La matrice rappresentativa.

Sia $f : V \to V'$ un operatore lineare, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b}'_1, \dots, \mathbf{b}'_m\}$ una base di V'. Si definisce *matrice rappresentativa di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$* quella matrice A, con m righe ed n colonne, la cui colonna di posto j e' data dal vettore delle coordinate di $f(\mathbf{b}_j)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Denoteremo tale matrice anche con il simbolo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) := A.$$

Andiamo a provare che:

Proposizione. *Per ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ si ha:*

$$[\, f(\mathbf{u})\,]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot [\,\mathbf{u}\,]_{\mathcal{B}}.$$

Cioe' le coordinate di $f(\mathbf{u})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si ottengono moltiplicando il vettore delle coordineate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, per la matrice rappresentativa di f.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u}$ un qualunque vettore di V, con coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = [\,\mathbf{u}\,]_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Siano poi $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T = [\, f(\mathbf{u})\,]_{\mathcal{B}'}$ le coordinate di $f(\mathbf{u})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Vogliamo provare che

$$\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x},$$

dove, come prima, $A = (a_{ij})$ denota la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ di f. Poiche' $\mathbf{x}$ e' il vettore delle coordinate di $\mathbf{u}$ allora abbiamo

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{b}_j.$$

Quindi

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{b}_j\right).$$

Poiche' f e' lineare possiamo scrivere

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{b}_j).$$

D'altra parte, per definizione di matrice rappresentativa, sappiamo che

$$f(\mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{b}'_i.$$

Quindi sostituendo $\sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{b}'_i$ al posto di $f(\mathbf{b}_j)$ deduciamo

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{b}'_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) \mathbf{b}'_i.$$

Questa uguaglianza esprime $f(\mathbf{u})$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{b}'_i$ della base $\mathcal{B}'$, con peso di posto i dato da $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Quindi per la stessa definizione di $\mathbf{y} = [\,f(\mathbf{u})\,]_{\mathcal{B}'}$ deve essere

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

per ogni i. Poiche'

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix},$$

allora possiamo dire che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, y_i e' il prodotto punto della riga di posto i di A per la colonna $\mathbf{x}$. Per definizione di prodotto tra matrici questo vuol dire proprio che $\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$, che e' quanto volevamo dimostrare. Cio' conclude la dimostrazione della Proposizione.

Osservazioni.

1) Consideriamo di nuovo la matrice

$$A := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f),$$

cioe' la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Abbiamo appena dimostrato che per ogni vettore $\mathbf{u}$ di V si ha

$$[f(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}.$$

Possiamo interpretare tale proprieta' al seguente modo.

Poiche' tramite l'applicazione delle coordinate possiamo identificare V con $\mathbf{R}^n$ e V' con $\mathbf{R}^m$ ($\dim(V) = n$, $\dim(V') = m$) allora all' applicazione $f : V \to V'$ corrisponde una applicazione

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

Andiamo a vedere come agisce tale applicazione. Sia $\mathbf{x}$ il generico vettore di $\mathbf{R}^n$. A tale vettore corrisponde tramite l'inversa dell'applicazione delle coordinate

$$[\quad]_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbf{R}^n \to V$$

il vettore $\mathbf{u}$ di V tale che $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$. Su questo vettore $\mathbf{u}$ agisce la funzione f trasformandolo in $f(\mathbf{u})$. Ed a tale vettore $f(\mathbf{u})$ corrisponde, tramite l'applicazione delle coordinate

$$[\quad]_{\mathcal{B}'} : V' \to \mathbf{R}^m,$$

il vettore $\mathbf{y} = [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}'}$. Quindi partendo dal vettore $\mathbf{x}$ abbiamo fatto il seguente percorso:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} \in V & \xrightarrow{f} & f(\mathbf{u}) \in V' \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n & & \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m. \end{array}$$

Ci chiediamo come si calcola $\mathbf{y}$ a partire da $\mathbf{x}$. La risposta ci e' fornita dalla Proposizione appena dimostrata, che ci dice che

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

In poche parole, se e' data un'applicazione lineare $f : V \to V'$, visto che introducendo coordinate possiamo identificare V con $\mathbf{R}^n$ e V' con $\mathbf{R}^m$, l'applicazione f corrispondera' ad un'applicazione $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Qual e' questa applicazione? E' l'applicazione

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \to A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m,$$

dove A e' la matrice rappresentativa di f.

2) Con le stesse notazioni adoperate in precedenza, la formula

$$\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}$$

si puo' anche scrivere sotto la forma:

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \dots,\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n).$$

Tale espressione si chiama *l'espressione esplicita di f rispetto alle basi fissate*. L'espressione esplicita ci dice che, una volta identificati i vettori con le rispettive coordinate, un'applicazione lineare f trasforma un vettore numerico $(x_1, \dots, x_n)$ in un altro vettore numerico $f(x_1, \dots, x_n)$, le cui componenti appaiono come polinomi omogenei di primo grado nelle variabili $x_1, \dots, x_n$. I coefficienti (ordinati) di tali polinomi rappresentano le righe della matrice rappresentativa.