CAPITOLO 8: ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

Vincenzo Di Gennaro

1. Lo spazio $\mathcal{V}$ dei vettori liberi ordinari.

Dati[1] due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ nello spazio fisico dei punti $\mathcal{E}$, diremo che sono *equipollenti* se sono paralleli, hanno la stessa lunghezza, e lo stesso verso. La relazione di *equipollenza* e' una relazione di equivalenza nell'insieme di tutti i segmenti orientati. Denoteremo con $\mathcal{V}$ *l'insieme di tutte le classi di equipollenza dei segmenti orientati.* Un elemento $\mathbf{u}$ di $\mathcal{V}$ e' detto *vettore libero ordinario.* Un vettore libero ordinario, dunque, e' l'insieme costituito da tutti i segmenti orientati equipollenti ad un assegnato segmento orientato. Se $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{u}$, scriveremo anche

$$\mathbf{u} = Q - P.$$

Si osservi che per la stessa definizione si ha

$$Q - P = \mathbf{0} \iff Q = P.$$

Fissato un punto O nello spazio $\mathcal{E}$, ed un vettore libero ordinario $\mathbf{u}$ di $\mathcal{V}$, esiste un unico segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ appartenente ad $\mathbf{u}$ ed applicato in O. Percio' l'applicazione

$$\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O \to P - O \in \mathcal{V}$$

e' biiettiva. Grazie a tale applicazione, possiamo dotare $\mathcal{V}$ di struttura di spazio vettoriale, riconducendo le operazioni di $\mathcal{V}$ a quelle di $\mathcal{V}_O$. Tale struttura di spazio vettoriale non dipende dal fissato punto O. Lo spazio $\mathcal{V}$ *dicesi lo spazio dei vettori liberi ordinari.* Si osservi che, per come abbiamo definito la struttura di spazio vettoriale su $\mathcal{V}$, la mappa precedente e' un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare $\mathcal{V}$ ha dimensione 3. Dalla regola del parallelogramma segue che:

$$(Q - P) + (P - R) = Q - R.$$

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}$ ed un punto O di $\mathcal{E}$, l'insieme

$$\mathcal{R} = \{O\} \cup \mathcal{B}$$

[1] Ultimo aggiornamento 16 dicembre 2023

dicesi *sistema di riferimento* nello spazio $\mathcal{E}$. Dato un punto P, si definiscono *coordinate di P nel riferimento* $\mathcal{R}$ le coordinate del vettore $P-O$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Denoteremo queste coordinate nel seguente modo:

$$[P]_{\mathcal{R}} := [P-O]_{\mathcal{B}}.$$

Si osservi che se $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$ rappresentano i vettori di $\mathcal{B}$ applicati in O, le coordinate di P in $\mathcal{R}$ altro non sono che le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ di $\mathcal{V}_O$ rispetto alla base $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$. Se Q e' un altro punto, per la regola del parallelogramma, avremo

$$[Q]_{\mathcal{R}} = [Q-O]_{\mathcal{B}} = [(Q-P)+(P-O)]_{\mathcal{B}} = [Q-P]_{\mathcal{B}} + [P-O]_{\mathcal{B}} = [Q-P]_{\mathcal{B}} + [P]_{\mathcal{R}}.$$

Da cui:

$$[Q-P]_{\mathcal{B}} = [Q]_{\mathcal{R}} - [P]_{\mathcal{R}}.$$

Cioe' *le coordinate del vettore $Q-P$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ si ottengono sottraendo (in $\mathbf{R}^3$) dalle coordinate del punto Q rispetto al riferimento $\mathcal{R}$ quelle del punto P rispetto al riferimento $\mathcal{R}$.* Osserviamo anche che, fissato un riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathcal{V}$, abbiamo le seguenti mappe biiettive:

$$P \in \mathcal{E} \to \overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O \to P-O \in \mathcal{V} \to [P]_{\mathcal{R}} \in \mathbf{R}^3.$$

In altre parole, *una volta fissato un riferimento nello spazio dei punti, abbiamo una identificazione naturale tra punti, segmenti orientati applicati in O, vettori liberi, e vettori numerici:*

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{V}_O \cong \mathcal{V} \cong \mathbf{R}^3.$$

Percio', fissato un riferimento, potremo dire *sia P il punto* (x, y, z), intendendo con cio' che P e' il punto di coordinate $(x, y, z)^T$. E similmente[2] potremo dire *sia $Q-P$ il vettore* (l, m, n), intendendo che $Q-P$ e' il vettore di coordinate $(l, m, n)^T$. Le identificazioni $\mathcal{V}_O \cong \mathcal{V} \cong \mathbf{R}^3$ sono anche isomorfismi di spazi vettoriali.

Assegnati due riferimenti

$$\mathcal{R} = \{O\} \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{R}' = \{O'\} \cup \mathcal{B}',$$

possiamo chiederci come sono correlate le coordinate di un dato punto P rispetto ad $\mathcal{R}$ ed a $\mathcal{R}'$. A tale proposito, osserviamo che

$$[P]_{\mathcal{R}'} = [P-0']_{\mathcal{B}'} = [(P-O)+(O-O')]_{\mathcal{B}'}$$

$$= [P-O]_{\mathcal{B}'} + [O-O']_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}}) \cdot [P-O]_{\mathcal{B}} + [O]_{\mathcal{R}'},$$

quindi

$$[P]_{\mathcal{R}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}}) \cdot [P]_{\mathcal{R}} + [O]_{\mathcal{R}'}.$$

[2] Le coordinate vanno pensate come un vettore colonna $(x, y, z)^T$. Tuttavia, a volte, con abuso di notazione, nello svolgimento degli esercizi per esempio, identificheremo il vettore colonna $(x, y, z)^T$ con il vettore (x, y, z).

Possiamo riscrivere tale formula nel seguente modo. Posto

$$\mathbf{x} = [P]_{\mathcal{R}}, \quad \mathbf{x}' = [P]_{\mathcal{R}'}, \quad M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}}), \quad \mathbf{c}' = [O]_{\mathcal{R}'},$$

si ha

$$\mathbf{x}' = M \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}'.$$

Osservazione. Se ρ e' un piano in $\mathcal{E}$, similmente a come visto nel caso dello spazio, possiamo definire un *riferimento del piano* ρ come l'insieme $\mathcal{R} = \{O\} \cup \mathcal{B}$ costituito da un punto O di ρ, e da due vettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ linearmente indipendenti di $\mathcal{V}$, paralleli a ρ, cioe' tali che, una volta applicati in O, siano completamente contenuti in ρ. Come prima, possiamo definire le coordinate di un punto P di ρ come le coordinate del vettore $P - O$ rispetto a $\mathcal{B}$. In tal caso, valgono formule analoghe a quelle viste nello spazio, e le coordinate di un punto sono i due pesi (x, y) tali che $P - O = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$. Questi pesi si chiamano usualmente anche *l'ascissa* e *l'ordinata* di P nel riferimento $\mathcal{R}$ del piano ρ.

2. La somma di un punto e di un vettore.

La definizione che segue e' molto utile nello studio della geometria dello spazio dei punti, perche', come vedremo, consente di studiare molte proprieta' geometriche senza utilizzare le coordinate.

Dato un punto $P \in \mathcal{E}$ ed un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, esiste un unico segmento orientato $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{u}$ applicato in P. Si pone per definizione

$$Q := P + \mathbf{u}$$

Si osservi che *la somma di un punto con un vettore e' un punto.* Il fatto che si possa fare la somma di un punto con un vettore si esprime dicendo che $\mathcal{V}$ *fornisce ad* $\mathcal{E}$ *una struttura di spazio affine.* Per la stessa definizione abbiamo

$$Q = P + \mathbf{u} \iff Q - P = \mathbf{u} \iff P - Q = -\mathbf{u} \iff P = Q + (-\mathbf{u}).$$

Inoltre, dalla definizione e dalla regola del parallelogramma, seguono le seguenti importanti regole di calcolo:

$$P + \mathbf{0} = P, \quad P + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

Dalla definizione e dalle regole precedenti seguono le seguenti ulteriori utilissime regole, che utilizzeremo senza citarle esplicitamente.

