogonale al piano individuato dai punti O, E_1, E_2 interseca tale piano in un certo punto H (detto *la proiezione ortogonale di P su tale piano*). Poi sia X_3 il punto della retta (individuata da) $\overrightarrow{OE_3}$ tale che la retta $\overrightarrow{PX_3}$ sia ortogonale alla retta $\overrightarrow{OE_3}$ (tale punto e' detto *la proiezione ortogonale di P sulla retta individuata da $\overrightarrow{OE_3}$*). Per la regola del parallelogramma avremo:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OX_3}.$$

D'altra parte, poiche' $\overrightarrow{OH}$ sta nel piano individuato dai punti O, E_1, E_2, e poiche' $\overrightarrow{OX_3}$ sta sulla retta $\overrightarrow{OE_3}$, per quanto detto in precedenza potremo scrivere $\overrightarrow{OH} = x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2}$ e $\overrightarrow{OX_3} = x_3\overrightarrow{OE_3}$, dove x_1, x_2, x_3 sono le lunghezze (relative) delle proiezioni ortogonali di $\overrightarrow{OP}$ sugli assi $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$.



Mettendo insieme abbiamo:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OX_3} = x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2} + x_3\overrightarrow{OE_3}.$$

Esercizio. Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ formato da quei vettori numerici (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$. Provare che W e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, che e' finitamente generabile, e trovarne un sistema finito di generatori.

Svolgimento. Sia $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ un qualunque vettore di $\mathbf{R}^3$. Allora $\mathbf{u}$ sta in W se e solo se $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$, cioe' se e solo se $x_1 = 3x_2 - 5x_3$. Percio' se $\mathbf{u}$ sta in W allora $\mathbf{u}$ si puo' mettere nella forma $\mathbf{u} = (3x_2 - 5x_3, x_2, x_3)$, con opportuni $x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Allora possiamo scrivere

$$\mathbf{u} = (3x_2 - 5x_3, x_2, x_3) = (3x_2, x_2, 0) + (-5x_3, 0, x_3) = x_2(3, 1, 0) + x_3(-5, 0, 1).$$

Cioe' tutti e soli i vettori $\mathbf{u}$ di W sono del tipo

$$\mathbf{u} = x_2(3, 1, 0) + x_3(-5, 0, 1), \quad x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

Cio' vuol dire che

$$W = \mathrm{Span}(\{(3, 1, 0), (-5, 0, 1)\}).$$

Cio' prova quanto volevamo, che W e' un sottospazio, finitamente generato dal sistema di vettori $(3, 1, 0), (-5, 0, 1)$. ■

7. Sistemi di vettori linearmente indipendenti.

Il seguente esempio ci introduce all'argomento che andremo a studiare in questo paragrafo. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)$. Se $\mathbf{u} \in W$, allora possiamo scrivere $\mathbf{u} = a(1, 1, 2) + b(0, 2, 3) + c(1, 3, 5)$. D'altra parte, poiche' $(1, 3, 5) = (1, 1, 2) + (0, 2, 3)$ allora

$$\mathbf{u} = a(1, 1, 2) + b(0, 2, 3) + c(1, 3, 5) = a(1, 1, 2) + b(0, 2, 3) + c((1, 1, 2) + (0, 2, 3))$$

$$= (a + c)(1, 1, 2) + (b + c)(0, 2, 3).$$

Percio' possiamo generare W anche senza considerare il vettore $(1, 3, 5)$:

$$W = \mathrm{Span}(\{(1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)\}) = \mathrm{Span}(\{(1, 1, 2), (0, 2, 3)\}).$$

Come diremo in seguito, il vettore $(1, 3, 5)$ e' *sovrabbondante* rispetto al sistema di generatori $\{(1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)\}$. La possibilita' di scartare vettori sovrabbondanti in un dato sistema di generatori rende piu' semplice lo studio di W. Nel nostro esempio, se occorre inserire in un computer i dati che identificano W, inseriremo due vettori invece di tre, risparmiando tempo e memoria. Allo scopo di chiarire quanto detto in precedenza, conviene premettere alcune definizioni.

• *La definizione di sistema di vettori linearmente indipendente e di sistema di vettori linearmente dipendente.*

1) *Fissiamo uno spazio vettoriale V, ed un sistema di vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ di V. Diremo che una $h-$pla di scalari $(a_1, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^h$ e' una relazione per il sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ se*

la combinazione lineare di tali vettori con pesi dati da $(a_1, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^h$ *e' nulla, cioe' se:*

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

Evidentemente $(0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^h$ *e' una relazione tra* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$*, che viene detta la relazione banale.*

2) *Un sistema di vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *si dice linearmente indipendente, o anche libero, se l'unica relazione per* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *e' quella banale. Cio' equivale a dire che gli unici pesi* $(a_1, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^h$ *per cui* $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$*, sono quelli nulli* $a_1 = \cdots = a_h = 0$.

3) *Un sistema di vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *si dice linearmente dipendente, o anche legato, se non e' libero, cioe' se il sistema ammette una relazione non banale. Cioe' se esistono pesi non tutti nulli* $(a_1, \dots, a_h) \neq \mathbf{0} \in \mathbf{R}^h$ *tali che* $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$.

Prima di studiare le proprieta' generali dei sistemi liberi, e di introdurre la nozione di vettore sovrabbondante, andiamo a vedere degli esempi.

Esempi.

1) Il sistema di vettori considerato nell'esempio iniziale $(1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)$, e' un sistema legato. Infatti:

$$(1, 1, 2) + (0, 2, 3) - (1, 3, 5) = (0, 0, 0),$$

e quindi $(1, 1, -1)$ e' una relazione non banale per i vettori $(1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)$.

2) Anche il sistema $(1, 0), (2, 0), (0, 1)$ di vettori di $\mathbf{R}^2$ e' legato. Infatti:

$$(1, 0) - \frac{1}{2}(2, 0) + 0(0, 1) = (0, 0),$$

e quindi $(1, -\frac{1}{2}, 0)$ e' una relazione non banale per il sistema di vettori $(1, 0), (2, 0), (0, 1)$.

3) Il sistema vuoto, quello cioe' privo di elementi, viene considerato un sistema libero.

