Le rotazioni nello spazio.[1]

Lezione 1.

Prima di studiare le rotazioni nello spazio, conviene studiare le rotazioni nel piano.

Le rotazioni nel piano.

• Fissiamo un punto O nel piano ρ, fissiamo un angolo α, e sia $\overrightarrow{OX}$ un vettore geometrico applicato in O. Sia $\overrightarrow{OY}$ il vettore applicato in O che si ottiene ruotando in senso antiorario il vettore $\overrightarrow{OX}$, fino a percorrere un'ampiezza data dall'angolo fissato α. Abbiamo cosi' definito un'applicazione:

$$f_\alpha : \overrightarrow{OX} \in \mathcal{V}_{O,\rho} \to \overrightarrow{OY} \in \mathcal{V}_{O,\rho},$$

detta *la rotazione di angolo α nel piano ρ intorno al punto O* (il simbolo $\mathcal{V}_{O,\rho}$ denota lo spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in O giacenti nel piano ρ).

Ora introduciamo una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}\}$ per lo spazio $\mathcal{V}_{O,\rho}$ dei vettori geometrici del piano, formata da due vettori di lunghezza 1, ortogonali fra loro, in modo tale che ruotando in senso antiorario il vettore $\overrightarrow{OE_1}$ si ottiene il vettore $\overrightarrow{OE_2}$ dopo aver percorso un angolo di 90 gradi (in tal caso si dice che la base $\mathcal{B}$ e' positiva). Siano $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ le coordinate di $\overrightarrow{OX}$. *Ci chiediamo come si esprimono le coordinate $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ di $\overrightarrow{OY}$ in funzione di* $\mathbf{x}$. A tale proposito, sia φ l'angolo formato dal vettore $\overrightarrow{OX}$ rispetto all'asse $\overrightarrow{OE_1}$. Si ha

$$x_1 = l\cos\varphi, \quad x_2 = l\sin\varphi,$$

dove l denota la lunghezza di $\overrightarrow{OX}$, *che e' anche la lunghezza di* $\overrightarrow{OY}$. Poiche' l'angolo che $\overrightarrow{OY}$ forma con l'asse $\overrightarrow{OE_1}$ e' $\varphi + \alpha$ segue che

$$y_1 = l\cos(\varphi + \alpha), \quad y_2 = l\sin(\varphi + \alpha),$$

da cui si deduce, tramite le formule di addizione e sottrazione, che

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Quindi la rotazione f_α e' un'applicazione lineare, con matrice rappresentativa (riferita ad una base $\mathcal{B}$ ortonormale positiva come indicata in precedenza) data dalla matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\alpha) = R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

dove α e' l'angolo della rotazione. Diremo che la matrice R_α e' una matrice di rotazione (di angolo α). Si osservi che la matrice R_α non dipende dalla base $\mathcal{B}$ ortonormale positiva fissata.

• Esempio. Scriviamo l'espressione esplicita di una rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Poiche'

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

l'espressione esplicita e':

$$f_{\frac{\pi}{2}}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

Per esempio, se ruotiamo di 90 gradi il vettore $\overrightarrow{OX}$ di coordinate $(5, -18)^T$, otteniamo il vettore $\overrightarrow{OY}$ di coordinate $(18, 5)^T$.

[1] Vincenzo Di Gennaro, 09/06/2024.

Un altro esempio. Scriviamo l'espressione esplicita di una rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Poiche'

$$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

l'espressione esplicita e':

$$f_{\frac{\pi}{4}}(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2, \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 \right).$$

• Ora denotiamo l'insieme di tutte le rotazioni dello spazio $\mathcal{V}_{O,\rho}$ con il simbolo

$$Rot(\mathcal{V}_{O,\rho}).$$

La composizione di funzioni fornisce a $Rot(\mathcal{V}_{O,\rho})$ una struttura di *gruppo*[2]. Infatti la composizione di due applicazioni gode della proprieta' associativa, la composizione di due rotazioni e' ancora una rotazione, l'identita' e' una rotazione, l'inversa di una rotazione e' una rotazione. Piu' precisamente:

$$f_\beta \circ f_\alpha = f_{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{id}_{\mathcal{V}_{O,\rho}} = f_0, \quad f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}.$$

Un altro esempio importante di gruppo e' il gruppo $GL(n)$ delle matrici quadrate invertibili di ordine n (gruppo lineare generale di ordine n). In questo caso l'operazione e' la moltiplicazione tra matrici. Dalla discussione precedente sulle rotazioni segue l'esistenza di un'applicazione (fissata una base $\mathcal{B}$ ortonormale positiva)

$$\Psi : f_\alpha \in Rot(\mathcal{V}_{O,\rho}) \to R_\alpha = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_\alpha) \in GL(2).$$

Si osservi che tale funzione rispetta le operazioni di gruppo, cioe' e' un omomorfismo di gruppi.[3] Infatti, per le proprieta' della matrice rappresentativa, si ha:

$$\Psi(f_\alpha \circ f_\beta) = \Psi(f_\alpha) \cdot \Psi(f_\beta).$$

Si osservi anche che l'applicazione Ψ e' iniettiva, e che non cambia se al posto di $\mathcal{B}$ si considera un'altra base ortonormale positiva.

• Le matrici di rotazione sono esempi di matrici *ortogonali* aventi determinante uguale ad 1, cioe' $\det R_\alpha = 1$.

Una matrice quadrata P di ordine n si dice *ortogonale* se esistono due basi ortonormali (rispetto al prodotto scalare canonico) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}).$$

La seguente proposizione fornisce varie interpretazioni delle matrici ortogonali, sara' dimostrata nella prossima lezione.

---

[2]Un gruppo $(G, \circ)$ e' un insieme G munito di un'operazione interna $\circ : (g_1, g_2) \in G \times G \to g_1 \circ g_2 \in G$. Tale operazione deve essere associativa, cioe' $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ per ogni g_1, g_2, g_3, deve avere un elemento neutro e, tale cioe' che $g \circ e = e \circ g = g$ per ogni g, ed ogni g deve essere invertibile, cioe' per ogni g esiste un elemento h tale che $g \circ h = h \circ g = e$. L'elemento h si chiama *l'inverso di g*. Si prova facilmente che l'elemento neutro e' unico, e, per ogni g, e' unico l'inverso di g. In qualche caso l'operazione $\circ$ viene denotata con $+$ (notazione additiva), in qualche caso viene denotata con $\cdot$ (notazione moltiplicativa). Con la notazione additiva, l'elemento neutro e viene denotato con 0. Con la notazione moltiplicativa, l'elemento neutro e viene denotato con 1. Con la notazione additiva l'inverso di g viene chiamato *l'opposto* di g e si denota con $-g$. Con la notazione moltiplicativa, l'inverso di g si denota con g^{-1}.

[3]Una funzione $\varphi : G \to G'$ tra due gruppi si dice *omomorfismo* se $\varphi(g \cdot h) = \varphi(g) \cdot \varphi(h)$ per ogni $g, h \in G$ (stiamo usando la notazione moltiplicativa). Se φ e' anche biiettiva, allora si dice che φ e' un *isomorfismo* tra G e G'. Possiamo pensare un isomorfismo tra G e G' come una *identificazione tra G e G'*.

Proposizione. *Sia P una matrice quadrata di ordine n. Sono equivalenti le seguenti proprieta'.*

(i) *P e' una matrice ortogonale.*

(ii) *Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < P \cdot \mathbf{u}, P \cdot \mathbf{v} >$.*[4]

(iii) *$P^T \cdot P = I = P \cdot P^T$.*

(iv) *P e' invertibile e $P^{-1} = P^T$.*

(v) *Le righe di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

(vi) *P^T e' una matrice ortogonale.*

(vii) *Le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

Esercizi per la Lezione n. 1.

a) Si consideri il vettore $\mathbf{u} = (1, 7)^T$. Sia $\mathbf{v}$ il vettore ottenuto da $\mathbf{u}$ tramite una rotazione di 30 gradi. Quali sono le coordinate di $\mathbf{v}$?

b) Scrivere l'espressione esplicita della rotazione di 30 gradi.

c) Scrivere l'espressione esplicita della rotazione di 60 gradi.

d) Provare che in un gruppo l'elemento neutro e' unico.

e) Provare che in un gruppo l' inverso di un dato elemento e' unico.

f) Spiegare perche' $GL(n)$ e' un gruppo.

g) Spiegare perche' $\Psi(f_\alpha \circ f_\beta) = \Psi(f_\alpha) \cdot \Psi(f_\beta)$.

h) Provare che una matrice R di rotazione e' una matrice ortogonale, verificando che R soddisfa tutte le proprieta', tra loro equivalenti, enunciate nella Proposizione.

i) Ci sono matrici ortogonali di ordine 2 che non sono di rotazione?

l) Fare un esempio di una matrice di ordine 2 che non sia ortogonale, ma che abbia determinante pari ad 1.

m) Spiegare perche' $R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$. Dedurre che $R_\alpha \cdot R_{-\alpha} = I$.

---

[4] Il simbolo $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ denota il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$, cioe'

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono disposti in colonna (cosi' sono pensati nella proprieta' (ii)), allora il prodotto scalare canonico si puo' esprimere come prodotto righe per colonne:

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}.$$

Lezione 2.

Andiamo a dimostrare la Proposizione enunciata nella lezione precedente, che riscriviamo:

Proposizione. *Sia P una matrice quadrata di ordine n. Sono equivalenti le seguenti proprieta'.*

(i) *P e' una matrice ortogonale.*

(ii) *Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < P \cdot \mathbf{u}, P \cdot \mathbf{v} >$.*

(iii) *$P^T \cdot P = I = P \cdot P^T$.*

(iv) *P e' invertibile e $P^{-1} = P^T$.*

(v) *Le righe di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

(vi) *P^T e' una matrice ortogonale.*

(vii) *Le colonne di P formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

• *Dimostrazione della Proposizione.*

$(i) \implies (ii)$. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ tali che $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ le coordinate di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e con $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}'$ le coordinate di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Essendo P la matrice del cambiamento delle coordinate, si ha:

$$\mathbf{x}' = P\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}' = P\mathbf{y}.$$

D'altra parte, poiche' le due basi sono ortonormali, si deve avere

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < \mathbf{x}, \mathbf{y} > = < \mathbf{x}', \mathbf{y}' > .$$

Sostituendo otteniamo

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = < P\mathbf{x}, P\mathbf{y} >$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$. Cio' prova la proprieta' (ii).[5]

$(ii) \implies (iii)$. Per ipotesi sappiamo che

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = < P\mathbf{u}, P\mathbf{v} >$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Cioe'

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = (P\mathbf{u})^T \cdot (P\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (P^T P) \cdot \mathbf{v}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Cio' implica che $P^T P = I$, e prova (iii).

$(iii) \implies (iv)$. Se $P^T P = I$ allora P e' invertibile e $P^{-1} = P^T$.

$(iv) \implies (v)$. Siano $P_1, P_2, \dots, P_n$ le righe di P. Poiche' $PP^T = I$, allora il prodotto tra la riga P_i di P e la colonna $(P^T)^j$ di P^T e' uguale a δ_{ij}.[6] Ma la colonna di posto j di P^T coincide con la riga di posto j di P. Percio' si ha:

$$< P_i, P_j > = \delta_{ij},$$

per ogni i, j. Cio' vuol dire proprio che la base $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ e' ortonormale.