- $P + (Q - P) = Q$,
- $(Q - P) + \mathbf{u} = (Q + \mathbf{u}) - P$,
- $(Q + \mathbf{v}) - (P + \mathbf{u}) = (Q - P) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$,
- $P + \mathbf{u} = Q + \mathbf{v} \iff Q - P = \mathbf{u} - \mathbf{v}$,
- $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v} \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Per esempio, proviamo che $(Q+\mathbf{v})-(P+\mathbf{u})=(Q-P)+(\mathbf{v}-\mathbf{u})$. Cio' e' equivalente a dire che $Q+\mathbf{v}=(P+\mathbf{u})+[(Q-P)+(\mathbf{v}-\mathbf{u})]$. D'altra parte, per la regola del parallelogramma prima citata, abbiamo:

$$(P+\mathbf{u})+[(Q-P)+(\mathbf{v}-\mathbf{u})]=P+[\mathbf{u}+(Q-P)+(\mathbf{v}-\mathbf{u})]$$

$$=P+[(Q-P)+\mathbf{v}]=(P+(Q-P))+\mathbf{v}=Q+\mathbf{v}.$$

3. Rette e piani di $\mathcal{E}$.

Sia ora P un punto, ed U un sottospazio di $\mathcal{V}$. Si tenga presente che $0\leq \dim U\leq 3$. Definiamo:

$$P+U:=\{P+\mathbf{u}\,:\,\mathbf{u}\in U\}\,.$$

Cioe' $P+U$ e' l'insieme di tutti quei punti del tipo $P+\mathbf{u}$, al variare di $\mathbf{u}$ in U. In particolare

$$P\in P+U, \tag{1}$$

e si ha anche

$$X,Y\in P+U \implies Y-X\in U \tag{2}$$

e

$$Q\in P+U \implies P+U=Q+U. \tag{3}$$

Un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di $\mathcal{E}$ della forma

$$\mathcal{A}=P+U$$

dicesi *il sottospazio affine di $\mathcal{E}$ passante per il punto P, e avente giacitura U (si dice anche parallelo ad U, o avente la direzione di U, oppure diretto da U)*. Osserviamo che

$$P+U\subseteq Q+V \quad\iff\quad Q-P\in V \quad \text{e} \quad U\subseteq V, \tag{4}$$

$$P+U=Q+V \quad\iff\quad Q-P\in V \quad \text{e} \quad U=V. \tag{5}$$

Proviamo le proprieta' precedenti.

La (1) segue dal fatto che $P=P+\mathbf{0}$.

Proviamo la (2). Se X,Y appartengono a $P+U$, allora possiamo scrivere $X=P+\mathbf{u}$ ed $Y=P+\mathbf{u}'$, con opportuni $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ vettori di U. Ma allora $Y-X=\mathbf{u}'-\mathbf{u}\in U$.

Proviamo la (3). Supponiamo che $Q\in P+U$. Allora possiamo scrivere $Q=P+\mathbf{u}_0$ per un opportuno $\mathbf{u}_0\in U$. Sia X un qualunque punto di $P+U$. Allora, per un opportuno $\mathbf{u}\in U$, si ha $X=P+\mathbf{u}=Q+(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$, percio' $X\in Q+U$. Cio' prova che $P + U \subseteq Q + U$. Viceversa, sia Y un qualunque punto di $Q + U$. Allora possiamo scrivere $Y = Q + \mathbf{u}$, con $\mathbf{u} \in U$. Ma allora $Y = Q + \mathbf{u} = P + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u})$, e percio' $Y \in P + U$. Cio' prova che $Q + U \subseteq P + U$, e percio' $P + U = Q + U$.

Proviamo la (4). Assumiamo innanzitutto che $P + U \subseteq Q + V$. Poiche' $P \in P + U$ allora $P \in Q + V$. Percio' $P = Q + \mathbf{v}$, per un opportuno $\mathbf{v} \in V$. Ma allora $Q - P = -\mathbf{v}$ appartiene a V. Ora, sia $\mathbf{u}$ un qualunque vettore di U. Poiche' $P \in Q + V$ allora $Q + V = P + V$, percio' $P + \mathbf{u}$ lo possiamo scrivere anche sotto la forma $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, con $\mathbf{v} \in V$. Quindi $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ appartiene anche a V. Cio' prova che $U \subseteq V$.

Viceversa, assumiamo che $Q - P \in V$ e che $U \subseteq V$. Possiamo scrivere $Q = P + \mathbf{v}$, secondo un opportuno $\mathbf{v} \in V$. Sia X un qualunque punto di $P + U$. Allora, per un opportuno $\mathbf{u} \in U$ abbiamo $X = P + \mathbf{u} = Q + (\mathbf{v} + \mathbf{u})$. Cio' prova che $X \in Q + V$, e che $P + U \subseteq Q + V$.

La (5) segue dalla (4).

Per quanto dimostrato, possiamo dire che un sottospazio affine $\mathcal{A}$ e' contenuto in un sottospazio affine $\mathcal{B}$ se e solo se la giacitura di $\mathcal{A}$ e' contenuta nella giacitura di $\mathcal{B}$, ed $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno almeno un punto in comune. E un sottospazio affine $\mathcal{A}$ e' uguale ad un sottospazio affine $\mathcal{B}$ se e solo se la giacitura di $\mathcal{A}$ e' uguale alla giacitura di $\mathcal{B}$, ed $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno almeno un punto in comune.

Si osservi che
$$P + \{\mathbf{0}\} = \{P\}, \quad P + \mathcal{V} = \mathcal{E}.$$
Se $\dim U = 1$ e $U = Span(\mathbf{u})$, allora $P + U$ e' *la retta passante per P parallela al vettore $\mathbf{u}$ (cioe' avente giacitura $Span(\mathbf{u})$).* Se $\dim U = 2$ e $U = Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, allora $P + U$ *e' il piano passante per P parallelo ad $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (cioe' avente giacitura $Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$).*

Percio' i sottospazi affini di $\mathcal{E}$ sono:

- i singoli punti (in tal caso la giacitura e' lo spazio nullo),
- le rette (in tal caso la giacitura e' un sottospazio di dimensione 1 di $\mathcal{V}$),
- i piani (in tal caso la giacitura e' un sottospazio di dimensione 2 di $\mathcal{V}$),
- e lo spazio dei punti $\mathcal{E}$, la cui giacitura e' tutto $\mathcal{V}$.

Osserviamo che un sottospazio affine $\mathcal{A} = P + U$ di $\mathcal{E}$ non e' vuoto, c'e' almeno il punto P. E, a parte i punti, i sottospazi affini contengono infiniti punti.

4. Rappresentazione parametrica e cartesiana di una retta.

Sia $r = P + U$ la retta passante per P e parallela ad $U = Span(\mathbf{u})$. Fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$ dello spazio. Siano (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P, (l, m, n) le coordinate di $\mathbf{u}$, e (x, y, z) le coordinate del generico punto X di $\mathcal{E}$. Allora X appartiene ad r se e solo se il vettore numerico $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ e' un multiplo di (l, m, n). Quindi $X \in r$ se e solo se esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che
$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn. \end{cases}$$

Questa scrittura prende il nome di *rappresentazione parametrica di* r nel riferimento fissato $\mathcal{R}$. Eliminando il parametro t si ottiene un sistema lineare della forma

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni e' costituito esattamente dalle coordinate dei punti di r. Tale sistema dicesi *rappresentazione cartesiana di* r nel riferimento fissato $\mathcal{R}$. E' chiaro che, viceversa, dato un sistema lineare come in precedenza, che ammetta ∞^1 soluzioni, il suo insieme delle soluzioni e' l'insieme delle coordinate dei punti di una retta. Tale retta e' la retta $P + U$, dove P corrisponde ad una soluzione particolare del sistema, ed U allo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Se la retta r e' contenuta in un piano $\rho = Q + V$, allora, se fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$ del piano, cioe' se fissiamo un punto $O \in \rho$ ed una base $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ di V ($\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori paralleli a ρ), le coordinate in $\mathcal{R}$ del generico punto X di ρ sono una coppia (x, y), e, con ovvio significato dei simboli, la rappresentazione parametrica di r nel riferimento $\mathcal{R}$ e quella cartesiana assumono la forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm, \end{cases}$$

e

$$ax + by = c.$$

Esempio. Sia $r = P + U$ *la retta passante per il punto* $P = (1, 2, 1)^T$ *ed avente giacitura* $U = Span(\{\mathbf{u}\})$*, con* $\mathbf{u} = (2, 1, -3)^T$*. Determinare una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana di* r*.*

Svolgimento. E' implicito nel testo dell'esempio il fatto che abbiamo fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, ed identificato punti e vettori con le rispettive coordinate.

Un punto X appartiene ad r se e solo se X si puo' mettere sotto la forma $X = P + t\mathbf{u}$, con $t \in \mathbf{R}$. Passando alle coordinate, e tenuto conto che le coordinate di X si ottengono sommando le coordinate di P alle coordinate di $t\mathbf{u}$, cioe'

$$[t\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = [X - P]_{\mathcal{B}} = [X]_{\mathcal{R}} - [P]_{\mathcal{R}} \iff [X]_{\mathcal{R}} = [P]_{\mathcal{R}} + t[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}},$$

otteniamo la rappresentazione parametrica di r:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

Cio' vuol dire che un punto X dello spazio $\mathcal{E}$ avente coordinate $(x, y, z)^T$ appartiene ad r se e solo se esiste un numero $t \in \mathbf{R}$ tale che siano soddisfatte le formule precedenti. In queste formule i termini noti sono le coordinate del punto P, mentre i coefficienti del parametro t sono le coordinate del vettore $\mathbf{u}$. Si osservi che per $t = 0$ riotteniamo il punto P, mentre, detto Q il punto ottenuto per $t = 1$, il vettore $Q - P$ coincide con $\mathbf{u}$. Facendo variare $t \in \mathbf{R}$ si ottengono tutti e soli i punti della retta r.