4) Consideriamo un sistema formato da un solo vettore $\{\mathbf{u}\}$. Se tale sistema e' legato allora ammette una relazione non banale, cioe' esiste un peso $a \neq 0$ tale che $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Per la legge di annullamento del prodotto allora deve essere $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Viceversa, se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, e' evidente che il sistema $\{\mathbf{u}\}$ e' legato in quanto $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e' una relazione non banale per il sistema $\{\mathbf{0}\}$. In conclusione, abbiamo provato che un sistema costituito da un solo vettore $\mathbf{u}$ e' legato se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Il che equivale a dire che un sistema costituito da un solo vettore $\mathbf{u}$ e' libero se e solo se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

5) Andiamo a provare che un sistema costituito da due vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ e' legato se e solo se almeno uno di tali vettori e' multiplo dell'altro. Infatti supponiamo innanzitutto che il sistema sia legato. Allora esiste una relazione non banale

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Per fissare le idee supponiamo $a \neq 0$. Per la proprieta' di calcolo 7) sappiamo che

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{b}{a}\right)\mathbf{v}.$$

Il che prova che $\mathbf{u}$ e' un multiplo di $\mathbf{v}$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{u}$ sia un multiplo di $\mathbf{v}$, quindi che esista un opportuno scalare c tale che

$$\mathbf{u} = c\mathbf{v}.$$

Allora

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} - c\mathbf{v}.$$

Quindi $\mathbf{u} - c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, da cui si evince che $(1, -c)$ e' una relazione non banale per il sistema $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

6) Consideriamo il sistema $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ dei vettori canonici di $\mathbf{R}^2$. Andiamo a provare che e' un sistema libero. Infatti se (a_1, a_2) e' una relazione abbiamo

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

cioe'

$$a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0, 0).$$

D'altra parte, poiche' $a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (a_1, a_2)$, deduciamo

$$(a_1, a_2) = (0, 0),$$

cioe' la relazione e' necessariamente banale.

7) Con un argomento simile al precedente si prova che i sistemi formati dai vettori canonici in $\mathbf{R}^n$, in $\mathcal{M}(m, n)$, ed in $\mathbf{R}[t]$, sono tutti linearmente indipendenti.

8) Siano $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ due vettori geometrici in $\mathcal{V}_O$. Allora tali vettori sono legati se e solo se i punti O, P, Q sono allineati. Cio' segue dal fatto, che abbiamo provato prima, che un sistema formato da due vettori e' legato se e solo se almeno uno dei due vettori e' multiplo dell'altro. Questa condizione vuol dire proprio che i punti O, P, Q sono allineati. Percio' possiamo dire anche che due vettori geometrici $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ sono liberi se e solo se O, P, Q non stanno sulla stessa retta. Cio' fornisce una interpretazione geometrica della condizione "libero" e "legato" per un sistema di due vettori geometrici. Esiste una interpretazione geometrica anche per un sistema formato da tre vettori geometrici. Infatti un sistema formato da tre vettori geometrici $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ e' legato se e solo se i punti O, P, Q, R sono complanari. Rimandiamo a dopo la dimostrazione, che e' una semplice conseguenza delle proprieta' generali che studieremo tra poco.

9) Sia $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ un sistema di vettori a cui appartiene il vettore nullo. Allora tale sitema e' legato. Infatti, per semplicita' supponiamo che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Allora una relazione non banale e' la seguente:

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

10) Supponiamo che nel sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ ci siano due vettori uguali. Allora il sistema e' legato. Infatti, per semplicita' supponiamo che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Allora una relazione non banale e' la seguente:

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 + (-1) \cdot \mathbf{u}_2 + 0 \cdot \mathbf{u}_3 \cdots + 0 \cdot \mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

11) Supponiamo che nel sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ ci sia un vettore che' e' combinazione lineare degli altri. Allora il sistema e' legato. Facciamo un esempio, per esempio consideriamo il sistema $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, 2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$. Allora una relazione non banale e' $(-2, 5, 1)$. Infatti:

$$(-2) \cdot \mathbf{u}_1 + 5 \cdot \mathbf{u}_2 + 1 \cdot (2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}.$$

Siamo pronti per studiare le proprieta' generali dei sistemi linearmente indipendenti e dei sistemi linearmente dipendenti.

- *Proprieta' dei sistemi liberi e dei sistemi legati.*

1) *Il sistema vuoto e' linearmente indipendente.*

2) *Un sistema formato da un solo vettore* $\mathbf{u}$ *e' libero se e solo se* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

3) *Un sistema costituito da due vettori e' legato se e solo se almeno uno dei vettori e' multiplo dell'altro.*

4) *Il sistema di vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *e' linearmente dipendente se e solo se tra i vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *c'e' un vettore* $\mathbf{u}_i$ *che dipende linearmente dai rimanenti vettori*

$$\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$$

(l'accento su $\mathbf{u}_i$ *sta a significare che* $\mathbf{u}_i$ *non appartiene al sistema* $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$*, cioe' che e' stato tolto dal sistema* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *cui appartiene).*

5) *Sia* $\mathbf{u}_i$ *un vettore appartenente al sistema di vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$*. Allora* $\mathbf{u}_i$ *dipende linearmente dai rimanenti vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$ *se e solo se*

$$Span(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h) = Span(\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h).$$

Un tale vettore $\mathbf{u}_i$ *dicesi "sovrabbondante" rispetto al sistema di vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$*.*

6) *Sia* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *un sistema di vettori linearmente indipendente. Allora i vettori di tale sistema sono tutti non nulli, sono tutti diversi tra di loro, e se* S *e' un sottoinsieme di* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$*, anche* S *e' libero.*

7) *Sia* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *un sistema di vettori linearmente indipendente. Sia* $\mathbf{u}$ *un vettore che dipende linearmente dai vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$*. Allora vi dipende in unico modo, cioe' se*

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_h\mathbf{u}_h = b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_h\mathbf{u}_h$$

allora $(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h)$*.*

8) *Sia* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ *(*$h \geq 2$*) un sistema di vettori legato, e supponiamo che i primi* $h-1$ *vettori* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1}$ *siano liberi. Allora* $\mathbf{u}_h$ *dipende linearmente da* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1}$*, e* $Span(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h) = Span(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1})$*.*

Dimostrazione. Le prime tre proprieta' le abbiamo gia' viste negli esempi.

Percio' cominciamo con il provare la proprieta' 4). Supponiamo che il sistema di vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ sia linearmente dipendente. Allora esistono pesi non tutti nulli $(a_1, a_2 \dots, a_h) \in \mathbf{R}^h$ tali che

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

Per semplificare le notazioni, supponiamo che $a_1 \neq 0$. Per l'esercizio che appare dopo la dimostrazione della proprieta' di calcolo 7), sappiamo che

$$\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\mathbf{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{a_h}{a_1}\right)\mathbf{u}_h.$$

Il che prova che $\mathbf{u}_1$ dipende linearmente dai rimanenti vettori $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$.

Viceversa, supponiamo che tra i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ ci sia un vettore $\mathbf{u}_i$ che dipende linearmente dai rimanenti vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$. Per semplicita' supponiamo che $i = 1$. Questo vuol dire che esistono opportuni pesi $(a_2, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^{h-1}$ tali che

$$\mathbf{u}_1 = a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h.$$

Deduciamo che:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h.$$

Cioe'

$$-\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

Quindi $(-1, a_2, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^h$ e' una relazione non banale per i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$. Cio' prova che il sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ e' legato, e la dimostrazione della proprieta' 4) e' completa.

