Calcolo del rango utilizzando i determinanti.

Sia A una matrice $m \times n$. Una sottomatrice quadrata M $q \times q$ di A si dice *minore di A di ordine q*. Un minore M si dice *nonsingolare* se $\det(M) \neq 0$. Altrimenti si dice *singolare*.

Teorema 1. *Il rango di una matrice e' l'ordine massimo dei suoi minori nonsingolari.*

Sia A una matrice di rango p. In base al Teorema 1 esiste un minore di A di ordine p nonsingolare, e tutti i minori di A aventi ordine maggiore di p sono singolari. Un minore nonsingolare di A di ordine pari al rango di A si dice *minore fondamentale di A*.

Teorema 2. *Sia M un minore fondamentale $p \times p$ di una matrice A. Supponiamo che M si ottenga da A considerando le componenti comuni alle righe $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ ed alle colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_p}$ di A. Allora p e' il rango di A. Inoltre $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ formano una base per lo spazio delle righe di A, e $A^{j_1}, \dots, A^{j_p}$ formano una base per lo spazio delle colonne di A.*

Sia N un minore di A di ordine $q+1 \times q+1$, e sia M un minore di N di ordine q. Allora si dice che *N e' un orlato di M in A*.

Teorema 3 (degli orlati). *Sia M un minore nonsingolare di una matrice A. Se tutti gli orlati di M in A sono singolari allora M e' un minore fondamentale di A.*

Esempio. *Si consideri la seguente matrice*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Allora la sottomatrice

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e' il minore di A, ottenuto prendendo le componenti comuni alle prime tre righe di A, cioe' A_1, A_2, A_3, ed alla seconda, terza e quarta colonna di A, cioe' A^2, A^3, A^4. Un calcolo prova che $\det(M) \neq 0$, *cioe' M e' un minore nonsingolare di A.*

Ci sono solo due orlati di M in A, e sono le matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

La prima si ottiene orlando M con la prima colonna di A e l'ultima riga di A, e la seconda si ottiene orlando M con la quinta colonna e l'ultima riga.

Poiche' questi due orlati sono singolari, allora per il Teorema degli orlati M e' un minore fondamentale di A. Inoltre le righe $(0, 2, -1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 0)$ di A formano una base per lo spazio delle righe di A. E le colonne $(2, 0, 1, 5)^T$, $(-1, 1, 0, -3)^T$, $(1, -1, 1, 4)^T$ di A formano una base per lo spazio delle colonne di A.