Per ottenere una rappresentazione cartesiana eliminiamo il parametro t. Possiamo porre $t = y - 2$, e sostituendo nella prima equazione e nella terza otteniamo la rappresentazione cartesiana cercata:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3y + z = 7. \end{cases}$$

Cio' vuol dire che un punto X di coordinate $(x, y, z)^T$ appartiene ad r se e solo se $(x, y, z)^T \in Sol(\mathcal{S})$. Un modo per giustificare questa affermazione e' il seguente. Dalla Teoria dei sistemi lineari sappiamo che se $\mathbf{y}_0$ e' una qualsiasi soluzione particolare di $\mathcal{S}$, allora

$$Sol(\mathcal{S}) = \mathbf{y}_0 + Sol(\mathcal{S}^*).$$

Percio' per provare che $r = Sol(\mathcal{S})$, cioe' che $P + U = Sol(\mathcal{S})$, e' sufficiente verificare che P e' una soluzione di $\mathcal{S}$, e che $U = Sol(\mathcal{S}^*)$ (sottolineiamo ancora una volta che nell'uguaglianza $r = Sol(\mathcal{S})$ stiamo identificando i punti di r con le loro coordinate). ■

Osservazioni sull'esempio precedente. (i) Se risolviamo il sistema $\mathcal{S}$ con l'algoritmo imparato utilizzando le operazioni elementari, perveniamo alla soluzione generale:

$$\mathbf{y} = (5/3, 7/3, 0)^T + z(-2/3, -1/3, 1)^T.$$

Cioe'

$$Sol(\mathcal{S}) = (5/3, 7/3, 0)^T + Span((-2/3, -1/3, 1)^T).$$

Tenuto conto della proprieta' (5), per provare che $r = Sol(\mathcal{S})$, cioe' che

$$(1, 2, 1)^T + Span((2, 1, -3)) = (5/3, 7/3, 0)^T + Span((-2/3, -1/3, 1)^T),$$

e' sufficiente verificare che

$$Span((-2/3, -1/3, 1)^T) = Span((2, 1, -3)^T)$$

e che

$$(5/3, 7/3, 0)^T - (1, 2, 1)^T \in Span((2, 1, -3)^T).$$

(ii) Per ottenere la rappresentazione cartesiana di r possiamo anche applicare il metodo imparato per il calcolo della rappresentazione cartesiana di un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. E' sufficiente osservare che $X \in r$ se e solo se $X - P$ e' un multiplo di $\mathbf{u}$, cioe' se e solo se

$$rk \begin{bmatrix} 2 & x - 1 \\ 1 & y - 2 \\ -3 & z - 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Riducendo a scala per righe la matrice precedente si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & y-2 \\ 0 & x-2y+3 \\ 0 & 3y+z-7 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 1 se e solo se

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 3y+z=7. \quad \blacksquare \end{cases}$$

5. Rappresentazione parametrica e cartesiana di un piano.

Sia $\rho = P+U$ il piano passante per P e parallelo ad $U = Span(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$. Come prima, fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$ dello spazio. Siano (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P, (l, m, n) ed (l', m', n') le coordinate di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{u}'$, e (x, y, z) le coordiante del generico punto X di $\mathcal{E}$. Allora X appartiene a ρ se e solo se il vettore numerico $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ e' combinazione dei vettori (l, m, n) ed (l', m', n'). Quindi $X \in \rho$ se e solo se esistono $s, t \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{cases} x = x_0 + sl + tl' \\ y = y_0 + sm + tm' \\ z = z_0 + sn + tn'. \end{cases}$$

Questa scrittura prende il nome di *rappresentazione parametrica di* ρ nel riferimento fissato $\mathcal{R}$. Eliminando i parametri s e t si ottiene un'equazione lineare

$$ax + by + cz = d$$

il cui insieme delle soluzioni e' costituito esattamente dalle coordinate dei punti di ρ. Tale equazione dicesi *rappresentazione cartesiana di* ρ nel riferimento fissato $\mathcal{R}$. E' chiaro che, viceversa, data un' equazione lineare come in precedenza, che ammetta ∞^2 soluzioni, il suo insieme delle soluzioni e' l'insieme delle coordinate dei punti di un piano. Tale piano e' il piano $P+U$, dove P corrisponde ad una soluzione particolare dell'equazione, ed U allo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $ax + by + cz = 0$.

Esempio. Sia $\rho = P+U$ il piano passante per il punto $P = (1, 2, 1)^T$ ed avente giacitura $U = Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$, con $\mathbf{u} = (2, 1, -3)^T$ e $\mathbf{v} = (1, 1, -1)^T$. Determinare una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana di ρ.

Svolgimento. Un punto X appartiene a ρ se e solo se X si puo' mettere sotto la forma

$$X = P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Passando alle coordinate otteniamo la rappresentazione parametrica di ρ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = 2 + s + t \\ z = 1 - 3s - t. \end{cases}$$

Cio' vuol dire che un punto X dello spazio $\mathcal{E}$ avente coordinate $(x, y, z)^T$ appartiene a ρ se e solo se esistono parametri $s, t \in \mathbf{R}$ tale che siano soddisfatte le formule precedenti. In queste formule i termini noti sono le coordinate del punto P, mentre i coefficienti del parametro s sono le coordinate del vettore $\mathbf{u}$, ed i coefficienti del parametro t sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$. Si osservi che per $s = t = 0$ riotteniamo il punto P, mentre, detto Q il punto ottenuto per $s = 1$ e $t = 0$, il vettore $Q - P$ coincide con $\mathbf{u}$, e detto R il punto ottenuto per $s = 0$ e $t = 1$, il vettore $R - P$ coincide con $\mathbf{v}$. Facendo variare $s, t \in \mathbf{R}$ si ottengono tutti e soli i punti del piano ρ.

Per ottenere una rappresentazione cartesiana di ρ eliminiamo i parametri s e t. Possiamo fare cosi'. Dalle prime due equazioni ricaviamo un sistema di Cramer:

$$\begin{cases} 2s + t = x - 1 \\ s + t = y - 2. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema otteniamo

$$s = x - y + 1, \quad t = -x + 2y - 3.$$

Sostituendo nella terza equazione otteniamo la rappresentazione cartesiana di ρ:

$$2x - y + z = 1.$$

Cio' vuol dire che un punto X di coordinate $(x, y, z)^T$ appartiene a ρ se e solo se $2x - y + z = 1$. Se denotiamo con $\mathcal{S}$ l'equazione precedente, cio' equivale a dire che $X \in Sol(\mathcal{S})$. Un modo per giustificare questa affermazione e' il seguente. Dalla Teoria dei sistemi lineari sappiamo che se $\mathbf{y}_0$ e' una qualsiasi soluzione particolare di $\mathcal{S}$, allora

$$Sol(\mathcal{S}) = \mathbf{y}_0 + Sol(\mathcal{S}^*).$$

Percio' per provare che $\rho = Sol(\mathcal{S})$, cioe' che $P + U = Sol(\mathcal{S})$, e' sufficiente verificare che P e' una soluzione di $\mathcal{S}$, e che $U = Sol(\mathcal{S}^*)$.

Un altro modo per verificare che $\rho = Sol(\mathcal{S})$ e' li seguente.

La soluzione generale $\mathbf{y}$ dell'equazione $2x - y + z = 1$ e':

$$\mathbf{y} = (1/2, 0, 0)^T + y(1/2, 1, 0)^T + z(-1/2, 0, 1)^T.$$

Cioe'

$$Sol(\mathcal{S}) = (1/2, 0, 0)^T + Span((1/2, 1, 0)^T, (-1/2, 0, 1)^T).$$

Tenuto conto della proprieta' (5), per provare che $\rho = Sol(\mathcal{S})$, cioe' che

$$(1, 2, 1)^T + Span((2, 1, -3)^T, (1, 1, -1)^T)$$

$$= (1/2, 0, 0)^T + Span((1/2, 1, 0)^T, (-1/2, 0, 1)^T),$$

e' sufficiente verificare che

$$Span((2, 1, -3)^T, (1, 1, -1)^T) = Span((1/2, 1, 0)^T, (-1/2, 0, 1)^T),$$

e che
$$(1/2, 0, 0)^T - (1, 2, 1)^T \in Span((2, 1, -3)^T, (1, 1, -1)^T).$$

Infine, osserviamo che per ottenere la rappresentazione cartesiana di ρ possiamo anche applicare il metodo imparato per il calcolo della rappresentazione cartesiana di un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. E' sufficiente osservare che $X \in \rho$ se e solo se $X - P$ dipende linearmente da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cioe' se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y-2 \\ -1 & -3 & z-1 \end{bmatrix} = 0.$$

Imponendo tale annullamento, si perviene all'equazione $2x - y + z = 1$. ■

6. Posizioni reciproche di due rette.

Cominciamo con l'osservare che

- *dati due punti distinti P e Q, esiste un'unica retta r passante per P e Q.*

Infatti, posto $\mathbf{u} = Q - P$, la retta $P + Span(\mathbf{u})$ passa per P e Q. Se $R + Span(\mathbf{v})$ e' una qualsiasi retta passante per P e Q, allora avremo $P = R + a\mathbf{v}$ e $Q = R + b\mathbf{v}$. Percio' $Q - P$ e' un multiplo di $\mathbf{v}$, da cui $Span(\mathbf{u}) = Span(\mathbf{v})$. A questo punto e' chiaro che $P + Span(\mathbf{u}) = R + Span(\mathbf{v})$.