5) Supponiamo che tra i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ ci sia un vettore $\mathbf{u}_i$ che dipende linearmente dai rimanenti vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$. Per semplicita' supponiamo che $i = 1$. Questo vuol dire che esistono opportuni pesi $(a_2, \dots, a_h) \in \mathbf{R}^{h-1}$ tali che

$$\mathbf{u}_1 = a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h.$$

Deduciamo che

$$\mathbf{u}_1 \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}).$$

Percio'

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\} \subseteq \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}).$$

Per la proprieta' di giustificazione ne consegue

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}) \subseteq \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}).$$

Cio' prova che

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\})$$

in quanto l'inclusione inversa, per la monotonia, e' sempre verificata.

Viceversa supponiamo che $\mathbf{u}_i$ sia un vettore del sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ tale che

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h\}).$$

Allora $\mathbf{u}_i \in \operatorname{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h\})$. Quindi $\mathbf{u}_i$ e' una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$. Cio' vuol dire proprio che $\mathbf{u}_i$ dipende linearmente dai rimanenti vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_i, \dots, \mathbf{u}_h$.

6) Sia S un sottoinsieme di $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$. Per semplicita' supponiamo che S sia formato dai primi k vettori $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ $(k \leq h)$. Sia $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$ una relazione per i vettori di S. Allora possiamo scrivere

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k + 0\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{u}_h.$$

Poiche' il sistema $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ e' libero allora $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Cioe' l'unica relazione per S e' quella banale.

7) Supponiamo che

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_h\mathbf{u}_h.$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} &= (a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h) - (b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_h\mathbf{u}_h)\\ &= (a_1 - b_1)\mathbf{u}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (a_h - b_h)\mathbf{u}_h.\end{aligned}$$

Per cui

$$(a_1 - b_1)\mathbf{u}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (a_h - b_h)\mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

Poiche' i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ sono liberi allora

$$(a_1 - b_1, \dots, a_h - b_h) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^h.$$

Cioe' $(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h)$.

8) Poiche' i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ sono legati, esiste una relazione non banale

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}.$$

Se a_h fosse nullo, allora ci sarebbe qualche $a_i \neq 0$ con $1 \leq i < h$, e la relazione precedente fornirebbe una relazione non banale

$$\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{h-1}\mathbf{u}_{h-1} + 0\mathbf{u}_h = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{h-1}\mathbf{u}_{h-1},$$

in contrasto con il fatto che i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1}$ sono liberi. Quindi $a_h \neq 0$. Ne consegue:

$$\mathbf{u}_h = \left(-\frac{a_1}{a_h}\right)\mathbf{u}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_{h-1}}{a_h}\right)\mathbf{u}_{h-1}.$$

Percio' $\mathbf{u}_h$ dipende linearmente da $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1}$, e

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h\}) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{h-1}\}). \quad \blacksquare$$

• *Osservazione.* Un criterio operativo per riconoscere un vettore sovrabbondante e' il seguente. Sia $\mathbf{u}_i$ un vettore del sistema di vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$. Allora: *$\mathbf{u}_i$ e' sovrabbondante rispetto al sistema $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$ se e solo se esistono pesi $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_h$ con $a_i \neq 0$ tali che $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_i\mathbf{u}_i + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Cioe' se e solo se esiste una relazione tra i vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$ che ha peso a_i relativo ad $\mathbf{u}_i$ non nullo (cioe' $a_i \neq 0$).*

Per provare cio', cominciamo con il supporre che il vettore $\mathbf{u}_i$ sia sovrabbondante, e per semplificare le notazioni supponiamo che $i = 1$. Abbiamo appena dimostrato che $\mathbf{u}_1$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$. Percio', secondo opportuni pesi $a_2, \ldots, a_h$ possiamo scrivere $\mathbf{u}_1 = a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h$, cioe'

$$\mathbf{0} = -\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h.$$

E questa e' una relazione tra i vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$ in cui $\mathbf{u}_1$ appare con peso diverso da 0 (in questo caso il peso e' -1).

Viceversa supponiamo che esista una relazione del tipo

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$$

con $a_1 \neq 0$. Allora possiamo scrivere anche

$$\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\mathbf{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{a_h}{a_1}\right)\mathbf{u}_h.$$

Quindi $\mathbf{u}_1$ dipende dai rimanenti vettori $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_h$, e sappiamo allora che e' sovrabbondante. Cio' conclude la dimostrazione del criterio.

Quindi in generale per trovare un vettore sovrabbondante ci calcoliamo le eventuali relazioni non banali tra i generatori assegnati. E' sovrabbondante quel vettore che appare con peso diverso da 0 nella relazione.

Esempio. Sia $W := \mathrm{Span}(\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\})$. Osserviamo che $(1,0,0) + (0,1,0) - (1,1,0) = \mathbf{0}$. Quindi la terna $(1,1,-1)$ e' una relazione non banale tra i tre generatori di W. E' sovrabbondante ogni vettore che appare con peso $\neq 0$. Quindi ciascuno dei tre vettori e' sovrabbondante, cioe' possiamo scrivere indifferentemente

$$W = \mathrm{Span}(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \mathrm{Span}(\{(1,0,0),(1,1,0)\}) = \mathrm{Span}(\{(0,1,0),(1,1,0)\}).$$

Esercizio. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$:

$$W = \mathit{Span}(\{(1,1,1,1),(1,1,1,2),(0,0,0,1),(3,3,3,4)\}).$$

Determinare un sistema di generatori per W che sia libero.

Svolgimento. L'idea e' molto semplice. Ci calcoliamo le relazioni tra i generatori assegnati di W. Se l'unica relazione e' quella banale, allora il sistema assegnato e' libero, e possiamo considerare questo come risposta. Se invece c'e' qualche relazione non banale, allora c'e' un vettore sovrabbondante, lo sappiamo individuare grazie al criterio precedente, lo togliamo, e ripartiamo con lo stesso procedimento applicato ai tre vettori rimanenti. Dopo un numero finito di scarti di vettori sovrabbondanti, arriveremo ad un sistema di generatori libero. Veniamo ai dettagli.