$(v) \implies (vi)$. La matrice P^T si ottiene mettendo in colonna le righe di P. Quindi P^T e' la matrice del cambiamento delle coordinate dalla base $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ alla base canonica, che e' ortonormale. Poiche' per ipotesi la base delle righe di P e' ortonormale, dalla definizione segue che P^T e' una matrice ortogonale.

$(vi) \implies (vii)$. Poiche' P^T e' una matrice ortogonale, le sue righe, cioe' le colonne di P, formano una base ortonormale perche' abbiamo appena dimostrato che $(i) \implies (v)$.

---

[5] La proprieta' (ii) si esprime dicendo che *la moltiplicazione per P non altera il prodotto scalare.*

[6] δ_{ij} e' il *simbolo di Kronecker*, e vale 0 se $i \neq j$, e vale 1 se $i = j$. In altri termini, δ_{ij} denota le componenti della matrice identica I, cioe' $I = (\delta_{ij})$.

(vii) $\Longrightarrow$ *(i)*. P e' la matrice del cambiamento delle coordinate dalla base costituita dalle sue colonne alla base canonica. Quindi, se le colonne formano una base ortonormale, allora P e' ortogonale.

Fine della dimostrazione della Proposizione.

Come conseguenza di tali proprieta' si ha che il sottoinsieme $O(n)$ di $GL(n)$ costituito dalle matrici ortogonali e' un *sottogruppo* di $GL(n)$.[7] Il gruppo $O(n)$ si chiama *il gruppo ortogonale di ordine* n. Si osservi che se $P^T P = I$ allora, per il Teorema di Binet, $\det P = \pm 1$. Quindi le matrici ortogonali hanno determinante uguale ad 1 oppure -1.

Nel caso $n = 1$ si ha $O(1) = \{\pm 1\}$. Nel caso $n = 2$, $O(2)$ si decompone in due sottoinsiemi disgiunti:

$$O(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il primo sottoinsieme e' costituito dalle *matrici di rotazione del piano, che sono esattamente le matrici ortogonali di ordine* 2 *con determinante uguale ad* 1 (nell'altro sottoinsieme appaiono le matrici ortogonali con determinante uguale a -1, e si possono interpretare geometricamente come matrici di *riflessione*, che pero' in queste note non studieremo). Il sottoinsieme delle matrici di rotazione del piano si denota con $SO(2)$, ed e' detto il *gruppo speciale ortogonale*. Infatti, $SO(2)$ e' un sottogruppo di $O(2)$.[8]

La funzione $\Psi : Rot(\mathcal{V}_{O,\rho}) \to GL(2)$ introdotta nella lezione precedente induce, per restrizione, un isomorfismo di gruppi:

$$Rot(\mathcal{V}_{O,\rho}) \cong SO(2).$$

• A questo punto, osserviamo che *le rotazioni nel piano possono essere descritte utilizzando i numeri complessi.*

Piu' precisamente, sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Possiamo rappresentare z sotto la forma

$$z = x + iy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ ed $i^2 = -1$. Il numero reale x si dice la parte reale di z, e si scrive $Re(z) = x$, mentre y si dice la parte immaginaria di z, e si scrive $Im(z) = y$. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ puo' essere riguardato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base data da $\{1, i\}$. Percio', possiamo identificare un numero complesso con un vettore numerico di $\mathbb{R}^2$:[9]

$$z = x + iy \cong (x, y).$$

Inoltre, nell'insieme dei numeri complessi possiamo eseguire *una moltiplicazione interna*:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

---

[7] Un *sottogruppo* H di un gruppo $(G, \circ)$ e' un sottoinsieme H di G stabile rispetto alla operazione di G, tale che l'elemento neutro e di G appartiene ad H, e tale che, per ogni $g \in H$, l'inverso di g in G appartiene ad H. Se H e' un sottogruppo di G allora l'operazione di G induce per restrizione una struttura di gruppo per H. Se H e' un sottogruppo di $GL(n)$ allora H si dice *gruppo di Lie* se ogni successione convergente di matrici di H converge ad una matrice di H, oppure ad una matrice non invertibile (questa pero' non e' la definizione piu' generale di gruppo di Lie).

[8] I gruppi $GL(n)$, $O(n)$ ed $SO(n)$ sono gruppi di Lie. Il gruppo $SO(n)$, detto *gruppo speciale ortogonale di ordine* n, e' il sottogruppo di $O(n)$ costituito dalle matrici ortogonali con determinante uguale ad 1.

[9] D'altra parte, se fissiamo una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ dello spazio $\mathcal{V}_{O,\rho}$ dei vettori geometrici, le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ consentono di identificare $\mathcal{V}_{O,\rho}$ con $\mathbb{R}^2$, e quindi $\mathcal{V}_{O,\rho}$ con $\mathbb{C}$. Quando si considera questa identificazione $\mathcal{V}_{O,\rho} \cong \mathbb{C}$, il piano ρ prende il nome di *piano di Argand-Gauss.*

La funzione

$$x \in \mathbb{R} \to x = x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$$

consente di vedere $\mathbb{R}$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Nell'insieme dei numeri complessi abbiamo tre operazioni: l'addizione interna e la moltiplicazione per uno scalare, data dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, ed una moltiplicazione interna appena definita (detta *moltiplicazione complessa*). La moltiplicazione interna soddisfa le seguenti proprieta': e' associativa, esiste un elemento neutro (che e' il numero reale 1), ogni elemento z non nullo possiede un elemento inverso z^{-1}, ed e' commutativa. Inoltre le tre operazioni soddisfano la proprieta' distributiva. La moltiplicazione complessa per un numero reale coincide con la moltiplicazione esterna per uno scalare. La moltiplicazione interna, insieme alle operazioni di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, fornisce a $\mathbb{C}$ una struttura di *campo*. Tale campo e' un ampliamento del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Denotato con $||z||$ il *modulo* di z, cioe' $||z|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, allora (quando $z \neq 0$) possiamo scrivere z nella forma[10]

$$z = ||z|| \cdot u,$$

con u numero complesso di modulo 1. Poiche' u ha modulo 1, allora possiamo scrivere u nella forma

$$u = \cos\theta + i \sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene pertanto *la rappresentazione polare di z*:

$$z = ||z|| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta).$$

L'angolo θ e' detto *l'argomento di z*, ed e' determinato da z a meno di multipli interi di 2π. Se $w = ||w|| \cdot (\cos\eta + i \sin\eta)$ e' un altro numero complesso allora

$$z = w \quad \iff \quad ||z|| = ||w|| \quad \text{e } \theta \text{ ed } \eta \text{ differiscono per un multiplo intero di } 2\pi.$$

La moltiplicazione complessa agisce al seguente modo sulla rappresentazione polare:

$$z \cdot w = ||z|| \cdot ||w||(\cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta)).$$

Cioe' *il modulo di $z \cdot w$ e' uguale al prodotto dei moduli di z e di w, mentre l'argomento di $z \cdot w$ si ottiene sommando l'argomento di z con quello di w.*[11] In particolare, il prodotto di numeri complessi di modulo 1 e' ancora un numero complesso di modulo 1. Si deduce che la circonferenza unitaria

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e' un sottogruppo del gruppo moltiplicativo complesso $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \backslash \{0\}, \cdot)$. Inoltre, se

$$z = x + iy = ||z|| \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

e' un numero complesso ed

$$u = \cos\alpha + i \sin\alpha \in S^1$$

[10] Il modulo di z e' detto anche *norma* o *lunghezza* di z. Le proprieta' della norma sono le seguenti: 1) la norma di z e' un numero reale positivo, tranne quando $z = 0$, nel qual caso la norma e' nulla; 2) per ogni numero reale c, $||c \cdot z|| = |c| \cdot ||z||$; 3) per ogni z e w si ha $||z + w|| \leq ||z|| + ||w||$ (diseguaglianza triangolare).

[11] Dato un numero complesso $z = x + iy$, si definisce il *coniugato* di z il numero complesso $\overline{z} = x - iy$. Osserviamo che z e' un numero reale se e solo se $z = \overline{z}$, che $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, e che $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Poiche' $z \cdot \overline{z} = ||z||^2$, se $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \frac{1}{||z||} \cdot \overline{z}$. Cioe'

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

e' un numero complesso di modulo 1, allora [12]

$$u \cdot z = ||z||(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha) + i(x \sin\alpha + y \cos\alpha).$$

Cioe' *la moltiplicazione complessa $u \cdot z$ di u per z, visto come vettore geometrico di $\mathcal{V}_{O,\rho}$, e' la rotazione di z di angolo dato dall'argomento di u.* Percio', se, tramite una base ortonormale positiva, identifichiamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_{O,\rho}$ dei vettori geometrici del piano ρ applicati nel punto O con $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{O,\rho} & \overset{f_\alpha}{\to} & \mathcal{V}_{O,\rho} \\ \| & & \| \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \end{array}$$

la rotazione $f_\alpha : \mathcal{V}_{O,\rho} \to \mathcal{V}_{O,\rho}$ di angolo α si identifica con la funzione

$$\varphi_u : z \in \mathbb{C} \to u \cdot z \in \mathbb{C}.$$

Piu' precisamente, fissiamo un numero complesso u di modulo 1, $u = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Sia $z = x + iy$ un numero complesso. Allora z corrsponde al vettore di coordinate $(x, y)^T$. Ruotare il vettore di coordinate $(x, y)^T$ di un angolo α equivale a moltiplicare la matrice di rotazione R_α per $(x, y)^T$. Questa rotazione produce il vettore di coordinate

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Il numero complesso corrispondente a tale vettore, per la formula vista prima, e' il numero

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

$$= ||z||\cos\theta\cos\alpha - ||z||\sin\theta\sin\alpha + i(||z||\cos\theta\sin\alpha + ||z||\sin\theta\cos\alpha)$$

$$= ||z||(\cos(\theta + \alpha) + i(\sin(\theta + \alpha)) = u \cdot z = \varphi_u(z).$$

Poiche' la funzione φ_u a sua volta si identifica con $u \in S^1$, abbiamo le seguenti *manifestazioni* del gruppo delle rotazioni del piano:

$$Rot(\mathcal{V}_O) \cong SO(2) \cong S^1 \cong \mathbf{P}^1_{\mathbb{R}}.$$

Si osservi che l'identificazione $SO(2) \cong S^1$ e' un isomorfismo di gruppi:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \in SO(2) \to \cos\alpha + i\sin\alpha \in S^1.$$

• Per esempio, la moltiplicazione complessa di i per $z = x + iy$ corrisponde a ruotare il vettore (x, y) di 90 gradi. Infatti la rappresentazione polare di i e':

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Possiamo verificare direttamente quanto affermato. Infatti

$$iz = -y + ix,$$

quindi iz corrisponde al vettore $(-y, x)$. Sappiamo che tale vettore e' l'espressione esplicita della rotazione di 90 gradi.

• Un altro esempio. La moltiplicazione complessa di $u = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ per z corrisponde a ruotare (x, y) di 45 gradi. Infatti la rappresentazione polare di u e':

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

[12] Poiche' $z = x + iy = ||z|| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $x = ||z||\cos\theta$ ed $y = ||z||\sin\theta$.

Possiamo verificare direttamente. Infatti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+i\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y).$$

Percio', $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot z$ corrisponde al vettore $\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x-y,\,x+y)$. Sappiamo che tale vettore e' l'espressione esplicita della rotazione di 45 gradi.

Siamo pronti per studiare le rotazioni nello spazio, cominceremo nella prossima lezione.