Siano r ed s due rette; r ed s si dicono *incidenti* se si intersecano in un solo punto; si dicono *parallele* se hanno la stessa giacitura; si dicono *propriamente parallele* se sono parallele e distinte; si dicono *complanari* se sono contenute in uno stesso piano; si dicono *sghembe* se non sono complanari, cioe' se non esiste un piano che le contenga entrambe.

• *Siano $r = P + U$ ed $s = Q + V$ due rette. Accade una ed una sola delle seguenti circostanze:*

- *$r = s$, oppure*
- *r ed s sono incidenti (cioe' si intersecano esattamente in un punto), oppure*
- *r ed s sono propriamente parallele, oppure*
- *r ed s sono sghembe.*

Proviamo quanto affermato.

Supponiamo $r \neq s$, e che r ed s abbiano qualche punto in comune. Per l'unicita' provata in precedenza, tale punto e' unico, percio' r ed s sono incidenti.

Ora andiamo a provare che se $r \cap s = \emptyset$ allora o r ed s sono parallele oppure sono sghembe.

Supponiamo che $r \cap s = \emptyset$ e che r ed s non siano sghembe. Allora r ed s sono contenute in un certo piano $\rho = R + W$. Poniamo $U = Span(\mathbf{u})$ e $V = Span(\mathbf{v})$. Poiche' i vettori $Q - P$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ stanno in W, devono essere linearmente dipendenti. Sia

$$a(Q - P) + b\mathbf{u} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

una relazione non banale. Se a fosse $\neq 0$ allora r ed s avrebbero in comune il punto

$$P + \left(-\frac{b}{a}\mathbf{u}\right) = Q + \frac{c}{a}\mathbf{v},$$

in contrasto col fatto che $r \cap s = \emptyset$. Percio' deve essere $a = 0$ e quindi $U = V$, cioe' r ed s sono parallele. Cio' prova che se $r \cap s = \emptyset$ ed r ed s non sono sghembe, allora sono parallele.

Con cio' abbiamo provato che i casi elencati sono gli unici possibili. Per concludere occorre provare che questi casi si escludono a vicenda. Cio' segue dalle seguenti due osservazioni.

Se due rette sono incidenti e parallele allora sono uguali. Inoltre due rette incidenti sono complanari. Infatti le rette $r = P + U$ e $s = P + V$ sono contenute nel piano $P + (U + V)$.

Due rette propriamente parallele sono complanari. Infatti in tal caso $U = V$ e le due rette sono contenute nel piano $P + (U + Span(Q - P))$.

Cio' conclude la dimostrazione di quanto affermato.

Osserviamo che da quanto provato ed osservato segue in particolare che:

• *r ed s sono incidenti se e solo se sono complanari e non sono parallele*,

e che

• *r ed s hanno intersezione vuota se e solo se sono propriamente parallele, oppure sono sghembe.*

Le proprieta' che abbiamo appena studiato sulla posizione reciproca di due rette possono essere interpretate alla luce della teoria dei sistemi lineari. Infatti, fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$ dello spazio. Ricordiamo che possiamo identificare un punto con un vettore numerico di $\mathbf{R}^3$. Ora consideriamo due rette r ed s, e le loro rappresentazioni cartesiane:

$$r := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases} \qquad s := \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d'''. \end{cases}$$

Il sistema lineare che rappresenta r e' compatibile di rango 2, ed ha ∞^1 soluzioni, che altro non sono che i punti di r. E lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato e' la giacitura di r. Idem per il sistema lineare che rappresenta s. L'insieme dei punti in comune tra r ed s e' rappresentato dal sistema lineare:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d'''. \end{cases}$$

Ne consegue:

• $r = s$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 2.

• r ed s sono incidenti se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 3.

• r ed s sono propriamente parallele se e solo se $\mathcal{S}$ e' incompatibile, e la matrice incompleta ha rango 2 e quella completa 3.

• r ed s sono sghembe se e solo se $\mathcal{S}$ e' incompatibile, e la matrice incompleta ha rango 3 e quella completa 4.

Osservazione. Poiche' $r = s$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 2, segue che *condizione necessaria e sufficiente affinche' $r = s$ e' che le equazioni di r siano combinazione lineare di quelle di s, e viceversa.*

Nel caso in cui r ed s stiano in un piano ρ, introdotto un riferimento del piano ρ, le rette r ed s avranno rappresentazioni cartesiane:

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c'.$$

L'intersezione di r ed s corrisponde alle soluzioni del sistema lineare

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Ne consegue:

• $r = s$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 1.

• r ed s sono propriamente parallele se e solo se $\mathcal{S}$ e' incompatibile.

• r ed s sono incidenti se e solo se $\mathcal{S}$ e' un sistema di Cramer.

7. Posizioni reciproche di una retta ed un piano.

Sia $r = P + U$ una retta e $\rho = Q + V$ un piano. Si dice che r e ρ sono *incidenti* se la loro intersezione e' costituita da esattamente un punto; si dice che *r e' parallela a ρ*, o anche che *ρ e' parallelo ad r*, se $U \subset V$, cioe' se la giacitura di r e' contenuta in quella di ρ; si dice che *r e' propriamente parallela a ρ* se r e' parallela a ρ e non e' contenuta in ρ.

Osservazione. Osserviamo che se r e' contenuta in ρ, allora r e' parallela a ρ (cfr. (4)). Inoltre, se r e' propriamente parallela a ρ, allora r e ρ non hanno punti in comune (altrimenti, detto X un punto comune, si avrebbe $r = X + U$, $\rho = X + V$, ed essendo $U \subset V$, r sarebbe contenuta in ρ (cfr. (3) e (4))).

• *Siano $r = P + U$ una retta e $\rho = Q + V$ un piano. Accade una ed una sola delle seguenti circostanze:*

• *r e' contenuta in ρ, oppure*

• *r e ρ sono incidenti (cioe' si intersecano esattamente in un punto), oppure*

• *r e' propriamente parallela a ρ.*

Dimostrazione. Supponiamo che r non sia tutta contenuta nel piano ρ.

Se r e ρ hanno almeno due punti in comune, diciamo X ed Y, allora $Y-X$ appartiene sia ad U che a V. Poiche' U ha dimensione 1, segue che $U \subset V$, e quindi $r = X + U$ e' contenuta in $\rho = Y + V$. Cio' prova che se r non e' contenuta in ρ e ha qualche punto in comune con ρ, tale punto e' unico.

Supponiamo ora che r e ρ non abbiano punti in comune.

Poniamo $U = Span(\mathbf{u})$ e $V = Span(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ fossero una base di $\mathcal{V}$, potremmo scrivere il vettore $Q - P$ nella forma $Q - P = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$. Ma allora il punto $P + a\mathbf{u} = Q + (-b\mathbf{v} - c\mathbf{w})$ apparterrebbe sia ad r che a ρ, contro le ipotesi. Percio' i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono legati. Cio' implica che $\mathbf{u}$ e' sovrabbondante, quindi $U \subset V$, ed r e' propriamente parallela a ρ.

Con cio' abbiamo provato che i casi elencati sono gli unici possibili. Tenuto conto dell'osservazione precedente, e' chiaro che questi casi si escludono a vicenda.

Cio' conclude la dimostrazione.

Da quanto provato e detto in precedenza, segue in particolare che:

• *r e ρ hanno intersezione vuota se e solo se r e' propriamente parallela a ρ,*

e che

• *la retta $r = P + U$ e' parallela al piano $\rho = Q + V$ (cioe' $U \subset V$) se e solo se r e' contenuta in ρ, oppure r e ρ non hanno punti in comune.*

Le proprieta' che abbiamo studiato sulla posizione reciproca di una retta e di un piano possono essere interpretate alla luce della teoria dei sistemi lineari. Come prima, fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$ dello spazio. Ora consideriamo una retta r ed un piano ρ, e le loro rappresentazioni cartesiane:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d', \end{cases} \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Il sistema lineare che rappresenta r e' compatibile di rango 2, ed ha ∞^1 soluzioni, che altro non sono che i punti di r. E lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato e' la giacitura di r. L'equazione che rappresenta ρ e' compatibile di rango 1, ed ha ∞^2 soluzioni, che altro non sono che i punti di ρ. E lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata e' la giacitura di ρ. L'insieme dei punti in comune tra r e ρ e' rappresentato dal sistema lineare:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

Ne consegue:

• r e' contenuta in ρ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 2.

• r e ρ sono incidenti se e solo se $\mathcal{S}$ e' un sistema di Cramer.

• r e ρ sono propriamente paralleli se e solo se $\mathcal{S}$ e' incompatibile. In tal caso la matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha rango 2, e quella completa 3.