Una quadrupla (x, y, z, t) e' una relazione per il sistema assegnato se e solo se

$$x(1,1,1,1) + y(1,1,1,2) + z(0,0,0,1) + t(3,3,3,4) = (0,0,0,0).$$

Cioe' se e solo se

$$\begin{cases} x + y + 3t = 0 \\ x + 2y + z + 4t = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema lineare sono tutti e soli i vettori numerici della forma $(z - 2t, -z - t, z, t)$, al variare di $z, t \in \mathbf{R}$. In particolare $(-2, -1, 0, 1)$ e' una relazione non banale. I generatori assegnati sono legati, e $(3, 3, 3, 4)$ e' sovrabbondante. Quindi

$$W = \mathrm{Span}(\{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (0,0,0,1)\}).$$

Le relazioni tra questi tre generatori si ottengono dalle precedenti ponendo $t = 0$. Cioe' le relazioni tra questi tre vettori sono tutte e sole le terne della forma $(z, -z, z)$, $z \in \mathbf{R}$. Ne consegue che il sistema $\{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (0,0,0,1)\}$ e' legato, e che $(1,1,1,2)$ e' sovrabbondante. Quindi

$$W = \mathrm{Span}(\{(1,1,1,1), (0,0,0,1)\}).$$

Poiche' nessuno dei due generatori cosi' ottenuti e' multiplo dell'altro, essi sono liberi. E quindi possiamo dire che un sistema di generatori libero per W e' dato dai vettori $(1,1,1,1), (0,0,0,1)$. ■

Esercizio. Provare che un sistema formato da tre vettori geometrici $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ e' legato se e solo se i punti O, P, Q, R sono complanari.

Svolgimento. Se i tre vettori sono legati, allora uno di essi e' combinazione lineare degli altri due. Per fissare le idee supponiamo che:

$$\overrightarrow{OP} = a_1\overrightarrow{OQ} + a_2\overrightarrow{OR}.$$

Se O, Q, R sono allineati, allora e' chiaro che esiste un piano contenente O, P, Q, R. Altrimenti, per la regola del parallelogramma, il punto P sta nel piano individuato dal parallelogramma formato con O, Q, R.

Viceversa, supponiamo che i punti O, P, Q, R siano complanari. Se O, Q, R sono allineati allora il sistema $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ e' legato, e percio' lo sara' anche $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$. Se invece O, Q, R non sono allineati, abbiamo visto che $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ generano tutti i vettori del piano individuato dai punti O, Q, R. Quindi il vettore $\overrightarrow{OP}$, che giace in tale piano, e' una combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$. Percio' il sistema $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ e' legato. ■

8. Base e dimensione di uno spazio vettoriale.

• *La definizione di base.*

Sia V uno spazio vettoriale, e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ un sistema di vettori di V. Diremo che $\mathcal{B}$ e' una base di V se i vettori $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ generano V e sono linearmente indipendenti.

Osservazione. Si osservi che $\mathcal{B}$ e' una base per V se e solo se ogni vettore di V si puo' esprimere in unico modo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

Esempi.

1) Lo spazio nullo ammette come base il sistema vuoto.

2) Abbiamo visto che il sistema dei vettori canonici in $\mathbf{R}^n$ e' un sistema di generatori libero per $\mathbf{R}^n$. Percio' i vettori canonici formano una base, che diremo la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Lo stesso discorso vale per lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m,n)$, e per gli spazi troncati $\mathbf{R}[t]_{\leq h}$.

3) Si osservi che se uno spazio vettoriale ammette una base, allora tale spazio e' finitamente generabile. Percio' nello spazio dei polinomi, che non e' finitamente generabile, non esistono basi.

4) Sia l una retta passante per il punto di applicazione O, e sia E un punto di l diverso da O. Allora il vettore $\overrightarrow{OE}$ forma una base per $\mathcal{V}_{O,l}$. Questo esempio ci fa capire che in generale ci sono infinite basi di uno spazio vettoriale.

5) Sia ρ un piano passante per il punto di applicazione O. Siano P, Q punti del piano in modo tale che O, P, Q non siano allineati. Allora il sistema di vettori $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right\}$ e' una base per $\mathcal{V}_{O,\rho}$.

6) Siano O, P, Q, R punti non complanari nello spazio fisico $\mathcal{E}$ che ci circonda. Allora il sistema di vettori $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right\}$ e' una base per $\mathcal{V}_O$.

Esercizio. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$:

$$W = \mathit{Span}(\{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (0,0,0,1), (3,3,3,4)\}).$$

Determinare una base per W.

Svolgimento. E' una formulazione diversa dell'esercizio svolto in precedenza. Sappiamo gia' che $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (0,0,0,1)\}$ e' un sistema di generatori libero di W, percio' ne e' una base. ■

Ora andiamo a provare il seguente teorema, che ci dice che ogni spazio vettoriale finitamente generabile ammette almeno una base, e che, fatto notevole, tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale V devono avere lo stesso numero di vettori. Questo numero di vettori, che non dipende dalla base, sara' detto la dimensione di V.

• *Teorema. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile. Allora esiste almeno una base per V, e due basi di V hanno lo stesso numero di elementi.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$ un sistema di generatori finito di V. Se tale sistema e' anche libero, allora e' una base. Altrimenti e' legato, ci sara' un vettore sovrabbondante, diciamo $\mathbf{u}_h$ per fissare le idee. Ma allora V sara' generabile con i vettori $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{h-1}$. Se questo sistema e' libero, e' una base. Altrimenti e' legato, possiamo scartare un altro vettore sovrabbondante, e cosi' continuando, dopo un numero finito di passi, troveremo una base di V. Cio' prova l'esistenza di almeno una base.

Ora passiamo a provare che due basi di V devono avere lo stesso numero di vettori. Cio' e' una semplice conseguenza del seguente lemma, detto Lemma di Steinitz o anche Lemma sostitutivo, che andremo a provare subito dopo aver concluso la dimostrazione del Teorema.

• *Lemma di Steinitz (Lemma sostitutivo). Sia $V = Span(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r)$ uno spazio vettoriale generabile con r vettori. Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ s vettori linearmente indipendenti di V. Allora $s \leq r$.*

In altri termini, il Lemma di Steinitz (detto anche Lemma sostitutivo per un motivo che sara' chiarito in seguito) dice che in uno spazio vettoriale generabile con r vettori, non ci possono essere piu' di r vettori linearmente indipendenti. Questo lemma ci consente di provare facilmente che due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V devono avere lo stesso numero di elementi. Infatti, sia n il numero di elementi di $\mathcal{B}$, e sia n' quello di $\mathcal{B}'$. Poiche' $\mathcal{B}$ genera V e $\mathcal{B}'$ e' libero, allora per il Lemma di Steinitz deve essere $n' \leq n$. Similmente, poiche' $\mathcal{B}'$ genera V e $\mathcal{B}$ e' libero, per lo stesso motivo deve essere $n \leq n'$. Quindi $n = n'$. Cio' conclude la dimostrazione del Teorema. ■

Per completare la dimostrazione del Teorema, ci rimane da provare il Lemma di Steinitz.

Dimostrazione del Lemma di Steinitz. Per assurdo supponiamo $s > r$.