Faremo un studio analogo alle rotazioni nel piano. Prima daremo la definizione *geometrica* di *rotazione nello spazio*. Dal punto di vista *algebrico* vedremo che una rotazione nello spazio e' una applicazione lineare con matrice rappresentativa data da una matrice ortogonale speciale di ordine 3. E' ancora vero che le rotazioni nello spazio formano un gruppo per composizione, ma la dimostrazione non sara' cosi' semplice come nel caso delle rotazioni nel piano. Poi ci porremo la seguente domanda: *e' possibile una interpretazione delle rotazioni nello spazio analoga alla moltiplicazione complessa?* Il celebre matematico irlandese William Rowan Hamilton (1805-1865) studio' questo problema, e diede una risposta affermativa inventando (o scoprendo) dei nuovi numeri, *i quaternioni*. Come vedremo, mentre i numeri complessi sono numeri *a due dimensioni*, i quaternioni sono numeri *a quattro dimensioni* (cfr. Roger Penrose, *La strada che porta alla realta'*, p. 229, paragrafo 11.1, BUR Rizzoli, 2005).

Esercizi per la Lezione n. 2.

a) Per ogni $\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$R_{\alpha,\,\beta}:=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{bmatrix}.$$

Provare che $R_{\alpha,\,\beta}$ e' una matrice di rotazione, e calcolarne l'angolo.

b) Dire se e' vero oppure no che $R_{\alpha,\,\beta}=R_{\beta,\,\alpha}$.

c) Provare che l'insieme delle matrici ortogonali di ordine 2 con determinante -1 non e' un sottogruppo di $O(2)$. Quali delle tre proprieta' della definizione di sottogruppo vengono meno?

d) Sia $u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Posto $z=1+i$, calcolare $u\cdot z$, e verificare che $u\cdot z$ corrisponde ad una rotazione del vettore $(1,1)$, e determinarne l'angolo.

e) Sia $u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Posto $z=x+iy$, calcolare $u\cdot z$, e verificare che $u\cdot z$ corrisponde ad una rotazione del vettore (x,y), e determinarne l'angolo.

f) Dire se e' vero oppure no che $||z\cdot w||=||z||\cdot||w||$.

g) Provare che se $z\neq 0$, allora $||z^{-1}||=||z||^{-1}$.

h) Provare che se $\varphi_u=\varphi_v$ allora $u=v$.

i) Sia $\mathcal{G}$ l'insieme delle applicazioni $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ del tipo φ_u, con $u\in\mathbb{C}$ e $||u||=1$. Provare che $\mathcal{G}$ e' un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

l) Provare che l'applicazione $u\in S^1\to\varphi_u\in\mathcal{G}$ e' un isomorfismo di gruppi.

m) Provare che $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ e che $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

n) Calcolare l'inverso del numero $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{3}$.

o) Provare che $||u||=1$ se e solo se $u^{-1}=\overline{u}$.

Lezione 3.

Le rotazioni nello spazio.

• Denotiamo con $\mathcal{V}_O$ lo spazio dei vettori geometrici applicati nel punto O. Fissiamo un angolo α, ed un versore $\mathbf{n} = \overrightarrow{ON}$ (cioe' un vettore di lunghezza 1). Sia $\overrightarrow{OX}$ un vettore geometrico applicato in O. Sia $\overrightarrow{OY}$ il vettore applicato in O che si ottiene ruotando intorno ad $\mathbf{n}$, in senso antiorario, il vettore $\overrightarrow{OX}$, fino a percorrere un'ampiezza data dall'angolo fissato α. Durante la rotazione la proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{OX}$ su $\mathbf{n}$ rimane costante, mentre la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{OX}$ sul piano per O ortogonale ad $\mathbf{n}$ ruota, intorno ad O, di un angolo α nel senso antiorario indotto da $\mathbf{n}$. In tal modo abbiamo definito un'applicazione che dipende da $\mathbf{n}$ ed α:

$$f_{\mathbf{n},\alpha} : \overrightarrow{OX} \in \mathcal{V}_O \to \overrightarrow{OY} \in \mathcal{V}_O,$$

detta *la rotazione di angolo α intorno al versore* $\mathbf{n}$. Il versore $\mathbf{n}$ si dice anche *l'asse della rotazione*. Si osservi che

$$f_{\mathbf{n},\alpha} = f_{-\mathbf{n},-\alpha}, \quad \text{e che} \quad f_{\mathbf{n},-\alpha} = f_{-\mathbf{n},\alpha}.$$

Ora ci proponiamo di provare che una rotazione $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' un'applicazione lineare. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ la base ortonormale cosi' definita. Poniamo $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n}$, cioe' poniamo $\mathbf{b}_3$ uguale all'asse della rotazione, poi scegliamo un versore $\mathbf{b}_1$ ortogonale a $\mathbf{b}_3$, e definiamo $\mathbf{b}_2$ come il prodotto vettoriale $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1$, in modo tale che, guardando da $\mathbf{b}_3$ il piano ortogonale ad $\mathbf{n}$, il vettore $\mathbf{b}_1$ raggiunge il vettore $\mathbf{b}_2$ con una rotazione antioraria di 90 gradi (in tal caso si dice che la base $\mathcal{B}$ e' *positiva*). Denotiamo con $\mathbf{x}'$ ed $\mathbf{y}'$ le coordinate di $\overrightarrow{OX}$ ed $\overrightarrow{OY}$ rispetto a tale base. Poiche' $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n}$, e poiche' la proiezione di $\overrightarrow{OX}$ su $\mathbf{n}$ rimane costante, si avra' $y_3' = x_3'$. D'altra parte, la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{OX}$ sul piano determinato da $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ ed O si muove intorno ad O come in una rotazione piana di angolo α. Percio' si avra' $y_1' = x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha$ e $y_2' = x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha$. Cioe'

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}'.$$

Cio' prova che $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' un endomorfismo di $\mathcal{V}_O$, con matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ data da

$$(1) \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{n},\alpha}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(questa matrice non dipende dalla scelta del vettore $\mathbf{b}_1$ ortogonale ad $\mathbf{n}$).

E' chiaro che vale anche il "viceversa". Cioe', se $f : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ e' un'applicazione lineare per la quale esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ rispetto alla quale la matrice rappresentativa e' data come in (1), allora $f = f_{\mathbf{b}_3,\alpha}$ oppure $f = f_{\mathbf{b}_3,-\alpha}$ a seconda che $\mathcal{B}$ sia positiva oppure no (se $\mathcal{B}$ non e' positiva, allora scambiando $\mathbf{b}_1$ con $\mathbf{b}_2$ si ottiene una nuova base $\mathcal{B}'$ positiva e

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cioe', $f = f_{\mathbf{b}_3,-\alpha}$).

Possiamo dare la definizione di *matrice di rotazione*.

• Sia R una matrice quadrata di ordine 3. Diremo che R e' una *matrice di rotazione* se esiste una rotazione $f_{\mathbf{n},\alpha}$ ed una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$ tale che $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha})$.

Osservazioni. (i) Con le notazioni precedenti, se $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha})$, allora

$$R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_O}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{n},\alpha}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_O}).$$

Poiche' $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_O})$ e' una matrice ortogonale, possiamo dire che se una matrice R e' di rotazione, allora esiste una matrice ortogonale P ed un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$R = P \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}. \tag{2}$$

Vale anche il viceversa. Cioe', se R e' una matrice di ordine 3 per cui esiste una matrice ortogonale P ed un angolo α come in (2), allora R e' una matrice di rotazione. Infatti, se P e' la matrice del cambiamento delle coordinate dalla base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ alla base ortonormale $\mathcal{E}$, allora la formula (2) ci dice che $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha})$, dove $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' la rotazione di asse $\mathbf{n} = \mathbf{b}_3$ di angolo α (oppure di angolo $-\alpha$ se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ non e' positiva rispetto a $\mathbf{b}_3$).[13]

(ii) Dalla formula (2) deduciamo che se R e' una matrice di rotazione, allora R e' una matrice ortogonale con determinante uguale ad 1. Percio' $R \in SO(3)$. Dopo dimostreremo che vale anche il viceversa, cioe' che se R e' una matrice ortogonale speciale di ordine 3, allora R e' una matrice di rotazione.

(iii) Sia R una matrice di rotazione. Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$. Sia $f : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ l'endomorfismo di $\mathcal{V}_O$ tale che $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. Allora f e' una rotazione. Infatti, dalla formula (2) deduciamo

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot R \cdot P.$$

Poiche' la matrice P e' ortogonale, se denotiamo con $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ la base di $\mathcal{V}_O$ tale che $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}_O})$, allora $\mathcal{B}$ e' una base ortonormale di $\mathcal{V}_O$. La formula precedente ci dice che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questo vuol dire che f e' la rotazione di asse $\mathbf{b}_3$ di angolo $\pm\alpha$ (sara' di angolo $-\alpha$ se $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ non e' positiva rispetto a $\mathbf{b}_3$).

(iv) Sia $f_{\mathbf{n},\alpha}$ una rotazione. Sia $\mathcal{B}$ la base ortonormale che appare nella formula (1). Dalla matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{n},\alpha})$ deduciamo quanto segue.

1) Se l'angolo di rotazione α e' nullo (modulo multipli interi di 2π) allora $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' l'applicazione identica di $\mathcal{V}_O$. Ogni matrice rappresentativa di $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' I. Percio' I e' una matrice di rotazione.

---

[13] Fissata una base ortonormale $\mathcal{C}$ di $\mathcal{V}_O$, l'applicazione delle coordinate

$$[\ \ ]_{\mathcal{C}} : \overrightarrow{OX} \in \mathcal{V}_O \to \left[\overrightarrow{OX}\right]_{\mathcal{C}} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

rispetto a tale base identifica lo spazio dei vettori geometrici $\mathcal{V}_O$ con $\mathbb{R}^3$. In questa identificazione il prodotto scalare (e vettoriale) geometrico si identifica con il prodotto scalare (e vettoriale) canonico di $\mathbb{R}^3$, e le basi ortonormali di $\mathcal{V}_O$ corrispondono alle basi ortonormali di $\mathbb{R}^3$. Inoltre gli endomorfismi di $\mathcal{V}_O$ corrispondono agli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$, e le matrici rappresentative si corrispondono.

2) Se $\alpha = \pi$ (modulo multipli interi di 2π) allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{n},\alpha}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In tal caso $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' diagonalizzabile, i suoi autovalori sono 1 e -1. L'autospazio associato all'autovalore 1 e' generato dall'asse della rotazione, mentre l'autospazio $V_{\lambda=-1}$ associato all'autovalore -1 e' il piano ortogonale all'asse. Per restrizione, $f_{\mathbf{n},\alpha}$ induce sul piano $V_{\lambda=-1}$ una rotazione di 180 gradi, cioe' l'antipodalita'.

3) In tutti gli altri casi $f_{\mathbf{n},\alpha}$ possiede soltanto un autovalore (reale) ed e' $\lambda = 1$. Infatti il polinomio caratteristico di $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' $p(t) = -(t-1)(t^2 - 2\cos\alpha + 1)$, ed il polinomio $t^2 - 2\cos\alpha + 1$ ha discriminante negativo. L'autospazio corrispondente a $\lambda = 1$ e' generato dall'asse della rotazione $\mathbf{n}$. Cio' e' coerente con il fatto che, nel movimento della rotazione, i vettori appartenenti all'asse sono gli unici vettori $\mathbf{v}$ che restano fermi (cioe' $f_{\mathbf{n},\alpha}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$).