Osservazione. Poiche' r e' contenuta in ρ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 2, segue che *condizione necessaria e sufficiente affinche' r sia contenuta nel piano ρ e' che l' equazione di ρ sia combinazione lineare di quelle di r, cioe' che esistano scalari λ e μ tali che*

$$a''x + b''y + c''z - d'' = \lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d').$$

8. Posizioni reciproche di due piani.

Cominciamo con l'osservare che

• *assegnati tre punti non allineati P, Q, R (cioe' non appartenenti ad una retta) esiste un unico piano passante per tali punti.*

Infatti, posto $Q - P = \mathbf{u}$ e $R - P = \mathbf{v}$, i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono indipendenti. Percio' il piano $\rho = P + Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ passa per i tre punti P, Q, R. Lo stesso argomento prova che tale piano e' unico.

Siano ρ e σ due piani. Diremo che sono *paralleli* se hanno la stessa giacitura; diremo che sono *propriamente paralleli* se sono paralleli e diversi (cioe' $\rho \neq \sigma$). Se i due piani sono propriamente paralleli, allora sono disgiunti; infatti, se avessero un punto X in comune, allora, denotata con U la loro giacitura comune, si avrebbe $\rho = X + U$ e $\sigma = X + U$, cioe' ρ e σ sarebbero uguali).

• *Siano $\rho = P + U$ e $\sigma = Q + V$ due piani. Accade una ed una sola delle seguenti circostanze:*

• *$\rho = \sigma$, oppure*

• *ρ e σ si intersecano esattamente in una retta, oppure*

• *ρ e σ sono propriamente paralleli.*

Proviamo quanto affermato.
Supponiamo ρ e σ diversi, e che $X \in \rho \cap \sigma$. Allora $\rho = X + U$ e $\sigma = X + V$. Percio' $U \neq V$. Per la formula di Grassmann $U \cap V$ ha dimensione 1. E la retta $r = X + (U \cap V)$ e' contenuta in ρ ed in σ. Non ci sono altri punti in comune. Altrimenti, se ci fosse un punto appartenente a ρ e σ, e non ad r, allora $\rho = \sigma$ perche', per quanto detto in precedenza, c'e' un solo piano passante per tre punti non allineati.
Cio' prova che se due piani distinti hanno qualche punto in comune, allora si intersecano esattamente in una retta.
Supponiamo ora che i due piani siano distinti e che non abbiano punti in comune. Se non fossero paralleli, allora, per la formula di Grassmann, $U \cap V$ avrebbe dimensione 1. Sia $\mathbf{x}$ un generatore di $U \cap V$. Allora esiste una base di U della forma $\mathbf{u}, \mathbf{x}$, ed una base di V della forma $\mathbf{v}, \mathbf{x}$. I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}$ formano una base di $\mathcal{V}$. Percio' potremo scrivere $Q - P$ sotto la forma $Q - P = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{x}$. Ma allora il punto $P + a\mathbf{u} + c\mathbf{x} = Q + (-b\mathbf{v})$ apparterrebbe sia a ρ che a σ. Il che e' in contrasto con il fatto che i due piani non hanno punti in comune.

Con cio' abbiamo provato che i casi elencati sono gli unici possibili. E' evidente che questi casi si escludono a vicenda.
Cio' conclude la dimostrazione.
Osserviamo che da quanto provato segue in particolare che:

• *due piani $\rho = P + U$ e $\sigma = Q + V$ sono paralleli (cioe' $U = V$) se e solo se coincidono, oppure hanno intersezione vuota.*

Ora fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$. Siano ρ e σ due piani con rappresentazione cartesiana rispettivamente:

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d'.$$

Un punto $P = (x, y, z)$ appartiene ad entrambi i piani se e solo se P e' una soluzione del sistema lineare

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

Ne consegue:

• $\rho = \sigma$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 1.

• ρ e σ si intersecano esattamente in una retta se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 2.

• ρ e σ sono propriamente paralleli se e solo se $\mathcal{S}$ non e' compatibile. In tal caso il rango della matrice incompleta e' 1 e quello della matrice completa e' 2.

Osservazione. Poiche' $\rho = \sigma$ se e solo se $\mathcal{S}$ e' compatibile di rango 1, segue che *condizione necessaria e sufficiente affinche' il piano ρ sia uguale al piano σ e' che l' equazione di ρ sia un multiplo di quella di σ.*

9. Esercizi di geometria delle rette e dei piani.

Gli esercizi che ora andremo a vedere possono essere svolti in piu' di un modo. Noi ne vedremo uno soltanto. Inoltre, come gia' detto, supporremo di aver fissato un riferimento, grazie al quale identifichiamo i punti di $\mathcal{E}$ con le loro coordinate.

Esercizio 1. Retta passante per due punti nel piano.

Nel piano ρ determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per i punti $P = (1, 2)$ e $Q = (-3, 1)$.

Svolgimento. La retta r passa per $P = (1, 2)$ ed e' parallela al vettore $Q - P = (-4, -1)$. Percio', se $X = (x, y)$ e' il punto generico di r, allora

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - t. \end{cases}$$

Eliminando il parametro t otteniamo l'equazione cercata:

$$x - 4y = -7. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. Retta passante per due punti nello spazio.

Determinare la rappresentazione cartesiana della retta r passante per i punti $P = (1,2,3)$ e $Q = (1,1,-1)$.

Svolgimento. La retta r e' parallela al vettore $Q - P = (0,-1,-4)$. Una rappresentazione parametrica di r e' data da:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$$

Eliminando il parametro t otteniamo la rappresentazione cercata:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 4y - z = 5. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Esercizio 3. Rette sghembe.

Sia r la retta passante per i punti $(1,3,-2)$ e $(1,1,1)$, ed s la retta passante per i punti $(1,0,0)$ e $(-1,-1,-1)$. Dire se r ed s sono sghembe oppure no.

Svolgimento. La retta r e' parallela al vettore $(0,-2,3)$, mentre s e' parallela al vettore $(-2,-1,-1)$. Percio' r ed s non sono parallele. Per capire se sono sghembe oppure no potremmo verificare se sono incidenti oppure no. La retta r ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

Invece la retta s ha rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

L'eventuale punto comune corrisponde al valore del parametro t per cui

$$\begin{cases} 1 - 2(3 - 2t) = 1 \\ 3 - 2t = -2 + 3t. \end{cases}$$

Poiche' tale numero t non esiste, le due rette sono sghembe. $\blacksquare$

Esercizio 4. Equazione del piano per tre punti assegnati.

Determinare la rappresentazione cartesiana del piano ρ per i punti $P = (1,1,3)$, $Q = (1,1,-1)$ ed $R = (0,0,1)$.

Svolgimento. Il piano ρ passa per P ed e' parallelo ai vettori $Q - P = (0,0,-4)$ e $R - P = (-1,-1,-2)$ (il fatto che questi due vettori non siano proporzionali equivale a dire che i tre punti non sono allineati). Percio' una sua rappresentazione parametrica e' data dalle equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 4s - 2t. \end{cases}$$

L'equazione cercata e' $x - y = 0$. ■

Esercizio 5. Piano contenente due rette propriamente parallele.

Sia r la retta passante per i punti $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (3, 2, 1)$, ed s la retta passante per i punti $R = (1, 1, 1)$ ed $S = (3, 1, -1)$. Provare che r ed s sono due rette diverse, che sono parallele, e determinare l'equazione cartesiana del piano ρ che le contiene.

Svolgimento. La retta r e' parallela al vettore $Q - P = (2, 0, -2)$. Una sua rappresentazione parametrica e':

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$$

Percio' una sua rappresentazione cartesiana e':

$$\begin{cases} y = 2 \\ x + z = 4. \end{cases}$$

Poiche' le coordinate di R non soddisfano tale equazione, possiamo dire che $r \neq s$. D'altra parte $S - R = (2, 0, -2)$. Quindi r ed s sono rette parallele. Sappiamo allora che sono complanari. Il piano che le contiene e' il piano passante per P, Q, ed R. Tale piano e' parallelo ai vettori $Q - P = (2, 0, -2)$ ed $R - P = (0, -1, -2)$. La rappresentazione parametrica di ρ e':

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - u \\ z = 3 - t - 2u. \end{cases}$$

Eliminando i parametri t ed u otteniamo la rappresentazione cartesiana di ρ:

$$x - 2y + z = 0.$$

Possiamo verificare il risultato, osservando che P, Q ed R soddisfano tale equazione. ■

Esercizio 6. Piano contenente due rette incidenti.

Si considerino le seguenti due rette r ed s:

$$r := \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 5t. \end{cases}, \qquad s := \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -6. \end{cases}$$

Provare che r ed s sono incidenti (cioe' si intersecano esattamente in un punto), e determinare l'equazione cartesiana del piano ρ che le contiene.