Consideriamo $\mathbf{w}_1$. Poiche' $V = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r)$ allora esistono opportuni pesi $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tali che

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r.$$

In questa formula deve esistere almeno un peso $a_i \neq 0$, altrimenti $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ e cio' non puo' essere perche' i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ sono indipendenti. Per semplicita' supponiamo $a_1 \neq 0$. Allora riscriviamo la formula precedente cosi'

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r - \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}.$$

Questa e' una relazione tra i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1$ in cui $\mathbf{u}_1$ appare con peso diverso da 0, quindi $\mathbf{u}_1$ e' sovrabbondante nel sistema formato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1$. Percio' abbiamo

$$\text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r) = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r).$$

Poiche'

$$V \supseteq \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r) \supseteq \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r) = V$$

allora abbiamo

$$V = \text{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r).$$

In altre parole l'argomento precedente ci dice che possiamo *sostituire* il vettore $\mathbf{u}_1$ con $\mathbf{w}_1$ nel sistema di generatori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ di V (percio' tale lemma si chiama anche *Lemma sostitutivo*).

Ora andiamo a considerare $\mathbf{w}_2$. Poiche' $V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ allora esistono opportuni pesi $a_1, a_2, \dots, a_r$ tali che

$$\mathbf{w}_2 = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r.$$

In questa formula deve esistere almeno un peso $a_i \neq 0$ con $i > 1$, altrimenti $\mathbf{w}_2 = a_1\mathbf{w}_1$ e cio' non puo' essere perche' i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s$ sono indipendenti. Per semplicita' supponiamo $a_2 \neq 0$. Allora riscriviamo la formula precedente cosi'

$$a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}.$$

Questa e' una relazione tra i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_2$ in cui $\mathbf{u}_2$ appare con peso diverso da 0, quindi $\mathbf{u}_2$ e' sovrabbondante nel sistema formato dai vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$. E ragionando come prima abbiamo

$$V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_r).$$

Cosi' continuando arriveremo a provare che

$$V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r),$$

cioe' potremo sostituire tutti i generatori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ con $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, , \dots, \mathbf{w}_r$. Per ipotesi di assurdo sappiamo che $s > r$ quindi esiste anche $\mathbf{w}_{r+1}$ e per tale vettore deve essere

$$\mathbf{w}_{r+1} \in V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r).$$

Questo comporta che il sistema $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s$ ha un vettore sovrabbondante, cioe' e' legato. Cio' contraddice l'ipotesi che $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s$ e' linearmente indipendente. Siamo pervenuti ad un assurdo, che dipende dall'aver supposto che $s > r$. Allora deve essere necessariamente $s \leq r$. Cio' conclude la dimostrazione del Lemma di Steinitz. ■

• *La definizione di dimensione.*

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile, e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Si definisce dimensione di V, e si scrive $\dim(V)$, *il numero di vettori presenti in $\mathcal{B}$. Tale numero non dipende dalla base scelta $\mathcal{B}$.*

Esempi.

1) Lo spazio nullo ha dimensione 0. E viceversa, se V ha dimensione 0, allora V e' lo spazio nullo.

2) Abbiamo visto che i generatori canonici formano una base. Percio' $\dim(\mathbf{R}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}(m,n)) = m \cdot n$, $\dim(\mathbf{R}[t]_{\leq h}) = h + 1$.

3) Per ogni retta l per il punto di applicazione O, si ha $\dim(\mathcal{V}_{O,l}) = 1$.

4) Per ogni piano ρ per il punto di applicazione O, si ha $\dim(\mathcal{V}_{O,\rho}) = 2$.

5) Per ogni punto di applicazione O, si ha $\dim(\mathcal{V}_O) = 3$.

6) Per lo spazio dell'esercizio precedente si ha:

$$\dim\left(\mathrm{Span}(\{(1,1,1,1),(1,1,1,2),(0,0,0,1),(3,3,3,4)\})\right) = 2.$$

Passiamo ora alle proprieta' della dimensione e delle basi. Nel seguito si intende fissato un dato spazio vettoriale V finitamente generabile. Quasi tutte queste proprieta' sono conseguenza del Lemma di Steinitz.

• *Proprieta' della dimensione e delle basi.*

1) $\dim(V) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V = \{\mathbf{0}\}$.

2) $\dim(V) = 1$ *se e solo se esiste un vettore non nullo* $\mathbf{u} \in V$ *tale che*

$$V = \{a\mathbf{u} : \quad a \in \mathbf{R}\}.$$

3) *Se* $\dim(V) = n$ *e* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *e' un sistema libero di vettori di* V *costituito da* n *vettori, allora* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *e' una base di* V.

4) *Se* $\dim(V) = n$ *e* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *e' un sistema di generatori di* V *costituito da* n *vettori, allora* $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *e' una base di* V.

5) *Sono equivalenti le seguenti proprieta':*

(i) $\dim(V) = n$.

(ii) n *e' il massimo numero di vettori per un sistema linearmente indipendente di* V.

(iii) n *e' il minimo numero di vettori per un sistema di generatori di* V.

6) *Da ogni sistema di generatori di* V *si puo' "estrarre" una base. Cioe' se* $\mathcal{S}$ *e' un sistema di generatori di* V*, allora esiste un sistema di vettori* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ *contenuto in* $\mathcal{S}$ *che e' una base di* V.

7) *Ogni sistema libero di vettori di* V *si puo' "estendere" a base di* V*. Cioe', se* $\dim(V) = n$*, e se* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}$ *e' un sistema libero di vettori di* V*, allora esistono opportuni* $n-h$ *vettori* $\{\mathbf{u}_{h+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *di* V *tali che il sistema* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *sia una base di* V.

8) *Se* W *e' un sottospazio di* V*, allora anche* W *e' finitamente generabile,* $\dim(W) \leq \dim(V)$*, e vale l'uguaglianza* $\dim(W) = \dim(V)$ *se e solo se* $W = V$.

Dimostrazione.

3) Sia $\mathbf{u}$ un vettore di V. Poiche' $\dim(V) = n$ allora il sistema $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{u}\}$ deve essere legato per il Lemma di Steinitz. Poiche' $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ e' libero, siamo nelle condizioni di poter applicare la proprieta' 8) dei sistemi liberi, che ci garantisce che $\mathbf{u}$ e' sovrabbondante, cioe' che $\mathbf{u}$ e' combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Quindi il sistema $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ genera V. Essendo anche libero, e' una base di V.

4) Se il sistema $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ non fosse libero, potremmo fare uno scarto, e generare V con meno di n vettori. E dopo altri eventuali scarti, otterremmo una base di V con meno di n vettori. Cio' e' in contrasto con l'ipotesi $\dim(V) = n$.