• Denotiamo con $SO(3)$ il sottoinsieme di $O(3)$ costituito dalle matrici ortogonali con determinante 1. Tale sottoinsieme $SO(3)$ e' un sottogruppo di $O(3)$ detto *il gruppo speciale ortogonale* di ordine 3. Sappiamo che le matrici di rotazione sono matrici ortogonali speciali. Denotiamo con $Rot(\mathcal{V}_O)$ l'insieme delle rotazioni nello spazio dei vettori applicati in O. Fissata in $\mathcal{V}_O$ una base ortonormale $\mathcal{E}$, abbiamo una funzione

$$f_{\mathbf{n},\alpha} \in Rot(\mathcal{V}_O) \longrightarrow R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha}) \in SO(3).$$

Questa funzione e' iniettiva. Ora andremo a provare che e' anche suriettiva. Tenuto conto dell'osservazione (iii) precedente, cio' equivale a dire che *ogni matrice ortogonale con determinante* 1 *e' una matrice di rotazione.*

• **Proposizione.** *Sia* $R \in SO(3)$ *una matrice ortogonale con determinante* 1. *Allora* R *e' una matrice di rotazione.*

Dimostrazione della Proposizione.

Fissata una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$, sia $f : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ l'endomorfismo tale che

$$R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f).$$

Denotiamo con U il sottospazio di $\mathcal{V}_O$ costituito dai vettori $\mathbf{x}$ tali che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$:

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V}_O \,:\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

Osserviamo che

$$0 \leq \dim U \leq 3.$$

Andiamo ad esaminare i vari casi possibili.

Se $\dim U = 3$, allora f e' l'applicazione identica. In tal caso f e' una rotazione di angolo 0 rispetto a qualsiasi asse, e percio' $R = I$ e' una matrice di rotazione.

Supponiamo ora che $\dim U = 2$. Faremo vedere che questo caso non e' possibile. Sia $\mathbf{w}$ un versore ortogonale ad U (poiche' $\dim U = 2$ ci sono solo due versori siffatti, $\mathbf{w}$ e $-\mathbf{w}$). Poiche' R e' una matrice ortogonale, f non altera il prodotto scalare, cioe' per ogni $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ si ha

$$< f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > .$$

Percio', $f(\mathbf{w})$ e' ancora un versore e $f(\mathbf{w})$ e' ancora ortogonale ad U.[14] Ma allora $f(\mathbf{w}) = \pm\mathbf{w}$. Non puo' essere $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ altrimenti $\mathbf{w}$ apparterrebbe ad U. Percio' deve essere

[14] Infatti, per ogni $\mathbf{x} \in U$ si ha $< f(\mathbf{w}), \mathbf{x} >=< f(\mathbf{w}), f(\mathbf{x}) >=< \mathbf{w}, \mathbf{x} >$. Percio', se $< \mathbf{w}, \mathbf{x} >= 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$ allora anche $< f(\mathbf{w}), \mathbf{x} >= 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$. Inoltre, $< f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w}) >=< \mathbf{w}, \mathbf{w} >$. Percio', se $< \mathbf{w}, \mathbf{w} >= 1$ anche $< f(\mathbf{w}), f(\mathbf{w}) >= 1$.

$f(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$. Sia ora $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base di $\mathcal{V}_O$ ottenuta aggiungendo a $\mathbf{w}$ due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di U. La matrice rappresentativa di f rispetto a questa base e':

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\det f = -1$, contro il fatto che $\det R = 1$. Percio' se $R \in SO(3)$ allora $\dim U \neq 2$.

Esaminiamo il caso $\dim U = 1$. Sia $\mathbf{u}$ un versore di U. Sia $U^{\perp}$ il complemento ortogonale di U in $\mathcal{V}_O$. Lo spazio $U^{\perp}$ ha dimensione 2, e poiche' f preserva il prodotto scalare, allora $U^{\perp}$ e' f*-invariante*, cioe' $f(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$. Percio', f, per restrizione, induce un endomorfismo del piano $U^{\perp}$:

$$\varphi : \mathbf{x} \in U^{\perp} \to f(\mathbf{x}) \in U^{\perp}.$$

Poiche' f preserva il prodotto scalare, anche φ preserva il prodotto scalare. Percio', se $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ e' una base ortonormale di $U^{\perp}$, allora la matrice rappresentativa $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$ di φ rispetto alla base $\mathcal{C}$ e' una matrice ortogonale di ordine 2.[15] Non puo' accadere che il determinante di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi)$ sia -1, perche' una matrice ortogonale di ordine 2 con determinante -1 ammette 1 come autovalore,[16] il che e' impossibile perche' $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Quindi P e' una matrice di rotazione di ordine 2. Denotata con $\mathcal{B}$ la base ortonormale costituita dai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ed $\mathbf{u}$ (eventualmente scambiando l'ordine di $\mathbf{v}$ con $\mathbf{w}$, possiamo sempre supporre che $\mathcal{C}$ sia positiva rispetto ad $\mathbf{u}$), avremo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

per un opportuno angolo $\alpha \in \mathbb{R}$. Percio' f e' la rotazione di asse $\mathbf{u}$ di angolo α. Poiche' $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, ne consegue, per definizione, che R e' una matrice di rotazione.

Ora esaminiamo l'ultimo caso, quando $\dim U = 0$. Come vedremo, anche questo caso e' impossibile, e cio' concludera' la dimostrazione. Il polinomio carattersistico di f e' un polinomio a coefficienti reali di grado 3. Percio' deve avere un autovalore reale λ.[17] Poiche' R e' una matrice ortogonale, allora $\lambda = \pm 1$. Poiche' $\dim U = 0$, non puo' essere $\lambda = 1$, percio' $\lambda = -1$. Sia $\mathbf{n}$ un versore che sia un autovettore per f relativo all'autovalore $\lambda = -1$. Si ha $f(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$. Sia V il complemento ortogonale di $\mathit{Span}(\mathbf{n})$ in $\mathcal{V}_O$. Come nel caso precedente, V e' f*-invariante*, cioe' $f(V) \subseteq V$. Percio', f, per restrizione, induce un endomorfismo del piano V:

$$\psi : \mathbf{x} \in V \to f(\mathbf{x}) \in V.$$

Poiche' f preserva il prodotto scalare, anche ψ preserva il prodotto scalare. Percio', se $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ e' una base ortonormale di V, allora la matrice rappresentativa $P =$

---

[15]Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $U^{\perp}$ si ha

$$< [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}, [\mathbf{y}]_{\mathcal{C}} > = < \mathbf{x}, \mathbf{y} > = < \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}) > = < [\varphi(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}, [\varphi(\mathbf{y})]_{\mathcal{C}} > = < P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}, P \cdot [\mathbf{y}]_{\mathcal{C}} > .$$

[16]Sappiamo che una matrice ortogonale P di ordine 2 con determinante -1 si scrive sotto la forma

$$P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

E il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p(t) = t^2 - 1$.

[17]Il polinomio caratteristico e' un polinomio con coefficienti reali della forma $p(t) = -t^3 + O(t^2)$. Percio',

$$\lim_{t \to -\infty} p(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} p(t) = -\infty.$$

Per continuita' ci deve essere un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $p(t)_{|t=\lambda} = 0$.

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\psi)$ di ψ rispetto alla base $\mathcal{C}$ e' una matrice ortogonale di ordine 2. Non puo' accadere che il determinante di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\psi)$ sia -1, perche' una matrice ortogonale di ordine 2 con determinante -1 ammette 1 come autovalore, contro il fatto che $\dim U = 0$. Quindi, denotata con $\mathcal{B}$ la base ortonormale costituita dai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ed $\mathbf{n}$, avremo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

per un opportuno angolo $\alpha \in \mathbb{R}$. Cio' implica $\det f = -1$, in contrasto con l'ipotesi che $R \in SO(3)$. Cio' significa che, se $R \in SO(3)$, il caso $\dim U = 0$ non si puo' presentare.

Fine della dimostrazione della Proposizione.

• Nella prossima lezione vedremo alcune conseguenze di quanto ora provato. Una di queste e' il fatto che *la composizione di due rotazioni nello spazio e' ancora una rotazione.* Nel caso delle rotazioni nel piano questo fatto e' evidente, nello spazio no.

Dopo queste conseguenze ci porremo la seguente domanda. Nel caso del piano abbiamo visto che le rotazioni possono essere interpretate come *moltiplicazione per un numero complesso di modulo* 1. Esistono dei *numeri* che consentano di interpretare le rotazioni nello spazio come moltiplicazione?

Esercizi per la Lezione n. 3.

a) Sia R una matrice ortogonale 2×2 con determinante $\det R = -1$. Dimostrare che esiste un vettore $\mathbf{x}$ non nullo tale che $R \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

b) Sia R una matrice ortogonale 2×2 con determinante $\det R = 1$. Dimostrare che se esiste un vettore $\mathbf{x}$ non nullo tale che $R \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, allora $R = I$ oppure e' la matrice di rotazione di angolo π.

c) Spiegare perche' $f_{\mathbf{n},\,\alpha} = f_{-\mathbf{n},\,-\alpha}$.

d) Sia U un sottospazio di $\mathcal{V}_O$. Provare che $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

e) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O$. Sia $\mathbf{u}$ un vettore, siano $\mathbf{x}$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ (cioe' $\mathbf{u} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3$). Provare che $(0, 0, x_3)^T$ sono le coordinate della proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sul vettore $\mathbf{b}_3$.

f) A quale rotazione piana corrisponde la moltiplicazione per $-i$? A quale rotazione piana corrisponde la moltiplicazione per $-i^2$? A quale rotazione piana corrisponde la moltiplicazione per $-i^3$? A quale rotazione piana corrisponde la moltiplicazione per $-i^4$?

g) Dire quale delle seguenti matrici e' ortogonale speciale:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

h) Provare che per ogni $\psi, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$ la seguente matrice $P(\psi, \theta, \varphi)$:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e' una matrice speciale ortogonale. [18]

[18] Si puo' dimostrare che *ogni* matrice speciale ortogonale R si puo' scrivere come $R = P(\psi, \theta, \varphi)$ per opportuni angoli $\psi, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Sotto certe condizioni, tali angoli si chiamano *gli angoli di Eulero di R*. Nell'ordine, *ψ dicesi angolo di precessione di R, θ angolo di nutazione, φ angolo di rotazione propria*).

i) Sia $f_{\mathbf{n},\alpha}$ la rotazione in $\mathcal{V}_O$ di asse $\mathbf{n}$ e di angolo α. Sia $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_O$ un vettore. Sia $\mathbf{v}_{||} =< \mathbf{v}, \mathbf{n} > \mathbf{n}$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{n}$. Provare che:

$$f_{\mathbf{n},\alpha}(\mathbf{v}) = (1 - \cos\alpha)\,\mathbf{v}_{||} + \sin\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \cos\alpha\,\mathbf{v}.$$

Svolgimento. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base ortonormale positiva con $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n}$. Siano $\mathbf{x}$ le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a tale base. Sappiamo che, per definizione di rotazione, le coordinate $\mathbf{y}$ di $f_{\mathbf{n},\alpha}(\mathbf{v})$ sono date dalla formula

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

Cioe'

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Percio', per provare l'asserto e' sufficiente provare che le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore

$$(1 - \cos\alpha)\,\mathbf{v}_{||} + \sin\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \cos\alpha\,\mathbf{v} \tag{3}$$

coincidono con $\mathbf{y}$.