Svolgimento. I punti in comune tra r ed s si ottengono in corrispondenza del parametro t per cui:

$$\begin{cases} (1-t)+(2-t)+5t=6 \\ (1-t)-(2-t)-5t=-6. \end{cases}$$

Tale sistema ammette un'unica soluzione, $t = 1$. Cio' prova che le due rette sono incidenti, ed il loro punto comune e' il punto di r corrispondente a $t = 1$, cioe' il punto $P = (0,1,5)$. Il piano ρ e' il piano passante per P, per un altro punto di r ed un altro punto di s, per esempio $Q = (1,2,0)$ ed $R = (0,0,6)$. L'equazione parametrica di ρ e':

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+t-u \\ z = 5-5t+u. \end{cases}$$

Eliminando i parametri t ed u otteniamo l'equazione cercata:

$$4x+y+z=6. \quad \blacksquare$$

Esercizio 7. Retta e piano che si intersecano in un punto.

Si considerino la seguente retta r, ed il piano ρ:

$$r := \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1-5t \end{cases}, \qquad \rho := x+y+z=-1.$$

Provare che r ed ρ hanno esattamente un punto in comune, e determinare tale punto.

Svolgimento. Gli eventuali punti in comune tra r e ρ si ottengono in corrispondenza del parametro t per cui:

$$(1+t)+(2+t)+(1-5t)=-1.$$

Questa equazione ammette un'unica soluzione, cioe' $t = \frac{5}{3}$. Cio' prova che l'intersezione $r \cap \rho$ e' costituita da un solo punto, che e' il punto

$$P = \left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{22}{3}\right). \quad \blacksquare$$

Esercizio 8. Retta parallela ad un piano.

Si considerino la seguente retta r, ed il piano ρ:

$$r := \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-6, \end{cases} \qquad \rho := \begin{cases} x = t+u \\ y = 6-t+u \\ z = -3+t-u. \end{cases}.$$

Provare che r e' parallela al piano ρ.

Svolgimento. Risolvendo il sistema omogeneo associato alla rappresentazione cartesiana di r, vediamo che r e' parallela al vettore $(0,1,-1)$. D'altra parte ρ e' parallelo a $Span((1,-1,1),\ (1,1,-1))$. Poiche' $(0,1,-1) \in Span((1,-1,1),\ (1,1,-1))$, possiamo dire che r e' parallela a ρ. ■

Esercizio 9. Retta e piano propriamente paralleli.

Si considerino la seguente retta r, ed il piano ρ:

$$r := \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-6, \end{cases} \qquad \rho := \begin{cases} x=t+u \\ y=6-t+u \\ z=-3+t-u. \end{cases} .$$

Provare che r e ρ non hanno punti in comune.

Svolgimento. Nell'esercizio precedente abbiamo visto che r e' parallela al piano ρ. Percio', per provare la proprieta' richiesta, e' sufficiente trovare un punto di r che non appartiene a ρ. Ad esempio, il punto $P=(0,6,0)$. ■

Esercizio 10. Retta contenuta in un piano.

Si considerino la seguente retta r, ed il piano ρ:

$$r := \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-6, \end{cases} \qquad \rho := \begin{cases} x=t+u \\ y=6-t+u\ . \\ z=t-u. \end{cases}$$

Provare che r e'contenuta in ρ.

Svolgimento. Con lo stesso calcolo dell'esercizio di prima, vediamo che r e' parallela a ρ. Questa volta pero' il punto $P=(0,6,0)$ di r appartiene a ρ. Poiche' r e' parallela a ρ, si deduce che r e' tutta contenuta in ρ. ■

Esercizio 11. Piano passante per una retta ed un punto.

Si consideri il punto $P=(2,0,0)$ e la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=-2. \end{cases}$$

Determinare l'equazione del piano contenente r e passante per P.

Svolgimento. La retta r passa per $Q=(-2,2,1)$ ed $R=(-5,3,3)$. Il piano cercato e' il piano passante per i punti P, Q, ed R, cioe' e' il piano $\rho = P + Span(Q-P, R-P)$. Tale piano e' costituito da quei punti $X=(x,y,z)$ tali che il vettore $X-P$ appartiene a $Span(Q-P, R-P)$. Percio' l'equazione cartesiana del piano cercato e'

$$\det \begin{bmatrix} -4 & -7 & x-2 \\ 2 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe'

$$3x + 5y + 2z = 6. \quad \blacksquare$$

Esercizio 12. Retta incidente due rette sghembe e passante per un punto.

Si consideri il punto $P = (1, 1, 0)$, e le rette

$$r := \begin{cases} x = 1 \\ 3y + 2z = 5, \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = 0. \end{cases}.$$

Determinare la retta incidente entrambe, e passante per il punto P.

Svolgimento. Le due rette assegnate sono sghembe perche' non sono ne' parallele ne' incidenti. Inoltre il punto P non appartiene ne' ad r ne' ad s. Percio' esistono (e sono unici) il piano contenente r e passante per P, diciamo ρ, ed il piano contenente s e passante per P, diciamo σ. Le equazioni di tali piani sono rispettivamente:

$$x = 1, \quad x - 2z = 1.$$

L'intersezione di tali piani e' una retta:

$$\ell := \rho \cap \sigma = \begin{cases} x = 1 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

(lo e' a priori: infatti il piano ρ ed il piano σ hanno in comune il punto P, percio' la loro intersezione $\rho \cap \sigma$ o e' una retta oppure i due piani coincidono; cio' non puo' accadere, perche' r ed s sono sghembe).

Questa retta e' la retta cercata. Infatti passa per P, interseca la retta r nel punto $X = \left(1, \frac{5}{3}, 0\right)$, e la retta s nel punto $Y = (1, 0, 0)$.

Si osservi che tale retta e' l' unica che soddisfa le proprieta' richieste[3]. $\blacksquare$

Esercizio 13. Piano passante per una retta e parallelo ad un'altra retta.

Si considerino le due rette

$$r := \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y - z = 0, \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3t. \end{cases}.$$

[3] Piu' in generale, siano r ed s due rette sghembe, e P un punto. *Ci chiediamo se esistono rette incidenti simultaneamente r ed s e passanti per P.* Se $P \in r$, ci sono infinite rette. Sono tutte e sole le rette per P ed un punto di s. Similmente, se $P \in s$, ci sono infinite rette, e sono tutte e sole le rette per P ed un punto di r. Se $P \notin r \cup s$, allora sono determinati il piano ρ contenente r e P, ed il piano σ contenente s e P. Questi piani si devono intersecare in una retta $\ell = \rho \cap \sigma$. E' chiaro che se esiste una retta incidente r ed s e passante per P, questa deve essere ℓ (percio' in tal caso la retta e' unica). Ma, in generale, non e' detto che ℓ intersechi r ed s. Cio' accade se e solo se s non e' parallela a ρ ed r non e' parallela a σ. Infatti, se s e' parallela a ρ, essendo anche parallela a σ, allora s e' propriamente parallela ad ℓ, e, similmente, se r e' parallela a σ, allora ℓ ed r sono propriamente parallele.

Determinare l'equazione del piano ρ contenente r e parallelo ad s.

Svolgimento. Sia $ax+by+cz=d$ l'equazione di ρ. Poiche' ρ contiene r, se affianchiamo l'equazione di ρ a quelle di r si ottiene un sistema lineare compatibile di rango 2. Percio' devono esistere scalari λ e μ tali che

$$ax+by+cz-d=\lambda(x-2y-1)+\mu(y-z).$$

D'atra parte tale piano deve essere parallelo ad s, percio'

$$\lambda(1-2)+\mu(1-3)=0.$$

Quindi possiamo assumere

$$\lambda=-2, \quad \mu=1.$$

Il piano cercato e':

$$2x-5y+z=2. \quad \blacksquare$$

10. Distanze.

Nello studio della geometria dello spazio dei punti $\mathcal{E}$, hanno grande importanza tre concetti: *distanza (e lunghezza), angolo, area (e volume)*. Noi tratteremo questi concetti nel caso dei sottospazi affini di $\mathcal{E}$ (punti, rette e piani). A tale proposito, riesce molto utile l'utilizzo del prodotto scalare. Questo studio si puo' generalizzare nel caso di figure piu' generali dei sottospazi affini. Tale geometria, nota come Geometria Differenziale, esula dagli scopi di queste note.

Fissiamo un punto O nello spazio $\mathcal{E}$. Sappiamo che lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ ha una naturale struttura euclidea fornita dal prodotto scalare geometrico. L'identificazione $\mathcal{V}_O \cong \mathcal{V}$ consente di dotare anche $\mathcal{V}$ di struttura euclidea. Dati due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}$ definiamo il prodotto scalare[4]

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}>=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\cos\widehat{\mathbf{uv}}.$$

Sia $\mathcal{R}$ un sistema di riferimento di $\mathcal{E}$, in cui la base $\mathcal{B}$ e' ortonormale. Se denotiamo con (x,y,z) le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e con (x',y',z') quelle di $\mathbf{v}$, sappiamo che:

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}>=xx'+yy'+zz'.$$

Da ora in poi assumeremo che le coordinate siano riferite sempre ad una base ortonormale.

Inoltre utilizzeremo la seguente terminologia. Diremo che due rette $r=P+Span(\mathbf{u})$ ed $s=Q+Span(\mathbf{v})$ sono ortogonali se tali sono le giaciture (cioe' se $<\mathbf{u},\mathbf{v}>=0$).

