**Gli isomorfismi.**

• Un'applicazione lineare $f : V \to V'$ biiettiva si dice anche *isomorfismo tra lo spazio $V$ e lo spazio $V'$.*

• *Proprieta' degli isomorfismi.* Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Allora valgono le seguenti proprieta':

1) l'applicazione inversa $f^{-1} : V' \to V$ e' anch'essa lineare e quindi e' un isomorfismo tra $V'$ a $V$;

2) un sistema di vettori $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ e' una base di $V$ se e solo se il sistema di vettori $f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_n)$ e' una base di $V'$ (cioe' un isomorfismo trasforma basi in basi);

3) $\dim(V) = \dim(V')$;

4) se $\mathcal{B}$ e' una base di $V$ e $\mathcal{B}'$ e' una base di $V'$ allora la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ e' invertibile e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}).$$

• Due spazi vettoriali $V$ e $V'$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo $f : V \to V'$ tra lo spazio $V$ e lo spazio $V'$. Possiamo riguardare la nozione di isomorfismo come una relazione nell'insieme di tutti gli spazi vettoriali. Tale relazione e' una relazione di equivalenza. Infatti ogni spazio vettoriale $V$ e' isomorfo a se stesso in virtu' dell'applicazione identica $id_V : V \to V$, che e' un isomorfismo. Poi la proprieta' 1) precedente ci dice che tale relazione e' anche simmetrica. Infine se $f : V \to V'$ e $g : V' \to V"$ sono isomorfismi allora tale e' anche l'applicazione composta $g \circ f : V \to V"$. Quindi la relazione di isomorfismo e' anche una relazione transitiva.

• Un esempio importante di isomorfismo e' *l'applicazione delle coordinate* $[\quad]_{\mathcal{B}}$. Assegnata una base $\mathcal{B}$ in uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$, tale applicazione e' quella che associa al vettore $\mathbf{v}$ di $V$ il vettore numerico $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$[\quad]_{\mathcal{B}} : \mathbf{v} \in V \to \mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbf{R}^n.$$

L'esistenza di tale isomorfismo consente di dedurre il seguente

**Teorema.** *Ogni spazio vettoriale di dimensione $n$ e' isomorfo ad $\mathbf{R}^n$.*

Per transitivita' otteniamo il corollario

**Corollario.** *Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

• Sia $\mathcal{V}$ l'insieme di tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita, e sia $\widetilde{\mathcal{V}}$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza rispetto alla relazione di isomorfismo in $\mathcal{V}$. Per ogni spazio $V \in \mathcal{V}$ denotiamo con $[V] \in \widetilde{\mathcal{V}}$ la sua classe di equivalenza. In base al corollario precedente la seguente applicazione

$$[V] \in \widetilde{\mathcal{V}} \to \dim(V) \in \mathbf{N}_0$$

e' ben definita ed e' biiettiva. In altre parole, *a meno di isomorfismi, ci sono tanti spazi vettoriali di dimensione finita quanti sono i numeri naturali.*