Ora le coordinate di $\mathbf{v}_{||}$ rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ sono $(0, 0, x_3)^T$. Le coordinate del vettore $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ sono date dal determinante

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & x_1 \\ \mathbf{b}_2 & 0 & x_2 \\ \mathbf{b}_3 & 1 & x_3 \end{bmatrix} = -x_2\mathbf{b}_1 + x_1\mathbf{b}_2.$$

Percio' le coordinate del vettore (3) sono:

$$(1 - \cos\alpha) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} + \sin\alpha \cdot \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Fine dello svolgimento dell'esercizio.

l) Sia $\mathcal{E}$ una base ortonormale. Sia $R \in SO(3)$ una matrice speciale ortogonale. Dimostrare che esiste una rotazione f tale che $R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

Svolgimento. Sia $f : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ l'applicazione lineare tale che $R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ (f e' l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_O$ di coordinate $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ associa il vettore $f(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}_O$ avente coordinate $R \cdot \mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{E}$). Poiche' $R \in SO(3)$ allora R e' una matrice di rotazione. Ma noi abbiamo osservato che se R e' una matrice di rotazione che rappresenta una applicazione lineare f allora f e' una rotazione (cfr. Osservazione (*iii*) a pag. 56).

Fine dello svolgimento dell'esercizio.

Lezione 4.

Cominciamo con alcune osservazioni sulla proposizione dimostrata nella lezione precedente.

• *Osservazioni.*

(i) Denotiamo con $Rot(\mathcal{V}_O)$ l'insieme di tutte le rotazioni di $\mathcal{V}_O$. Fissiamo una base ortonormale $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$. Tenuto conto dell'Osservazione (iii) della Lezione 3 (cfr. Esercizio l) della Lezione 3) , dalla proposizione segue che la funzione

$$f_{\mathbf{n},\alpha} \in Rot(\mathcal{V}_O) \longrightarrow R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha}) \in SO(3)$$

e' biiettiva. Poiche' $SO(3)$ e' un gruppo, dalle proprieta' della matrice rappresentativa ne consegue che *la composizione di due rotazioni nello spazio e' ancora una rotazione*. Infatti, siano f e g due rotazioni. Poiche' $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g)$, allora $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g) \in SO(3)$. Percio', $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g)$ e' ancora una matrice di rotazione. Ne consegue che $f \circ g$ e' una rotazione (cfr. Osservazione (iii), Lezione 3). Nel caso delle rotazioni nel piano questa proprieta' e' evidente, nello spazio no.

(ii) Sappiamo che l'applicazione identica di $\mathcal{V}_O$ e' una matrice di rotazione. Inoltre ogni rotazione $f_{\mathbf{n},\alpha}$ e' invertibile, in quanto $f_{\mathbf{n},\alpha}^{-1} = f_{\mathbf{n},-\alpha}$. Poiche' la composizione di due rotazioni e' una rotazione, allora la composizione fornisce all'insieme $Rot(\mathcal{V}_O)$ una struttura di gruppo. L'applicazione precedente e' un isomorfismo di gruppi:

$$Rot(\mathcal{V}_O) \cong SO(3).$$

Come vedremo tra poco utilizzando i quaternioni, esiste una corrispondenza biiettiva, in un certo senso *naturale*, tra $Rot(\mathcal{V}_O)$ e $\mathbf{P}^3_{\mathbb{R}}$. Percio' abbiamo le seguenti manifestazioni del gruppo delle rotazioni nello spazio:

$$Rot(\mathcal{V}_O) \cong SO(3) \cong \mathbf{P}^3_{\mathbb{R}}.$$

(iii) Abbiamo visto che le matrici ortogonali speciali di ordine 2 possono essere descritte utilizzando un angolo α. Le matrici ortogonali speciali di ordine 3 si possono dscrivere in funzione di tre angoli, detti *gli angoli di Eulero* (cfr. Esercizio h) della lezione precedente).

(iv) Sia $R \neq I$, $R = (r_{ij})$, una matrice ortogonale speciale di ordine 3. Consideriamo la rotazione $f(\mathbf{x}) = R \cdot \mathbf{x}$. Possiamo chiederci qual e' l'asse $\mathbf{n}$ e qual e' angolo α della rotazione f. Daremo una risposta dopo a questo problema utilizzando i quaternioni. Ma una risposta ci viene fornita anche dalla formula (2). Innanzitutto, osserviamo che, essendo la traccia di una matrice invariante per similitudine, allora la traccia di R, cioe' la somma degli elementi sulla diagonale principale, e' uguale alla traccia della matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$tr(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\alpha.$$

Percio', data f, cioe' data R, e' determinato l'angolo α della rotazione a meno del segno. D'altra parte, per cio' che concerne l'asse, sappiamo che $\mathbf{n}$ e' un autovettore relativo all'autovalore 1 per R. Quindi risolvendo il sistema lineare

$$R \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

si trova l'asse $\mathbf{n}$, determinato a meno del segno. Per stabilire se $f = f_{\mathbf{n},\alpha}$ oppure $f = f_{\mathbf{n},-\alpha}$ possiamo usare la formula (2), dove P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna le coordinate, rispetto alla base ortonormale fissata $\mathcal{E}$, dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ costruiti nel corso della dimostrazione della proposizione nel caso $\dim U = 1$ (cfr. Lezione 3).

(v) Un'altra domanda naturale nello studio delle rotazioni nello spazio, che ha una risposta semplice nel caso del piano, e' la seguente. Se $f_{\mathbf{n},\alpha}$ ed $f_{\mathbf{m},\beta}$ sono due rotazioni con assegnato asse ed angolo, qual e' l'asse e qual e' l'angolo della rotazione composta $f_{\mathbf{n},\alpha} \circ f_{\mathbf{m},\beta}$? Una risposta di carattere geometrico a questa domanda e' dovuta al gia' citato William Rowen Hamilton. La risposta di Hamilton riconduce il problema ad una specie di *regola del parallelogramma per archi di circonferenza massima sulla sfera* (cfr. Roger Penrose, *La strada che porta alla realta'*, p. 238, paragrafo 11.4, BUR Rizzoli, 2005). In alternativa, posto $R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\alpha})$ ed $S = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{m},\beta})$, si potrebbe calcolare il prodotto $R \cdot S$ e poi procedere come indicato nell'osservazione precedente. Questa e' una risposta di carattere computazionale.

(vi) Un'altra differenza importante tra il gruppo $SO(2)$ ed $SO(3)$ e' che, mentre $SO(2)$ e' un gruppo commutativo (cioe' $R \cdot S = S \cdot R$ per ogni $R, S \in SO(2)$), il gruppo $SO(3)$ non e' commutativo. Infatti, in generale $R \cdot S \neq S \cdot R$ se $R, S \in SO(3)$.

• Possiamo cominciare lo studio dei quaternioni. Ad un certo punto avremo bisogno della proprieta' dimostrata nell' Esercizio h) della Lezione precedente.

• *I quaternioni.*

Sia $\mathbb{H}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $\dim \mathbb{H} = 4$. Fissiamo una base di $\mathbb{H}$, che denoteremo in questo modo:

$$\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k},\ \mathbf{1}.$$

Se q e' un elemento di $\mathbb{H}$, allora esistono, e sono univocamente determinati, numeri reali $a, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1}.$$

Chiameremo gli elementi di $\mathbb{H}$ *quaternioni.* Dato un quaternione q come in precedenza, possiamo identificare il vettore $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ con il vettore numerico $\mathbf{v} = (a, b, c)$ di $\mathbb{R}^3$ (il quale, a sua volta, puo' essere pensato come un vettore geometrico di $\mathcal{V}_O$ se si introducono coordinate ortonormali). Il vettore $\lambda\mathbf{1}$ puo' essere pensato come un numero reale λ. Percio' possiamo rappresentare q sotto la forma

$$q = \mathbf{v} + \lambda.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ dicesi la parte immaginaria di q, mentre λ dicesi *la parte reale* di q:

$$Im(q) := \mathbf{v}, \quad Re(q) := \lambda.$$

I quaternioni con parte reale nulla si chiamano *quaternioni immaginari puri.* E' chiaro che l'insieme dei quaternioni immaginari puri formano un sottospazio di $\mathbb{H}$, che denoteremo con $Im\,\mathbb{H}$, che si identifica con $\mathbb{R}^3$: $Im\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$. Inoltre la funzione iniettiva

$$\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda\mathbf{1} \in \mathbb{H}$$

ci consente di vedere $\mathbb{R}$ come sottospazio di $\mathbb{H}$, costituito dai quaternioni con parte immaginaria nulla: $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$. Un quaternione con parte immaginaria nulla si dice *quaternione reale.*

• *Il coniugato di un quaternione.*

Dato un quaternione q si definisce *il coniugato* $\overline{q}$ di q come quel quaternione che ha la stessa parte reale di q ma parte immaginaria opposta:

$$\overline{q} := -\mathbf{v} + \lambda.$$

Si osservi che $q + \overline{q} = 2Re(q)$, mentre $q - \overline{q} = 2Im(q)$. Inoltre q e' reale se e solo se $q = \overline{q}$. E, per ogni $q \in \mathbb{H}$, si ha $\overline{\overline{q}} = q$.

• *Il corpo dei quaternioni.*

In quanto spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, l'insieme $\mathbb{H}$ possiede due operazioni, l'operazione di addizione interna, e la moltiplicazione esterna per uno scalare reale. Ci proponiamo di definire un'operazione di moltiplicazione interna su $\mathbb{H}$:

$$(q, p) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to q \cdot p \in \mathbb{H}.$$

La moltiplicazione $q \cdot p$ viene definita nel modo seguente. Dati due quaternioni

$$q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1} = \mathbf{v} + \lambda, \quad p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + \mu\mathbf{1} = \mathbf{w} + \mu,$$

eseguiamo il prodotto

$$q \cdot p = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + \mu\mathbf{1})$$

applicando la *distributivita' su* $\mathbb{R}$, imponendo $q \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot q = q$ per ogni $q \in \mathbb{H}$, e le regole di calcolo (dette *equazioni di Hamilton*):[19]

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}. \end{cases} \tag{4}$$

Quindi otteniamo:

$$q \cdot p = (a\mu + bz - cy + \lambda x)\mathbf{i} + (-az + b\mu + cx + \lambda y)\mathbf{j} + (ay - bx + c\mu + \lambda z)\mathbf{k} + (-ax - by - cz + \lambda\mu)\mathbf{1}.$$

Cioe', posto

$$q = \mathbf{v} + \lambda, \qquad p = \mathbf{w} + \mu$$

allora

$$Im(q \cdot p) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mu\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}, \qquad Re(q \cdot p) = \lambda\mu - < \mathbf{v}, \mathbf{w} > .$$

Ne consegue

$$q \cdot p - p \cdot q = 2\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \qquad Re(q \cdot p) = Re(p \cdot q)$$

per ogni $q, p \in \mathbb{H}$. Percio' in generale $q \cdot p$ e' diverso da $p \cdot q$ (cioe' non vale la proprieta' commutativa). Anzi possiamo dire che $q \cdot p = p \cdot q$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^3$. In particolare, fissato $q \in \mathbb{H}$, allora

$$\text{per ogni } p \in \mathbb{H} \quad q \cdot p = p \cdot q \iff q \in \mathbb{R}.$$

Cio' si esprime dicendo che $\mathbb{R}$ *e' il centro di* $\mathbb{H}$.

Riepilogando, sull'insieme dei quaternioni $\mathbb{H}$ ci sono tre operazioni: l'addizione interna e la moltiplicazione esterna per uno scalare reale, e la moltiplicazione interna appena definita. Con queste tre operazioni $\mathbb{H}$ viene anche chiamato *il corpo dei quaternioni.*

Esercizi per la Lezione n. 4.

a) Sia R una matrice ortogonale 2×2. Provare che R e' diagonalizzabile se e solo se $\det R = -1$ oppure R e' una matrice di rotazione di angolo $\alpha \in \{0, \pi\}$.