[4] In qualche libro si usa anche la notazione

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}>=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \quad \text{oppure anche} \quad <\mathbf{u},\mathbf{v}>=\mathbf{u}\times\mathbf{v}.$$

Noi utilizzeremo quest'ultima notazione, dopo, per denotare il *prodotto vettoriale* tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Diremo che la retta $r = P + Span(\mathbf{u})$ e' ortogonale al piano $\rho = Q + Span(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ se la giacitura di r e' contenuta nel complemento ortogonale di quella di ρ (cioe' se $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{u}, \mathbf{w} >= 0$). Dati due piani ρ e σ, diremo che sono ortogonali se tali sono i complementi ortogonali delle rispettive giaciture.

- Distanza tra due punti.

Se P e Q sono due punti, si definisce distanza tra P e Q la lunghezza del vettore $Q - P$:

$$d(P, Q) = ||Q - P||.$$

In termini di coordinate, se $P = (x, y, z)$ e $Q = (x', y', z')$ allora

$$d(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

- Distanza di un punto da una retta.

Sia P un punto, ed r una retta. Si definisce distanza di P da r la minima distanza di P da un punto di r:

$$d(P, r) = \min \{d(P, X) \, : \, X \in r\} .$$

Per calcolare tale distanza possiamo procedere come segue. Sia O un punto di r, e sia $\mathbf{v}$ la proiezione ortogonale di $P - O$ sullo spazio direttore di r. Allora il punto $H = O + \mathbf{v}$ e' detto *il punto proiezione ortogonale di P su r*, ed e' il punto di r di distanza minima da P:

$$d(P, r) = d(P, H).$$

In particolare non dipende dal punto scelto O. Si osservi che se $P = H$, cioe' se $P \in r$, allora la distanza $d(P, r)$ e' 0. Se $P \neq H$, la direzione della retta passante per P ed H e' ortogonale alla direzione di r. Questo costituisce un metodo per il calcolo di $d(P, r)$, come illustrato nell'esempio seguente.

Esercizio 14. Distanza di un punto da una retta.

Calcolare la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 1, -1)$ sulla retta

$$r := \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0, \end{cases},$$

e la distanza di P da r.

Svolgimento. Sia

$$X = \left(\frac{1}{2} + t, \, \frac{1}{2}, \, t\right)$$

il generico punto di r. Il vettore $X - P$ e' ortogonale alla direzione $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ di r se e solo se $< X - P, \mathbf{u} >= 0$, cioe' se e solo se

$$t = -\frac{1}{4}.$$

Percio' la proiezione ortgonale del punto P sulla retta r e' il punto di r corrispondente al parametro $t = -\frac{1}{4}$, cioe' e' il punto $H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. E $d(P, r) = d(P, H) = \sqrt{\frac{11}{8}}$. ■

Esercizio 15. Distanza di un punto da una retta (nel piano).

Calcolare la proiezione ortogonale del punto $P = (x_0, y_0)$ sulla retta r di equazione $ax + by = c$, e la distanza di P da r.

Svolgimento. Il vettore (a, b) e' ortogonale alla direzione di r. Percio' la retta

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

passa per P ed e' ortogonale ad r. Tale retta interseca r nel punto corrispondente al parametro

$$t_0 = \frac{-ax_0 - by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Quindi

$$H = P + t_0(a, b)$$

e

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad ■$$

• Distanza di un punto da un piano.

Sia P un punto, e ρ un piano. Si definisce distanza di P da ρ la minima distanza di P da un punto di ρ:

$$d(P, \rho) = \min \{d(P, X) \ : \ X \in \rho\}.$$

Per calcolare tale distanza possiamo procedere come segue. Sia O un punto di ρ, e sia $\mathbf{v}$ la proiezione ortogonale di $P - O$ sullo spazio direttore di ρ. Allora il punto $H = O + \mathbf{v}$ e' detto *il punto proiezione ortogonale di P su ρ*, ed e' il punto di ρ di distanza minima da P:

$$d(P, \rho) = d(P, H).$$

In particolare non dipende dal punto scelto O. Si osservi che se $P = H$, cioe' se $P \in \rho$, allora la distanza $d(P, \rho)$ e' 0. Se $P \neq H$, la direzione della retta passante per P ed H e' la direzione ortogonale $\mathbf{n}$ alla giacitura di ρ. Questo costituisce un metodo per il calcolo di $d(P, \rho)$, come illustrato nell'esempio seguente (osserviamo anche che $d(P, H)$ coincide con la lunghezza della proiezione ortogonale di $P - O$ su $\mathbf{n}$).

Esercizio 16. Distanza di un punto da un piano.

Calcolare la proiezione ortogonale del punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ sul piano ρ di equazione $ax + by + cz = d$, e la distanza di P da ρ.

Svolgimento. Il vettore (a, b, c) e' ortogonale alla giacitura di ρ. Percio' la retta

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

passa per P ed e' ortogonale ad ρ. Tale retta interseca ρ nel punto corrispondente al parametro

$$t_0 = \frac{-ax_0 - by_0 - cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Quindi

$$H = P + t_0(a, b, c)$$

e

$$d(P, \rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad \blacksquare$$

• Distanza di una retta da una retta.

Siano r ed s due rette distinte. La distanza $d(r, s)$ tra le due rette e' la distanza minima tra i punti di r e quelli di s, cioe'

$$d(r, s) = \min \{d(P, Q) \,:\, P \in r \text{ e } Q \in s\}.$$

E' chiaro che se r ed s sono incidenti, la distanza tra le due rette e' nulla. Se sono parallele, $d(r, s)$ coincide con la distanza di un qualunque punto di r da s. Se r ed s sono sghembe, un modo per calcolare $d(r, s)$ consiste nel cacolarne *la comune perpendicolare* ℓ, che sarebbe la retta incidente sia r che s, e perpendicolare ad entrambe le rette r ed s. Tale retta e' unica, e la distanza tra r ed s e' realizzata dalla distanza tra il punto P in cui ℓ incontra r, ed il punto Q in cui ℓ incontra s.

Esercizio 17. Distanza di una retta da una retta.

Provare che le seguenti rette r ed s sono sghembe, e calcolarne la comune perpendicolare, e la distanza $d(r, s)$.

$$r := \begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Mettendo insieme le equazioni di r con quelle di s si ottiene un sistema lineare la cui matrice completa ha rango 4. Cio' prova che le due rette sono sghembe. Per calcolarne la comune perpendicolare, passiamo alle rappresentazioni parametriche.

$$r := \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = t \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = 1 - 2u \\ z = u. \end{cases}$$

Se P e' il generico punto di r e Q quello di s, la retta $\ell = \ell(P,Q)$ incidente r in P ed s in Q e' diretta dal vettore

$$Q - P = \left(-\frac{3}{2} + 3u - t,\, 1 - 2u - t,\, u - \frac{3}{2}\right).$$

Poiche' r e' parallela al vettore $(1,1,0)$ ed s al vettore $(3,-2,1)$, ne consegue che ℓ e' la comune perpendicolare di r ed s se e solo se

$$\begin{cases} \left(-\frac{3}{2} + 3u - t\right) + (1 - 2u - t) = 0 \\ 3\left(-\frac{3}{2} + 3u - t\right) - 2(1 - 2u - t) + \left(u - \frac{3}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Cioe' se e solo se

$$t = \frac{1}{27}, \qquad u = \frac{31}{54}.$$

Percio' la comune perpendicolare di r ed s e' la retta passante per i punti

$$P = \left(\frac{29}{54}, \frac{1}{27}, \frac{3}{2}\right), \qquad Q = \left(\frac{13}{18}, -\frac{4}{27}, \frac{31}{54}\right).$$

La distanza tra r ed s e':

$$d(r,s) = d(P,Q) = \|Q - P\| = \frac{5}{9}\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

• Distanza di una retta da un piano.

Sia r una retta e ρ un piano. La distanza $d(r,\rho)$ tra r e ρ e' la distanza minima tra i punti di r e quelli di ρ, cioe'

$$d(r,\rho) = \min\left\{d(P,Q) \;:\; P \in r \text{ e } Q \in \rho\right\}.$$

Se r e' contenuta in ρ oppure incide ρ, la distanza e' nulla, $d(r,\rho) = 0$. Altrimenti r e' propriamente parallela al piano, e la distanza $d(r,\rho)$ coincide con la distanza di un qualunque punto di r da ρ.

• Distanza di un piano da un piano.

Siano ρ e σ due piani distinti. La distanza $d(\rho,\sigma)$ tra ρ e σ e' la distanza minima tra i punti di ρ e quelli di σ, cioe'

$$d(\rho,\sigma) = \min\left\{d(P,Q) \;:\; P \in \rho \text{ e } Q \in \sigma\right\}.$$

Se i due piani si intersecano, la distanza e' nulla, $d(\rho,\sigma) = 0$. Altrimenti ρ e' propriamente parallelo al piano σ, e la distanza $d(\rho,\sigma)$ coincide con la distanza di un qualunque punto di ρ da σ.