5) (i) $\Longrightarrow$ (ii). Se $\dim(V) = n$ allora, per il Lemma di Steinitz, e' chiaro che n e' il massimo numero di vettori per un sistema linearmente indipendente di V.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supponiamo che n sia il massimo numero di vettori per un sistema linearmente indipendente di V. Poiche' n e' il massimo, ci deve essere un sistema libero con n vettori, diciamo $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Tale sistema deve generare V. Infatti se $\mathbf{u} \in V$, allora $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{u}\}$ e' legato, e quindi per la proprieta' 8) dei sistemi liberi, $\mathbf{u}$ dipende linearmente da $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Cio' prova che in V c'e' un sistema di generatori con n elementi. Inoltre se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}$ e' un sistema di generatori di V, allora $h \geq n$ per il Lemma di Steinitz.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Sia $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ un sistema di generatori per V con il minimo numero n di generatori. Tale sistema deve essere libero, altrimenti con uno scarto potremmo generare V con meno di n vettori. Quindi $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ e' una base, e percio' $\dim(V) = n$.

6) Lo abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema.

7) Supponiamo che $\dim(V) = n$, e che $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}$ sia un sistema libero di vettori di V con h vettori. Se $V = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\})$ allora $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h$ e' una base di V e non dobbiamo aggiungere niente. Altrimenti $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}) \subsetneq V$. Sia allora $\mathbf{u}_{h+1}$ un vettore di V che non sta in $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\})$. Per la proprieta' 8) dei sistemi liberi, il sistema $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}\}$ deve essere libero. A questo punto si ricomincia come prima. Cioe' se $V = \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}\})$ allora $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}$ e' una base, e abbiamo concluso. Altrimenti $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}\}) \subsetneq V$, potremo pescare un vettore $\mathbf{u}_{h+2}$ di V che non sta in $\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}\})$, ed il sistema $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}, \mathbf{u}_{h+2}$ e' libero. Dopo $n - h$ passi troveremo una base di V che estende il sistema libero $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h\}$ di partenza.

8) Sia W un sottospazio di V. Sia $\mathbf{w}_1$ un vettore non nullo di W. Se $W = \mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1\})$, allora W e' finitamente generabile. Altrimenti esiste un vettore $\mathbf{w}_2 \in W \backslash \mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1\})$. Per la proprieta' 8) dei sistemi liberi, i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ sono liberi, naturalmente sia in W che in V. Se $W = \mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\})$, allora W e' finitamente generabile. Altrimenti esiste un vettore $\mathbf{w}_3 \in W \backslash \mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\})$, ed il sistema $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ e' libero, sia in W che in V. Cosi' continuando, non potendo trovare piu' di $\dim(V)$ vettori liberi, dopo un numero finito di passi troveremo un numero finito di vettori di W che generano W. Cio' prova che i sottospazi di uno spazio finitamente generabile sono finitamente generabili. E' chiaro che $\dim(W) \leq \dim(V)$ perche', come gia' osservato, i vettori liberi di W lo sono anche per V. Infine, se $\dim(W) = \dim(V)$, allora in W c'e' un sistema di vettori libero con $\dim(V)$ vettori. Abbiamo appena visto che tale sistema deve generare tutto V, e percio' $V = W$. ■

Esercizio. Provare che i vettori $(1, 5)$, $(1, 4)$ *formano una base di* $\mathbf{R}^2$.

Svolgimento. Poiche' $\dim(\mathbf{R}^2) = 2$ sara' sufficiente provare che i due vettori dati sono liberi. Ma cio' e' evidente perche' nessuno dei due e' multiplo dell'altro. Possiamo anche provare direttamente che i due vettori generano $\mathbf{R}^2$. Si tratta di provare quanto segue. Dato un qualunque vettore $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, provare che esistono pesi x ed y tali che

$$(a, b) = x(1, 5) + y(1, 4).$$

Tali pesi devono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} x + y = a \\ 5x + 4y = b. \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni ammette l'unica soluzione

$$(x, y) = (-4a + b, 5a - b). \quad \blacksquare$$

9. Unione ed intersezione di sottospazi.

Un procedimento tipico in matematica consiste nel costruire, in una data famiglia di oggetti, nuovi oggetti a partire da oggetti assegnati. Per esempio, assegnati due sottospazi U e W di un dato spazio vettoriale V, possiamo formare l'intersezione $U \cap W$ e l'unione $U \cup W$. Mentre e' ovvio che $U \cap W$ e' ancora un sottospazio, in generale non e' detto che lo sia l'unione $U \cup W$. Si pone rimedio a questo inconveniente considerando il sottospazio generato dall'unione. Tale sottospazio si chiama la somma di U con W e si denota col simbolo $U + W$. Quindi:

$$U + W := \text{Span}(U \cup W).$$

• *Proprieta' della somma e dell'intersezione.*

1) $U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \quad \mathbf{u} \in U, \, \mathbf{w} \in W\}$.

2) $U = Span(\mathcal{S}), \quad W = Span(\mathcal{T}) \implies U + W = Span(\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$.

3) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ *(la formula di Grassmann).*

Dimostrazione. 1) La prima proprieta' fornisce una semplice descrizione dei vettori di $U + W$, e cioe' che i vettori di $U + W$ sono somma di un vettore di U e di uno di W. Per provare cio', cominciamo con l'osservare che poiche' $U + W = \text{Span}(U \cup W)$ allora e' ovvio che

$$\{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \quad \mathbf{u} \in U, \, \mathbf{w} \in W\} \subseteq U + W.$$

Percio' occorre solo provare l'inclusione opposta. Sia allora $\mathbf{v}$ un vettore in $U + W = \text{Span}(U \cup W)$. Allora $\mathbf{v}$ e' una combinazione lineare di vettori di $U \cup W$. Quindi esistono opportuni vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ di U, opportuni vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ di W, ed opportuni scalari $a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_k$ tali che

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k.$$

Ora il vettore $\mathbf{u} := a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h$ e' un vettore di U perche' U e' un sottospazio, ed il vettore $\mathbf{w} := b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k$ e' un vettore di W perche' anche W e' un sottospazio. Poiche' $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, segue che $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \quad \mathbf{u} \in U,\ \mathbf{w} \in W\}$.

2) La seconda proprieta' ci dice che se conosciamo un sistema di generatori $\mathcal{S}$ di U, ed un sistema di generatori $\mathcal{T}$ di W, allora unendo i due sistemi otteniamo un sistema di generatori $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ per $U + W$. Cio' e' molto utile se vogliamo calcolare una base di $U + W$ a partire da una base di U e da una di W.[1] Pero' occorre fare attenzione: se i due sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono liberi, non e' detto che lo sia $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. Percio' nell'eventuale calcolo di una base per $U + W$ a partire da $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, in generale sara' necessario togliere qualche vettore sovrabbondante in $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$.[2]

Per quanto riguarda la dimostrazione della proprieta', osserviamo che poiche' $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} \subseteq U \cup W$, allora per la monotonia del sottospazio generato deve essere

$$\operatorname{Span}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \subseteq \operatorname{Span}(U \cup W) = U + W.$$