[19] Hamilton scopri' queste formule il 16 ottobre 1843 mentre passeggiava con sua moglie lungo il Royal Canal di Dublino, e fu talmente contento che incise immediatamente le formule su una pietra del Brougham Bridge di Dublino (R. Penrose, loc. cit.). Queste equazioni non devono essere confuse con *le equazioni di Hamilton della fisica matematica.*

b) Si consideri la rotazione $f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \to R \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dove

$$R = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calcolare l'asse $\mathbf{n}$ e l'angolo α di f.

Suggerimento. Sappiamo che, a meno del segno, l'angolo α e' determinato dalla traccia di R, mentre, a meno del segno, l'asse si ottiene risolvendo il sistema lineare $R \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di angolo $\alpha = \pi$, ed asse $\mathbf{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 1, 4)^T$. Calcolare la matrice R di f rispetto alla base canonica.

Suggerimento. Completiamo $\mathbf{n}$ a base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n}$. Per esempio, possiamo considerare il vettore $(1, -1, 0)$ che e' ortogonale ad $\mathbf{n}$. Allora poniamo $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. E poniamo $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)^T$. Cioe'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}.$$

Quindi la matrice R cercata e':

$$R = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

d) Calcolare il quaternione $q := \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$ nei seguenti due modi diversi: $q = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}$ e $q = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k})$. Verificare che il risultato e' lo stesso (questo e' un caso particolare del fatto che la moltiplicazione tra quaternioni e' associativa, ne parleremo nella prossima lezione).

e) Dimostrare la seguente formula:

$$\overline{q} = -\frac{1}{2}(q + \mathbf{i} \cdot q \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot q \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \cdot q \cdot \mathbf{k}).$$

f) Posto

$$q = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

calcolare i quaternioni

$$q \cdot \mathbf{i} \cdot \overline{q}, \quad q \cdot \mathbf{j} \cdot \overline{q}, \quad q \cdot \mathbf{k} \cdot \overline{q}$$

in due modi diversi. Prima con le equazioni di Hamilton, e poi con la formula

$$q \cdot p = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{v} + (\lambda\mu - < \mathbf{v}, \mathbf{w} >).$$

Verificare che il risultato e' lo stesso.

g) Fissato un quaternione $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda \mathbf{1}$, si consideri l'applicazione

$$L_q : p \in \mathbb{H} \to q \cdot p \in \mathbb{H}.$$

Provare che L_q e' lineare su $\mathbb{R}$, e calcolarne la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_q)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{1}\}$.

Risposta.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_q) = \begin{bmatrix} \lambda & -c & b & a \\ c & \lambda & -a & b \\ -b & a & \lambda & c \\ -a & -b & -c & \lambda \end{bmatrix}.$$

Lezione 5.

• *Il corpo dei quaternioni.*

La moltiplicazione interna che abbiamo definito su $\mathbb{H}$ soddisfa le seguenti proprieta'.

1) Per ogni $p, q, r \in \mathbb{H}$ si ha $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ (proprieta' associativa).

2) Per ogni $q \in \mathbb{H}$ si ha $q \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot q = q$ (esistenza dell'elemento neutro).

3) Per ogni $q \in \mathbb{H} \backslash \{\mathbf{0}\}$ esiste un elemento q^{-1} tale che $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = \mathbf{1}$ (esistenza dell'elemento inverso).

4) Per ogni $p, q, r \in \mathbb{H}$ si ha $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ e $(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$ (proprieta' distributiva).

Vedremo tra poco come si calcola l'inverso di un quaternione non nullo.

Riepilogando, sull'insieme dei quaternioni $\mathbb{H}$ ci sono tre operazioni: l'addizione interna e la moltiplicazione esterna per uno scalare reale, e la moltiplicazione interna appena definita. Con queste tre operazioni $\mathbb{H}$ viene anche chiamato *il corpo dei quaternioni* (il termine corpo sottolinea il fatto che la moltiplicazione interna non e' commutativa, altrimenti si usa il termine *campo*, ad esempio si dice *il campo dei numeri reali* $\mathbb{R}$, o anche *il campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$). Si osservi che la moltiplicazione interna per un quaternione reale $q = \lambda \in \mathbb{R}$ coincide con la moltiplicazione esterna per lo scalare q.

Un "modello concreto" dei quaternioni si puo' ottenere in questo modo. Sia $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,2)$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 con entrate complesse. Consideriamo le seguenti matrici:

$$\mathbf{i}^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $\mathbb{H}^*$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,2)$ costituito da tutte le combinazioni lineari con coefficienti reali delle precedenti matrici $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*, \mathbf{1}^*$. Allora $\mathbb{H}^*$ e' un sottospazio vettoriale reale di $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,2)$ di dimensione 4, *stabile* rispetto alla moltiplicazione righe per colonna tra matrici, e, per $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*, \mathbf{1}^*$ valgono le equazioni di Hamilton (4). Con le operazioni di spazio vettoriale ed il prodotto righe per colonne, l'insieme $\mathbb{H}^*$ acquista una struttura di corpo, che si identifica con il corpo dei quaternioni: $\mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}$. Si osservi che con questa diversa definizione non e' necessario provare le proprieta' della moltiplicazione interna di $\mathbb{H}$, perche' sono ereditate dalle proprieta' della moltiplicazione righe per colonna di $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2,2)$.

• *Norma di un quaternione e le proprieta' della norma.*

Consideriamo un quaternione $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1}$. Si definisce *norma* di q il seguente numero reale:[20]

$$||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2} \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se scriviamo q sotto la forma $q = Im(q) + Re(q) = \mathbf{v} + \lambda$, allora

$$||q||^2 = ||Im(q)||^2 + ||Re(q)||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + \lambda^2.$$

Ricordiamo le proprieta' della norma.

1) Per ogni $q \in \mathbb{H}$ si ha $||q|| \geq 0$, e $||q|| = 0$ se e solo se $q = 0$.

2) Per ogni $q \in \mathbb{H}$ ed ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $||c \cdot q|| = |c| \cdot ||q||$.

3) Per ogni $q, r \in \mathbb{H}$ si ha $||q + r|| \leq ||q|| + ||p||$ (*diseguaglianza triangolare*).

Dalla seconda proprieta' segue che, se $q \neq 0$, allora

$$\frac{1}{||q||} \cdot q$$

[20] La norma si dice anche *lunghezza* o anche *modulo*.

e' un quaternione di norma 1. I quaternioni di norma 1 si chiamano *quaternioni unitari*, e costituiscono gli elementi della sfera unitaria S^3 di $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \,:\, ||q|| = 1\} = \{q \in \mathbb{H} \,:\, a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2 = 1\}.$$

Osserviamo che

$$q \cdot \overline{q} = ||q||^2 = \overline{q} \cdot q.$$

Percio', se $q \neq 0$, dividendo per la norma si ottiene

$$q^{-1} = \frac{1}{||q||} \cdot \overline{q}.$$

Cio' prova l'esistenza dell'inverso[21]. Si osservi che

$$||q|| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q^{-1} = \overline{q}.$$

Osserviamo anche che

$$\overline{q \cdot p} = \overline{p} \cdot \overline{q}.$$

Infatti, posto $q = \mathbf{v} + \lambda$ e $p = \mathbf{w} + \mu$, da una parte abbiamo

$$\overline{q \cdot p} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v} - \lambda\mathbf{w} - \mu\mathbf{v}) + (\lambda\mu - <\mathbf{v}, \mathbf{w}>).$$

Dall'altra

$$\overline{p} \cdot \overline{q} = (-\mathbf{w} + \mu) \cdot (-\mathbf{v} + \lambda) = (\mathbf{w} \times \mathbf{v} - \lambda\mathbf{w} - \mu\mathbf{v}) + (\lambda\mu - <\mathbf{v}, \mathbf{w}>).$$

Come conseguenza, deduciamo che per ogni $p, q \in \mathbb{H}$ si ha[22]

$$||q \cdot p|| = ||q|| \cdot ||p||.$$

Infatti

$$||q \cdot p||^2 = (q \cdot p) \cdot (\overline{q \cdot p}) == (q \cdot p) \cdot (\overline{p} \cdot \overline{q}) = q \cdot (p \cdot \overline{p}) \cdot \overline{q} = ||p||^2 \cdot (q \cdot \overline{q}) = ||p||^2 \cdot ||q||^2.$$

Percio', se q e p sono entrambi non nulli, allora anche $q \cdot p$ non e' nullo e

$$(q \cdot p)^{-1} = p^{-1} \cdot q^{-1}.$$

Infatti

$$(q \cdot p)^{-1} = \frac{1}{||q \cdot p||}(\overline{q \cdot p}) = \frac{1}{||q|| \cdot ||p||}(\overline{p} \cdot \overline{q}) = \left(\frac{1}{||p||}\overline{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{||q||}\overline{q}\right) = p^{-1} \cdot q^{-1}.$$

- *Struttura di gruppo di* S^3.

Nello studio dei numeri complessi abbiamo visto che il prodotto di due numeri complessi di lunghezza 1 e' ancora un numero complesso di lunghezza 1. Da cio' abbiamo dedotto che l'operazione di moltiplicazione complessa induce su S^1 una struttura di gruppo. Poiche' anche il prodotto di due quaternioni unitari e' ancora un quaternione unitario, cosi' come S^1, anche S^3 ha una struttura di gruppo, indotta dalla moltiplicazione interna di $\mathbb{H}$ (si tenga presente che la moltiplicazione tra quaternioni soddisfa la proprieta' associativa). Si osservi che mentre S^1 e' un gruppo *commutativo*, cioe' se $z, w \in S^1$ allora $z \cdot w = w \cdot z$, questo non e' vero per S^3. Il gruppo S^3 non e' un gruppo commutativo.[23]

- *Rappresentazione dei quaternioni unitari.*

Sia $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1} = \mathbf{v} + \lambda$ un quaternione unitario:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2 = 1.$$

[21] Come conseguenza della proprieta' associativa si prova che l'inverso e' unico.
[22] In particolare $||q^{-1}|| = ||q||^{-1}$.
[23] Un gruppo commutativo si dice anche *gruppo abeliano*.

Poiche'

$$1 = ||q||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + \lambda^2,$$

allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$||\mathbf{v}|| = \sin\alpha, \quad \lambda = \cos\alpha.$$

Nel caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, posto

$$\mathbf{n} = \frac{1}{||\mathbf{v}||} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \mathbf{v},$$

allora $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ e' un quaternione immaginario puro unitario e

$$q = \mathbf{v} + \lambda = ||\mathbf{v}|| \left(\frac{1}{||\mathbf{v}||} \cdot \mathbf{v} \right) + \lambda = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha.$$

Cioe' possiamo mettere q nella forma

$$q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3, \quad ||\mathbf{n}|| = 1.$$

Possiamo rappresentare in questo modo q anche se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. In tal caso e' sufficiente assumere $\alpha = \pm\pi$ a seconda che λ sia 1 oppure -1, e scegliere come $\mathbf{n}$ un qualsiasi versore di $\mathbb{R}^3$.