11. Angoli.

Ricordiamo che, dati due vettori non nulli $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, abbiamo definito *l'angolo* $\widehat{\mathbf{uv}}$ *tra* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ come l'unico angolo $\alpha \in [0, \pi]$ per cui

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha.$$

L'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e' detto anche *l'angolo convesso o non orientato.* C'e' anche la nozione di *angolo orientato tra due vettori*, che pero' in queste note non studieremo. Ora andremo a vedere come, utilizzando l'angolo tra due vettori, possiamo definire l'angolo tra due rette, tra una retta ed un piano, e tra due piani.

• Angolo tra due rette.

Siano r ed s due rette. Definiamo l'angolo $\widehat{r\,s}$ tra la retta r e la retta s il piu' piccolo angolo formato da un vettore $\mathbf{u}$ parallelo ad r ed un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad s. Si osservi che se α e' l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, allora l'angolo formato da due qualunque altri vettori, uno parallelo ad r e l'altro ad s, e' α oppure $\pi - \alpha$. Percio' $\widehat{r\,s} = \min\{\alpha, \pi - \alpha\}$. In particolare $\widehat{r\,s} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e $|\cos\alpha| = \cos\widehat{r\,s}$. Percio' $|\cos\alpha|$ non dipende dalla scelta dei vettori direzionali.

• Angolo tra una retta ed un piano.

Sia r una retta e ρ un piano. Sia σ il piano contenente r ed ortogonale a ρ. La retta s intersezione di ρ con σ si dice *la proiezione ortogonale di* r *su* ρ. L'angolo $\widehat{r\,\rho}$ formato da r e ρ e', per definizione, l'angolo tra r ed s.

Esercizio 18. Angolo tra una retta ed un piano.
Sia r *la retta*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1, \end{cases}$$

e ρ *il piano di equazione* $x - 2y = 0$. *Sia* α *l'angolo formato da* r *con* ρ. *Calcolare* $\cos\alpha$.

Svolgimento. Il generico piano contenente r ha equazione

$$\lambda(x + y - z) + \mu(x + 2y + z - 1) = 0.$$

Tale piano e' ortogonale a ρ se e solo se

$$\lambda + 3\mu = 0.$$

Allora, posto $\lambda = -3$ e $\mu = 1$, la proiezione ortogonale di r su ρ e' la retta:

$$s := \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 4z = -1. \end{cases}$$

La retta r e' parallela al vettore $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$, e la retta s e' parallela al vettore $\mathbf{v} = (8, 4, 5)$. Si ha:

$$\cos \widehat{\mathbf{uv}} = \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}>}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Poiche' tale numero e' ≥ 0, allora

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{10}}. \quad \blacksquare$$

• Angolo tra due piani.

Siano ρ e σ due piani. Siano r una retta ortogonale a ρ ed s una ortogonale a σ. Allora si definisce l'angolo $\widehat{\rho\sigma}$ tra ρ e σ come l'angolo tra r ed s.

Esercizio 19. Angolo tra due piani.

Sia α l'angolo formato dal piano ρ di equazione $x + 2y + z = 1$ e dal piano σ di equazione $x + y - z = 1$. Calcolare $\cos \alpha$.

Svolgimento. Una retta ortogonale a ρ e' diretta dal vettore $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, mentre il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$ fornisce la direzione ad una retta ortogonale a σ. Si ha:

$$\cos \widehat{\mathbf{uv}} = \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}>}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Poiche' tale numero e' ≥ 0, allora

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \blacksquare$$

12. Area.

• Area di un parallelogramma.

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori linearmente indipendenti, in modo tale che se vengono applicati nello stesso punto O, formano i due lati di un parallelogramma. Sia a l'area di tale parallelogramma. Si ha:

$$a = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \widehat{\mathbf{uv}}.$$

Si osservi che

$$a^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \sin^2 \widehat{\mathbf{uv}} = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \widehat{\mathbf{uv}}) = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - <\mathbf{u}, \mathbf{v}>^2 .$$

Cioe'

$$a^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - <\mathbf{u}, \mathbf{v}>^2 .$$

Che possiamo scrivere anche cosi':

$$a^2 = \det \begin{bmatrix} < \mathbf{u}, \mathbf{u} > & < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \\ < \mathbf{v}, \mathbf{u} > & < \mathbf{v}, \mathbf{v} > \end{bmatrix}.$$

Percio' il quadrato a^2 dell'area a del parallelogramma con lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e' uguale al determinante della matrice di Gram del prodotto scalare geometrico ristretto su $Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, rispetto alla base $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

• Il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Ora siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori qualsiasi in $\mathcal{V}$. A partire da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possiamo formare un nuovo vettore, il prodotto vettoriale di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotato con il simbolo $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Esso e' definito come segue. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono legati, si pone $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Altrimenti, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e' quel vettore che ha lunghezza uguale all'area del parallelogramma costruito con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ applicati in uno stesso punto, ha la direzione che e' ortogonale sia ad $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$, ed il suo verso e' tale che la terna di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ sia positiva, cioe' ad un osservatore posto con il piede destro in $\mathbf{u}$ e quello sinistro in $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ha il verso dalla parte della testa dell'osservatore (oppure, se $\mathbf{u}$ denota l'indice della mano destra e $\mathbf{v}$ denota il medio, allora $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ha il verso del pollice). Valgono le seguenti proprieta' di calcolo:

1) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono legati se e solo se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (proprieta' di antisimmetria).

3) $(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \mu(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (proprieta' di linearita' a sinistra).

4) $\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (proprieta' di linearita' a destra).

5) $< \mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} >= 0$, e $< \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} >= 0$.

6) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - < \mathbf{u}, \mathbf{v} >^2$ (identita' di Lagrange).

• Volume di un parallelepipedo.

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre vettori linearmente indipendenti. Applichiamo tali vettori in uno stesso punto O, e sia v il volume del parallelepipedo di lati $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Se assumiamo come base del parallelepipedo il parallelogramma di lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, allora v e' uguale al prodotto dell'area di tale parallelogramma per l'altezza relativa, che altro non e' che la distanza del punto $O + \mathbf{w}$ dal piano del parallelogramma. Tale distanza e' la lunghezza della proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, cioe' e' pari a $\|\mathbf{w}\| \cdot |\cos \widehat{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\, \mathbf{w}}|$. Percio'

$$v = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot |\cos \widehat{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\, \mathbf{w}}| = | < \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} > |.$$

Cioe' *il volume del parallelepipedo di lati* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$ *e' uguale al valore assoluto del prodotto scalare tra* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

• Il prodotto misto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

Dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, si definisce il prodotto misto $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ il seguente numero

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] =< \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} > .$$

• Calcolo del prodotto vettoriale e del prodotto misto tramite le coordinate.

Sia $\mathcal{R}$ un riferimento ortonormale dello spazio. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ la base associata. Supporremo che tale base sia positiva, cioe' che $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tre vettori. Denotiamo con (u_1, u_2, u_3) le coordinate di $\mathbf{u}$, con (v_1, v_2, v_3) le coordinate di $\mathbf{v}$, e con (w_1, w_2, w_3) le coordinate di $\mathbf{w}$. Allora:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3.$$

Ed anche

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 20. Area di un triangolo.

In un riferimento ortonormale positivo dello spazio, si considerino i punti $P = (1, 1, 2)$, $Q = (1, -1, 0)$ *ed* $R = (1, 2, -3)$. *Calcolare l'area* a *del triangolo* PQR.

Svolgimento. Possiamo pensare il triangolo in questione come la meta' del parallelogramma avente come lati i vettori $\mathbf{u} = Q - P = (0, -2, -2)$ e $\mathbf{v} = R - P = (0, 1, -5)$, applicati in P. Quindi l'area cercata e' la meta' del modulo del vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Ora noi sappiamo che

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & -2 & 1 \\ \mathbf{e}_3 & -2 & -5 \end{bmatrix} = 12\mathbf{e}_1.$$

Percio'

$$a = 6.$$

Potevamo anche utilizzare l'identita' di Lagrange:

$$4a^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - <\mathbf{u}, \mathbf{v}>^2 = 144. \quad \blacksquare$$

Esercizio 21. Area di un triangolo (nel piano).

In un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *del piano* ρ, *si considerino i punti* $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ *ed* $R = (r_1, r_2)$. *Sia* a *l'area del triangolo* PQR. *Provare che*

$$a = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{bmatrix}\right|.$$

Svolgimento. Come nell'esercizio precedente, posto $\mathbf{u} = Q - P$ e $\mathbf{v} = R - P$, e posto $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, si ha:

$$a = \frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ \mathbf{e}_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{bmatrix}\right|. \blacksquare$$

Indice dei paragrafi.

Bibliografia.

Nella stesura di questo capitolo ho consultato i seguenti libri.

Algebra Lineare e Geometria Analitica, A. Franchetta, Liguori Editore, 1979.

Algebra lineare, S. Lipschutz, McGraw-Hill, 1994.

Algebra, S. Mac Lane - G. Birkhoff, Mursia, 1978.

Elementi di Geometria e Algebra Lineare, I. Vettori, rette e piani, F. Orecchia, Liguori Editore, 1991.

Geometria 1, E. Sernesi, Bollati Boringhieri, 1989.