Percio' occorre solo provare l'inclusione inversa. Sia allora $\mathbf{v}$ un vettore di $U + W$. Abbiamo appena provato che esiste un vettore $\mathbf{u}$ di U ed un vettore $\mathbf{w}$ di W tali che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. D'altra parte, poiche' $\mathcal{S}$ genera U ci saranno opprtuni vettori $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_h$ di $\mathcal{S}$, ed opportuni scalari $a_1, \ldots, a_h$ tali che $\mathbf{u} = a_1\mathbf{s}_1 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h$. Similmente, poiche' W e' generato da $\mathcal{T}$, ci saranno opportuni vettori $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_k$ di $\mathcal{T}$, ed opportuni scalari $b_1, \ldots, b_k$ tali che $\mathbf{w} = b_1\mathbf{t}_1 + \cdots + b_k\mathbf{t}_k$. Ma allora

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = a_1\mathbf{s}_1 + \cdots + a_h\mathbf{s}_h + b_1\mathbf{t}_1 + \cdots + b_k\mathbf{t}_k \in \operatorname{Span}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}).$$

3) Veniamo ora alla celebre formula di Grassmann. In questa formula si intende che U e W siano finitamente generabili. Se assumiamo come dati le dimensioni di U e di W, questa formula mette in relazione la dimensione dell'intersezione di U con W, con la dimensione della somma di U con W. In qualche modo i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$ sono correlati, e nella pratica, conoscere uno tra i due numeri $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$, equivale a conoscerne l'altro. Punto di partenza della dimostrazione della formula di Grassmann consiste nel fissare una base dell'intersezione $U \cap W$. Sia

$$\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_h \in U \cap W$$

una tale base. Denotiamo con n la dimensione di U e con m la dimensione di W. Poiche' $U \cap W$ e' un sottospazio di U, abbiamo dimostrato che, con l'aggiunta di opportuni vettori $\mathbf{u}_{h+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ di U possiamo formare una base di U:

$$\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_h, \mathbf{u}_{h+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \in U.$$

[1] Nel caso dell'intersezione, il procedimento per calcolarne una base e' piu' elaborato, e lo studieremo in generale nei prossimi capitoli. Faremo un esempio nel prossimo esercizio.

[2] Anche qui occorre osservare che un eventuale vettore sovrabbondante in $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ non e' detto che stia in $U \cap W$.

Similmente, con l'aggiunta di opportuni vettori $\mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_m$ di W possiamo formare una base di W:

$$\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_h, \mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_m \in W.$$

La formula di Grassmann sara' dimostrata se faremo vedere che il sistema di vettori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_h, \mathbf{u}_{h+1}, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_m\}$$

e' una base di $U + W$. Infatti in tal caso si avrebbe:

$$\dim(U + W) = h + (n - h) + (m - h) = n + m - h = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Che $\mathcal{B}$ sia un sistema di generatori di $U + W$ segue dalla proprieta' 2) precedentemente dimostrata. Rimane da provare che $\mathcal{B}$ e' libero. A tale proposito, sia

$$a_1\mathbf{i}_1 + \cdots + a_h\mathbf{i}_h + b_{h+1}\mathbf{u}_{h+1} + \cdots + b_n\mathbf{u}_n + c_{h+1}\mathbf{w}_{h+1} + \cdots + c_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}$$

una relazione tra i vettori di $\mathcal{B}$. Allora il vettore

$$\mathbf{x} := a_1\mathbf{i}_1 + \cdots + a_h\mathbf{i}_h + b_{h+1}\mathbf{u}_{h+1} + \cdots + b_n\mathbf{u}_n = -c_{h+1}\mathbf{w}_{h+1} - \cdots - c_m\mathbf{w}_m$$

e' un vettore che sta in $U \cap W$. Percio' deve essere combinazione lineare dei vettori $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_h$:

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{i}_1 + \cdots + d_h\mathbf{i}_h.$$

Ma allora

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{i}_1 + \cdots + d_h\mathbf{i}_h = -c_{h+1}\mathbf{w}_{h+1} - \cdots - c_m\mathbf{w}_m,$$

e quindi

$$d_1\mathbf{i}_1 + \cdots + d_h\mathbf{i}_h + c_{h+1}\mathbf{w}_{h+1} + \cdots + c_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}.$$

Poiche' i vettori $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_h, \mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_m$ sono liberi, allora

$$c_{h+1} = \cdots = c_m = 0.$$

Cio' implica

$$\mathbf{x} = -c_{h+1}\mathbf{w}_{h+1} - \cdots - c_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0} = a_1\mathbf{i}_1 + \cdots + a_h\mathbf{i}_h + b_{h+1}\mathbf{u}_{h+1} + \cdots + b_n\mathbf{u}_n.$$

Poiche' anche i vettori $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_h, \mathbf{u}_{h+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ sono liberi allora deve essere:

$$a_1 = \cdots = a_h = b_{h+1} = \cdots = b_n = c_{h+1} = \cdots = c_m = 0.$$

Questo argomento prova che per i vettori di $\mathcal{B}$ l'unica relazione possibile e' quella banale, e conclude la dimostrazione della formula di Grassmann. ■

Esercizio. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 0, 1, 3)$, $(3, 1, 2, 4)$, *e W il sottospazio generato dai vettori* $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -2)$. *Calcolare base e dimensione per V, W, $V + W$ e $V \cap W$.*

Svolgimento. Poiche'$(3,1,2,4) = (1,1,1,1) + (2,0,1,3)$, allora V e' generabile dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(2,0,1,3)$, che formano una base di V perche' sono liberi. Anche i due generatori di W sono liberi e percio' formano una base per W. In particolare $\dim(V) = \dim(W) = 2$. Sappiamo che

$$V + W = \mathrm{Span}((1,1,1,1),(2,0,1,3),(1,0,0,0),(0,1,0,-2)).$$

Calcolando le relazioni tra questi quattro generatori, si vede che

$$(1,1,1,1) - (2,0,1,3) + (1,0,0,0) - (0,1,0,-2) = (0,0,0,0).$$

Percio' il vettore $(0,1,0,-2)$ e' sovrabbondante, ed il calcolo delle relazioni prova che i rimanenti vettori $(1,1,1,1),(2,0,1,3),(1,0,0,0)$ sono liberi. Quindi tali vettori formano una base di $V + W$, e $\dim(V + W) = 3$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(V \cap W) = 1$, percio' per calcolare una base di $V \cap W$ e' sufficiente calcolare un vettore non nullo $\mathbf{x} \in V \cap W$. La relazione precedente ci dice che il vettore

$$\mathbf{x} = (1,1,1,1) - (2,0,1,3) = -(1,0,0,0) + (0,1,0,-2) = (-1,1,0,-2)$$

appartiene a $V \cap W$, e quindi ne forma una base. ■

10. Somma diretta di sottospazi.

Un caso molto importante di somma di due sottospazi e' quando i due sottospazi hanno in comune solo il vettore nullo. In tal caso si dice che la somma e' diretta.