Esercizi per la Lezione n. 5.

a) Dimostrare che $\mathbb{H}^*$ e' stabile rispetto alla moltiplicazione righe per colonna.

b) Provare che il quaternione

$$q = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e' unitario.

c) Scrivere il quaternione dell'esercizio precedente nella forma $q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$.

d) Sia q il quaternione dell'esercizio b). Calcolare i quaternioni

$$q \cdot \mathbf{i} \cdot q^{-1}, \quad q \cdot \mathbf{j} \cdot q^{-1}, \quad q \cdot \mathbf{k} \cdot q^{-1}.$$

Provare che tali quaternioni sono tutti immaginari puri.

e) Sia $\mathbf{v}$ un quaternione immaginario puro. Sia q un quaternione non nullo. Provare che $q \cdot \mathbf{v} \cdot q^{-1}$ e' un quaternione immaginario puro.

f) Sia q un quaternione non nullo. Provare che l'applicazione

$$\varphi_q : p \in \mathbb{H} \to q \cdot p \cdot q^{-1} \in \mathbb{H}$$

e' lineare su $\mathbb{R}$. Nel caso in cui q sia il quaternione dell'esercizio 2), calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_q)$ di φ_q rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{1}\}$ (utilizzare l'esercizio d)).

g) Fissato un quaternione $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1}$, si consideri l'applicazione

$$R_{\overline{q}} : p \in \mathbb{H} \to p \cdot \overline{q} \in \mathbb{H}.$$

Provare che $R_{\overline{q}}$ e' lineare su $\mathbb{R}$, e calcolarne la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R_{\overline{q}})$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{1}\}$.

Risposta.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R_{\overline{q}}) = \begin{bmatrix} \lambda & -c & b & -a \\ c & \lambda & -a & -b \\ -b & a & \lambda & -c \\ a & b & c & \lambda \end{bmatrix}.$$

Lezione 6.

• *Rappresentazione dei quaternioni unitari.*

Sia $q \in S^3$ un quaternione unitario. Abbiamo visto che possiamo rappresentare q nella forma

$$q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$$

per un opportuno versore $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ ed un opportuno $\alpha \in \mathbb{R}$.

Viceversa, se q e' un quaternione che si puo' rappresentare nella forma

$$q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha,$$

con $||\mathbf{n}|| = 1$, e' chiaro che q e' un quaternione unitario. In altre parole, la funzione

$$(\alpha,\, \mathbf{n}) \in \mathbb{R} \times S^2 \longrightarrow q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha \in S^3$$

e' una funzione suriettiva. Abbiamo denotato con S^2 la sfera di $\mathbb{R}^3$, cioe'

$$S^2 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \,:\, ||\mathbf{n}|| = 1\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

• *La coniugazione per un quaternione invertibile.*

Fissiamo un quaternione invertibile q. *La coniugazione per* q e' la funzione:

$$\varphi_q : p \in \mathbb{H} \longrightarrow q \cdot p \cdot q^{-1} \in \mathbb{H}.$$

Si osservi che φ_q e' un'applicazione lineare di $\mathbb{H}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e conserva anche la moltiplicazione interna, cioe' φ_q e' un endomorfismo di $\mathbb{H}$ come corpo. Se poniamo

$$q_1 = \frac{1}{||q||} \cdot q,$$

allora q_1 e' un quaternione unitario, e $\varphi_q = \varphi_{q_1}$. Percio', nello studio di φ_q possiamo sempre assumere che q sia un quaternione unitario. Poiche' $Re(q \cdot p \cdot q^{-1}) = Re(p)$, allora φ_q porta quaternioni immaginari puri in quaternioni immaginari puri. Inoltre, se λ e' un quaternione reale, e' chiaro che $\varphi_q(\lambda) = \lambda$. Quindi, se $p = \mathbf{w} + \mu$, allora la decomposizione in parte immaginaria e parte reale di $\varphi_q(p)$ e':

$$\varphi_q(p) = q \cdot \mathbf{w} \cdot q^{-1} + \mu.$$

Denotiamo con ψ_q

$$\psi_q : \mathbf{v} \in Im\,\mathbb{H} \longrightarrow q \cdot \mathbf{v} \cdot q^{-1} \in Im\,\mathbb{H}$$

la restrizione di φ_q allo spazio $Im\,\mathbb{H}$ dei quaternioni immaginari puri.

• Possiamo identificare $Im\,\mathbb{H}$ con $\mathbb{R}^3$, facendo corrispondere il quaternione immaginario puro $\mathbf{v} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ al vettore numerico $(x, y, z)^T$. In tal modo possiamo pensare alla base $\{\mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k}\}$ di $Im\,\mathbb{H}$ come alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, fissando una base ortonormale positiva $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$, possiamo identificare $\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{V}_O$. In questa identificazione la base $\mathcal{E}$ corrisponde alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, il prodotto scalare geometrico di $\mathcal{V}_O$ corrisponde al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$, e il prodotto vettoriale di $\mathcal{V}_O$ corrsponde al prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

• Finalmente possiamo vedere il nesso tra le rotazioni nello spazio ed i quaternioni.

Proposizione. *Sia* $q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$ *un quaternione unitario. Sia*

$$\psi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

la coniugazione per q *ristretta sui quaternioni immaginari puri:*

$$\psi_q(\mathbf{v}) = q \cdot \mathbf{v} \cdot q^{-1}.$$

Allora $\psi_q = f_{\mathbf{n},\,2\alpha}$. *Cioe'* ψ_q *e' la rotazione di asse* $\mathbf{n}$ *di angolo* 2α.

Dimostrazione della Proposizione. Nell'esercizio i) della Lezione 3 abbiamo visto che

$$f_{\mathbf{n},\,2\alpha}(\mathbf{v}) = (1-\cos 2\alpha)\cdot \mathbf{v}_{||} + \sin 2\alpha \cdot (\mathbf{n}\times \mathbf{v}) + \cos 2\alpha \cdot \mathbf{v},$$

dove $\mathbf{v}_{||} =< \mathbf{n}, \mathbf{v} > \mathbf{n}$ e' la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{n}$. Percio', per provare la Proposizione e' sufficiente provare che

$$q\cdot \mathbf{v}\cdot q^{-1} = (1-\cos 2\alpha)\cdot \mathbf{v}_{||} + \sin 2\alpha \cdot (\mathbf{n}\times \mathbf{v}) + \cos 2\alpha \cdot \mathbf{v}.$$

Ora abbiamo:

$$q\cdot \mathbf{v}\cdot q^{-1} = (\sin\alpha\cdot \mathbf{n} + \cos\alpha)\cdot \mathbf{v}\cdot (-\sin\alpha\cdot \mathbf{n}+\cos\alpha)$$

$$= (\sin\alpha\cdot \mathbf{n}\cdot \mathbf{v} + \cos\alpha\cdot \mathbf{v})\cdot (-\sin\alpha\cdot \mathbf{n}+\cos\alpha)$$

$$= -\sin^2\alpha\cdot \mathbf{n}\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} + \sin\alpha\cos\alpha\cdot \mathbf{n}\cdot \mathbf{v} - \sin\alpha\cos\alpha\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} + \cos^2\alpha\cdot \mathbf{v}$$

$$= -\sin^2\alpha\cdot \mathbf{n}\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} + \sin\alpha\cos\alpha\cdot (\mathbf{n}\cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot \mathbf{n}) + \cos^2\alpha\cdot \mathbf{v}.$$

Prima di continuare nel calcolo osserviamo quanto segue. Innanzitutto

$$\mathbf{n}\cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n}\times \mathbf{v} - < \mathbf{n}, \mathbf{v} >) - (\mathbf{v}\times \mathbf{n} - < \mathbf{v}, \mathbf{n} >) = 2\cdot (\mathbf{n}\times \mathbf{v}).$$

Poi, per valutare il prodotto $\mathbf{n}\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n}$, osserviamo

$$\mathbf{n}\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n}\times \mathbf{v} - < \mathbf{n}, \mathbf{v} >)\cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{n}\times \mathbf{v})\times \mathbf{n}] - \mathbf{v}_{||}.$$

Per calcolare $(\mathbf{n}\times \mathbf{v})\times \mathbf{n}$ conviene considerare le coordinate rispetto ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, con $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n}$. In tal caso, se denotiamo con $(x_1, x_2, x_3)^T$ le coordinate di $\mathbf{v}$, allora le coordinate del vettore $\mathbf{n}\times \mathbf{v}$ sono $(-x_2, x_1, 0)^T$, e percio' le coordinate del vettore $(\mathbf{n}\times \mathbf{v})\times \mathbf{n}$ sono $(x_1, x_2, 0)^T$. Tenuto conto che le coordinate di $\mathbf{v}_{||}$ sono $(0, 0, x_3)^T$, allora $(\mathbf{n}\times \mathbf{v})\times \mathbf{n} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$. Quindi

$$\mathbf{n}\cdot \mathbf{v}\cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{||}.$$

Possiamo continuare il calcolo di $q\cdot \mathbf{v}\cdot q^{-1}$.

$$q\cdot \mathbf{v}\cdot q^{-1} = -\sin^2\alpha\cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{||}) + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot (\mathbf{n}\times \mathbf{v}) + \cos^2\alpha\cdot \mathbf{v}$$

$$= (1-\cos 2\alpha)\cdot \mathbf{v}_{||} + \sin 2\alpha\cdot (\mathbf{n}\times \mathbf{v}) + \cos 2\alpha\cdot \mathbf{v}.$$

Fine della dimostrazione della Proposizione.

Esercizi per la Lezione n. 6.

a) Provare che $||q^{-1}|| = ||q||^{-1}$.

b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse $\mathbf{n} = (1,0,0)^T$ ed angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Qual e' il quaternione unitario che induce f?

c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse $\mathbf{n} = (1,0,0)^T$ ed angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Calcolare la matrice rappresentativa $R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ utilizzando i quaternioni.

Suggerimento. Sia q il quaternione unitario che induce f. Allora calcoliamo $q\cdot \mathbf{i}\cdot q^{-1}$. Tale quaternione e' della forma $r_{11}\mathbf{i} + r_{21}\mathbf{j} + r_{31}k$. La prima colonna di R e' data dagli scalari r_{11}, r_{21}, r_{31}. Le altre colonne si ottengono calcolando $q\cdot \mathbf{j}\cdot q^{-1}$ e $q\cdot \mathbf{k}\cdot q^{-1}$.

d) Risolvere l'esercizio precedente senza utilizzare i quaternioni, ma la definizione di rotazione.

Suggerimento. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale positiva avente come terzo vettore $\mathbf{b}_3 = \mathbf{n} = (1,0,0)^T$. Allora

$$R = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

e) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica e'

$$R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Calcolare asse ed angolo di f.

Lezione 7.

Cominciamo con alcune osservazioni concernenti la Proposizione dimostrata.

• *Osservazioni.* (*i*) Come conseguenza della Proposizione dimostrata nella lezione precedente, possiamo dire che la funzione

$$\Phi : q \in S^3 \longrightarrow \psi_q \in Rot(\mathcal{V}_O)$$

e' ben posta ed e' suriettiva (fissata una base ortonormale positiva $\mathcal{E}$ di $\mathcal{V}_O$ possiamo identificare $\mathcal{V}_O$ con $\mathbb{R}^3$, e la base scelta con la base canonica di $\mathbb{R}^3$). Si osservi che tale funzione e' un omomorfismo di gruppi, cioe' $\psi_{q\cdot p} = \psi_q \circ \psi_p$. Osserviamo anche che

$$\Phi(q) = \Phi(p) \iff \psi_q = \psi_p \iff \varphi_q = \varphi_p$$
$$\iff \forall r \in \mathbb{H} \quad q \cdot r \cdot q^{-1} = p \cdot r \cdot p^{-1} \iff \forall r \in \mathbb{H} \quad (p^{-1} \cdot q) \cdot r = r \cdot (p^{-1} \cdot q)$$
$$\iff p^{-1} \cdot q \in \mathbb{R} \iff q = \pm p.$$

In altri termini, *due quaternioni unitari q e p inducono la stessa rotazione se e solo se $q = p$ oppure $q = -p$.* Ne consegue che la funzione Φ induce una corrispondenza *biiettiva* tra l'insieme delle coppie $\{p, -p\}$ di punti antipodali della sfera S^3 ed il gruppo delle rotazioni. Ma l'insieme delle coppie $\{p, -p\}$ di punti antipodali della sfera S^3 si identifica con l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^4$ per l'origine. In conclusione, la funzione Φ induce una corrispondenza biiettiva tra lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbb{R}}$ ed il gruppo delle rotazioni:

$$Rot(\mathcal{V}_O) \cong \mathbf{P}^3_{\mathbb{R}} \cong SO(3).$$

(*ii*) Consideriamo il quaternione unitario $\mathbf{i}$. Possiamo identificare $\mathbf{i}$ con il versore $\mathbf{e}_1$ dell'asse delle ascisse in $\mathbb{R}^3$. Poiche'

$$\mathbf{i} = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{i} + \cos\frac{\pi}{2},$$

dalla Proposizione precedente deduciamo che *la coniugazione per* $\mathbf{i}$ *corrisponde alla rotazione di* 180 *gradi intorno all'asse delle ascisse.* Questo fatto e' un po' sorprendente se si tiene presente che *la moltiplicazione complessa per il numero complesso i corrisponde alla rotazione piana di* 90 *gradi.*

(*iii*) Fissiamo un quaternione unitario q. Si ricordi che $q^{-1} = \overline{q}$. Sia

$$\psi_q : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \to q \cdot \mathbf{v} \cdot q^{-1} \in \mathbb{R}^3$$

la rotazione corrispondente. Allora la matrice R della rotazione ψ_q rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ puo' essere calcolata nel seguente modo. Si calcola $q \cdot \mathbf{i} \cdot q^{-1}$. Essendo tale quaternione un quaternione immaginario puro avra' solo componenti relative ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Cioe', per opportuni scalari reali r_{11}, r_{21}, r_{31} si deve avere

$$q \cdot \mathbf{i} \cdot q^{-1} = r_{11}\mathbf{i} + r_{21}\mathbf{j} + r_{31}\mathbf{k}.$$

Questi scalari, messi in colonna, formano la prima colonna della matrice R. Similmente si calcolano le altre due colonne, considerando i quaternioni $q \cdot \mathbf{j} \cdot q^{-1}$ e $q \cdot \mathbf{k} \cdot q^{-1}$.

(*iv*) Possiamo calcolare la matrice R in un modo un po' diverso. Consideriamo il nostro quaternione unitario

$$q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda\mathbf{1} = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha.$$

Per coniugazione ristretta su $\mathbb{R}^3$, q definisce la rotazione $f_{\mathbf{n},\,2\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse $\mathbf{n}$ ed angolo 2α (l'angolo si raddoppia, attenzione). Ora, invece di considerare la funzione ristretta ψ_q, consideriamo la coniugazione su tutto $\mathbb{H}$:

$$\varphi_q : p \in \mathbb{H} \to q \cdot p \cdot q^{-1} \in \mathbb{H}.$$

Sappiamo che φ_q e' un'applicazione lineare e che

$$\varphi_q(\mathbf{v}+\lambda) = \psi_q(\mathbf{v}) + \lambda.$$

Possiamo riguardare la funzione φ_q come la composta delle due applicazioni lineari $R_{q^{-1}}$ ed L_q (cfr. Lezioni 4 e 5, Esercizio g)):

$$\varphi_q = R_{q^{-1}} \circ L_q.$$

Percio', la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_q)$ di φ_q rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{1}\}$ e' data dal prodotto:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_q) = \begin{bmatrix} \lambda & -c & b & -a \\ c & \lambda & -a & -b \\ -b & a & \lambda & -c \\ a & b & c & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & -c & b & a \\ c & \lambda & -a & b \\ -b & a & \lambda & c \\ -a & -b & -c & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 - c^2 - b^2 + a^2 & 2(ab - \lambda c) & 2(\lambda b + ac) & 0 \\ 2(ab + \lambda c) & \lambda^2 + b^2 - a^2 - c^2 & 2(bc - \lambda a) & 0 \\ 2(ac - \lambda b) & 2(bc + \lambda a) & \lambda^2 + c^2 - a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che la matrice che si ottiene cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna e' la matrice di rotazione R:

$$R = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{n},\,2\alpha}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - c^2 - b^2 + a^2 & 2(ab - \lambda c) & 2(\lambda b + ac) \\ 2(ab + \lambda c) & \lambda^2 + b^2 - a^2 - c^2 & 2(bc - \lambda a) \\ 2(ac - \lambda b) & 2(bc + \lambda a) & \lambda^2 + c^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix}.$$

Riepilogando, se $q = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}+\lambda\mathbf{1}$ e' un quaternione unitario (quindi $a^2+b^2+c^2+\lambda^2 = 1$), allora la matrice della rotazione corrispondente a q e' la matrice R di cui sopra.

(v) Viceversa, data una matrice di rotazione R, dalla formula precedente possiamo ricavare il quaternione corrispondente. Infatti, data una matrice di rotazione

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

confrontando con l'espressione precedente di R si evince che:

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(1 + tr(R)) = \frac{1}{4}(1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}).$$

Fissiamo uno dei due valori di λ che risolvono l'equazione precedente, per esempio [24]

$$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.$$

Se $\lambda \neq 0$ allora possiamo calcolare a, b, c con le formule

$$r_{32} - r_{23} = 4\lambda a \implies a = \frac{1}{4\lambda}(r_{32} - r_{23});$$

$$r_{13} - r_{31} = 4\lambda b \implies b = \frac{1}{4\lambda}(r_{13} - r_{31});$$

$$r_{21} - r_{12} = 4\lambda c \implies c = \frac{1}{4\lambda}(r_{21} - r_{12}).$$

Con un ragionamento analogo si esamina il caso $\lambda = 0$.

Esercizi per la Lezione n. 7.

a) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$ ed angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Qual e' il quaternione unitario che induce f?

[24] Si ricordi che il quaternione e' determinato a meno del segno.

b) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1,2,2)^T$ ed angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Calcolare la matrice rappresentativa $R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ utilizzando i quaternioni.

c) Risolvere l'esercizio precedente senza utilizzare i quaternioni, ma la definizione di rotazione.

d) Sia f la rotazione dell'esercizio precedente. Calcolare l'immagine tramite f dei seguenti vettori: $\mathbf{v} = (1,2,2)^T$, $\mathbf{w} = (1,1,1)^T$, $\mathbf{z} = (1,0,0)^T$.

e) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica e'

$$R = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}.$$

Calcolare asse ed angolo di f utilizzando la traccia di R e l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

f) Risolvere l'esercizio precedente identificando il quaternione unitario associato ad f.

g) Provare che la funzione

$$\Phi : q \in S^3 \longrightarrow \psi_q \in Rot(\mathcal{V}_O)$$

e' un omomorfismo di gruppi, cioe' che $\Phi(q \cdot r) = \Phi(q) \circ \Phi(r)$.

h) Provare che per ogni $q, p \in \mathbb{H}$ si ha

$$\varphi_q = \varphi_p \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_q = \psi_p.$$

i) Qual e' la rotazione corrispondente al quaternione $\mathbf{j}$?

l) Qual e' la rotazione corrispondente al quaternione $\mathbf{k}$?

m) Sia $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda$ un quaternione unitario. Si assuma $\lambda = 0$. Rappresentare q sotto la forma $q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{n} \in S^2$.

n) Sia $U = Span(\mathbf{u})$ una retta di $\mathbb{R}^4$. Provare che

$$U \cap S^3 = \left\{ \frac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u}, -\frac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u} \right\}.$$

o) Sia

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

una matrice di rotazione. Si assuma che $tr(R) = -1$. Calcolare il quaternione corrispondente ad R.

Svolgimento. Sia $q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + \lambda$ il quaternione unitario corrispondente ad R. Poiche' $tr(R) = -1$ allora sappiamo che $\lambda = 0$. Percio', tenuto conto che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, la matrice R ha la seguente forma:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{1+r_{11}}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{1+r_{22}}{2}} \\ c = \pm\sqrt{\frac{1+r_{33}}{2}}. \end{cases}$$

Per fissare le idee supponiamo $a \neq 0$. Allora possiamo scegliere

$$a = \sqrt{\frac{1 + r_{11}}{2}}.$$

Di conseguenza deve essere

$$b = \frac{r_{12}}{\sqrt{2(1 + r_{11})}}, \quad c = \frac{r_{13}}{\sqrt{2(1 + r_{11})}}.$$

p) Si consideri la seguente matrice

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Provare che R e' una matrice di rotazione. Calcolare il quaternione unitario corrispondente ad R. Calcolare asse ed angolo della rotazione definita da R.

q) Sia f la rotazione indotta dal quaternione unitario q. Sia g la rotazione indotta dal quaternione unitario r. Qual e' il quaternione unitario che definisce la rotazione composta $f \circ g$?

Risposta. E' il quaternione $q \cdot r$.

r) Sia f la rotazione di asse il vettore $(1, 0, 0)^T$ ed angolo π. Sia g la rotazione di asse il vettore $(0, 1, 0)^T$ ed angolo π. Determinare asse ed angolo della rotazione composta $f \circ g$.

s) Sia f la rotazione indotta dal quaternione unitario $q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$. Sia g la rotazione indotta dal quaternione unitario $r = \sin\beta \cdot \mathbf{m} + \cos\beta$. Sia γ l'angolo della rotazione $f \circ g$. Calcolare $\cos\gamma$ in funzione di α, β, $\mathbf{n}$, ed $\mathbf{m}$.

Risposta. $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot < \mathbf{n}, \mathbf{m} >$.

t) Si considerino i quaternioni unitari $q = \sin\alpha \cdot \mathbf{n} + \cos\alpha$ ed $r = \sin\beta \cdot \mathbf{m} + \cos\beta$. Scrivere la parte immaginaria e la parte reale di $q \cdot r$.

u) Con riferimento all'esercizio precedente, nel caso in cui $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{m}$ siano ortogonali, calcolare l'asse della rotazione indotta da $q \cdot r$.

Suggerimento. Una volta scritto $q \cdot r$ nella forma $q \cdot r = \mathbf{w} + \mu$, allora l'asse e' $\frac{1}{||\mathbf{w}||} \cdot \mathbf{w}$.

v) Esporre l'argomento geometrico di Hamilton secondo cui *le rotazioni si compongono come si sommano i vettori geometrici* (cfr. Roger Penrose, *La strada che porta alla realta'*, p. 238, paragrafo 11.4, BUR Rizzoli, 2005). Questo argomento e' spiegato anche qui: *https://www.mathoman.com/1689-une-belle-methode-pour-determiner-la-composee-de-deux-rotations/*.

w) Verificare con un calcolo diretto che la seguente matrice R e' una matrice ortogonale speciale:

$$R = \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 2 - 6\sqrt{3} & 2 + 6\sqrt{3} \\ 2 + 6\sqrt{3} & 13 & 4 - 3\sqrt{3} \\ 2 - 6\sqrt{3} & 4 + 3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}.$$