• *Definizione di somma diretta di due sottospazi.*

Sia V uno spazio vettoriale, ed U, W sottospazi di V. Si dice che V e' la somma diretta di U e W, e si scrive $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ ed inoltre $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

La condizione che uno spazio sia la somma diretta di due sottospazi si puo' esprimere anche in altri modi equivalenti fra loro.

• *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, ed U, W sottospazi di V. Le seguenti proprieta' sono equivalenti.*

(i) $V = U \oplus W$;

(ii) $V = U + W$ *e* $\dim V = \dim U + \dim W$;

(iii) $\dim V = \dim U + \dim W$ *e* $\dim(U \cap W) = 0$;

(iv) $\dim V = \dim U + \dim W$ *e* $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$;

(v) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste un unico vettore $\mathbf{u} \in U$ ed un unico vettore $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$;

(vi) per ogni base $\mathcal{U}$ di U ed ogni base $\mathcal{W}$ di W l'unione $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ e' una base di V;

(vii) esiste una base $\mathcal{U}$ di U ed esiste una base $\mathcal{W}$ di W tali che l'unione $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ e' una base di V.

Dimostrazione. Cominciamo col provare che (i) implica (ii). Se vale (i) allora $V = U + W$ per definizione, e poiche' $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ allora $\dim(U \cap W) = 0$ e dalla formula di Grassmann segue che $\dim V = \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Sempre per la formula di Grassmann abbiamo $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim V = 0$. Cio' prova che (ii) implica (iii). Inoltre (iii) implica (iv) perche' $\dim(U \cap W) = 0$ equivale a dire che $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Ora andiamo a provare che (iv) implica (v). Le ipotesi (iv) insieme alla formula di Grassmann ci dicono che $\dim V = \dim(U + W)$. Quindi $V = U + W$. E percio' per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Per concludere occorre provare che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ sono *unici*. Supponiamo allora che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$ con $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ in U e $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ in W. Allora il vettore $\mathbf{z} := \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w}$ appartiene ad $U \cap W$. Ma per ipotesi $U \cap W$ e' lo spazio nullo per cui $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, cioe' $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

Supponiamo che sia soddisfatta la proprieta' (v), e siano $\mathcal{U} := \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ e $\mathcal{W} := \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ basi qualunque di U e di W. Sia $\mathbf{v}$ un vettore qualunque di V. Per ipotesi possiamo scrivere $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ secondo opprtuni vettori $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. In corrispondenza di tali vettori esistono pesi a_i e b_j tali che $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h$ e $\mathbf{w} = b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k$. Quindi $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k$, e cio' prova che $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ e' un sistema di generatori di V. Per provare la proprieta' (vi) rimane da dimostrare che $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ e' linearmente indipendente. Sia allora $\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k$ una relazione tra i vettori di $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$. Poiche' $\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0} + \mathbf{0}$, per l'unicita' della decomposizione (ipotizzata nella proprieta' (v)) deve essere $a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$ e $b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. Poiche' $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ sono indipendenti allora tutti i pesi a_i e b_j devono essere nulli. Cio' prova che la relazione $\mathbf{0} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_h\mathbf{u}_h + b_1\mathbf{w}_1 + \cdots + b_k\mathbf{w}_k$ deve essere banale, cioe' che $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ e' linearmente indipendente.

Poiche' e' ovvio che (vi) implica (vii), per concludere la dimostrazione della Proposizione ci sara' sufficiente dimostrare che (vii) implica (i). Siano allora $\mathcal{U}$ una base di U e $\mathcal{W}$ una base di W tali che $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ sia una base per V. Allora e' ovvio che $V = U + W$ e che $\dim V = \dim U + \dim W$. Ancora per la formula di Grassmann deduciamo che $\dim(U \cap W) = 0$, cioe' $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. ■

Nozioni analoghe si possono dare nel caso di piu' di due sottospazi. A tale proposito siano $U_1, \dots, U_r$ sottospazi di uno spazio V. Diremo che V e' la *somma* di $U_1, \dots, U_r$, e scriveremo $V = U_1 + \cdots + U_r$, se $V = \mathrm{Span}(U_1 \cup \cdots \cup U_r)$, cioe' se ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si puo' scrivere sotto la forma $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_r$, con $\mathbf{u}_i \in U_i$. Diremo invece che V e' la *somma diretta* dei sottospazi $U_1, \dots, U_r$, e scriveremo $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1. $V = U_1 + \cdots + U_r$;
2. per ogni $i = 1, \dots, r$ si ha $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + \widehat{U_i} + U_{i+1} + \cdots + U_r) = \{\mathbf{0}\}$.

Con argomenti simili a quelli adoperati nella dimostrazione delle equivalenze precedenti si puo' provare la seguente generalizzazione.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, ed $U_1, \dots, U_r$ sottospazi di V. Sono equivalenti le seguenti proprieta':

(i) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$*;*

(ii) $V = U_1 + \cdots + U_r$ *e* $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$*;*

(iii) $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$ *e, per ogni* $i = 1, \dots, r$*, si ha*

$$\dim \left[U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + \widehat{U_i} + U_{i+1} + \cdots + U_r) \right] = 0;$$

(iv) $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$ *e, per ogni* $i = 1, \dots, r$*, si ha*

$$U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + \widehat{U_i} + U_{i+1} + \cdots + U_r) = \{\mathbf{0}\};$$

(v) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ *esistono e sono unici vettori* $\mathbf{u}_1 \in U_1, \dots, \mathbf{u}_r \in U_r$ *tali che* $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_r$*;*

(vi) per ogni base $\mathcal{U}_i$ *di* U_i *l'unione* $\mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_r$ *e' una base di* V*;*

(vii) per ogni $i = 1, \dots, r$ *esiste una base* $\mathcal{U}_i$ *di* U_i *tale che l'unione* $\mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_r$ *e' una base di* V*.*

Esempio. Sia $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora

$$V = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1) \oplus \mathrm{Span}(\mathbf{b}_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}(\mathbf{b}_n).$$

Esempio. Sia U un sottospazio di uno spazio V, $\dim V = n$, e sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ una base di U. Aggiungiamo a tali vettori $n - h$ vettori $\mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ di V tali che $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_n\}$ sia una base di V. Sia W il sottospazio di V generato dai vettori $\mathbf{w}_{h+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ che abbiamo aggiunto. Allora $V = U \oplus W$.

Esercizio. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$*:*

$$V = \mathit{Span}((-1,1,0),(2,1,-1)), \quad W = \mathit{Span}((2,1,0),(-3,0,1)).$$

Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = V \oplus W$*.*

Svolgimento. Con un ragionamento analogo a quello svolto per l'esercizio precedente, si vede che $\dim(V + W) = 3$, percio' $\mathbf{R}^3 = V + W$, ma la somma non e' diretta perche' $\dim(V \cap W) \neq 0$. Infatti $(-3,0,1) \in V \cap W$. ■

Indice dei paragrafi.