Geometria 4, Matematica, I appello, 17 giugno 2013.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos t + t \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} t \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} t \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \qquad (t > 0).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Le equazioni intrinseche di C sono $\kappa^2 = \frac{1}{2s}$, $\tau = 0$.

(b) Le equazioni intrinseche di C sono $\kappa^2 = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$.

(c) C e' contenuta nel piano $x + y + z = 1$.

(d) C e' contenuta in una sfera.

(e) La retta normale a C nel punto $P = \mathbf{x}(\pi)$ e' parallela al vettore $(0, -1, -1)$.

Svolgimento. Derivando otteniamo:

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} t(\sqrt{2} \cos t, \sin t, \sin t),$$

$$\mathbf{x}''(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} \cos t, \sin t, \sin t) + \frac{\sqrt{2}}{2} t(-\sqrt{2} \sin t, \cos t, \cos t),$$

$$\mathbf{x}'''(t) = \sqrt{2}(-\sqrt{2} \sin t, \cos t, \cos t) + \frac{\sqrt{2}}{2} t(-\sqrt{2} \cos t, -\sin t, -\sin t).$$

Deduciamo allora:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = t, \quad s = \frac{t^2}{2}, \quad \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \frac{t^2}{2}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad \|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = t^2, \quad [\mathbf{x}'\, \mathbf{x}''\, \mathbf{x}'''] = 0.$$

Quindi

$$\kappa^2 = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2s}, \quad \text{e} \quad \tau = 0.$$

In particolare C e' una curva piana, ed e' contenuta in un piano ortogonale a $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Percio' non puo' essere contenuta nel piano $x + y + z = 1$, altrimenti C sarebbe una retta, in contrasto con le sue equazioni intrinseche. Ne' C puo' essere contenuta in una sfera, perche', essendo piana, sarebbe una circonferenza, il che comporterebbe κ costante, ancora in contrasto con le equazioni intrinseche. Infine, la retta normale per P deve essere ortogonale a $\mathbf{t}(\pi) = (-1, 0, 0)$, ed anche a $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$. L'unica direzione che soddisfa queste condizioni e' quella determinata dal vettore $(0, -1, -1)$, per cui l'ultima affermazione e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (a) ed (e). ■

Esercizio 2. *Sia C un'elica generale non contenuta in un piano (ossia C e' una curva non piana per la quale esiste un vettore fissato nello spazio, detto l'asse dell'elica, tale che l'angolo tra i vettori tangenti e l'asse sia costante). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'asse di C e' parallelo a tutti i piani osculatori di C.

(b) L'asse di C e' parallelo a tutti i piani normali di C.

(c) L'asse di C e' parallelo a tutti i piani rettificanti di C.

Svolgimento. Sia $\mathbf{u}$ una direzione dell'asse di C. Allora il prodotto scalare $\mathbf{t}\cdot\mathbf{u}$ e' costante, percio' $\dot{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Quindi $\mathbf{n}$ si mantiene ortogonale ad $\mathbf{u}$, cioe' $\mathbf{u}$ e' parallelo a tutti i piani rettificanti di C. Cio' prova che l'affermazione (c) e' vera. Se $\mathbf{u}$ fosse anche parallelo a tutti i piani normali allora $\mathbf{u}$ sarebbe parallelo a $\mathbf{b}$, quindi $\mathbf{b}$ sarebbe costante, il che e' in contrasto con l'ipotesi che C non e' piana. Per lo stesso motivo non puo' accadere che $\mathbf{u}$ sia parallelo ai piani osculatori, perche' allora $\mathbf{t}$ sarebbe costante, e C una retta.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie di equazione $z=xe^{\frac{y}{x}}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Tutti i piani tangenti di S passano per uno stesso punto.

(b) S e' un cono privato del vertice.

(c) S possiede punti ellittici e punti iperbolici.

Svolgimento. Poniamo $f(x,y,z)=z-xe^{\frac{y}{x}}$, e sia $P=(u,v,ue^{\frac{v}{u}})$ il generico punto di S. Allora

$$f_x(P)=e^{\frac{v}{u}}\left(1-\frac{v}{u}\right),\quad f_y(P)=e^{\frac{v}{u}},\quad f_z(P)=-1.$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente ad S in P e':

$$e^{\frac{v}{u}}\left(1-\frac{v}{u}\right)(x-u)+e^{\frac{v}{u}}(y-v)-(z-ue^{\frac{v}{u}})=e^{\frac{v}{u}}\left(1-\frac{v}{u}\right)x+e^{\frac{v}{u}}y-z=0,$$

il che prova che tutti i piani tangenti passano per l'origine $(0,0,0)$.

Ci aspettiamo che S sia un cono di vertice $(0,0,0)$. Per provare cio', sia C la curva che si ottiene intersecando S con un piano non passante per l'origine, per esempio il piano $z=1$, e sia Σ il cono su C di vertice $(0,0,0)$. Una parametrizzazione per C e' data dalla funzione $\mathbf{y}(t)=(t,t\log\frac{1}{t},1)$, ed una rappresentazione parametrica di Σ e':

$$\mathbf{x}(s,t)=s(t,t\log\frac{1}{t},1).$$

Le coordinate di $\mathbf{x}(s,t)$ soddisfano l'equazione di S, percio' $\Sigma\backslash\{(0,0,0)\}\subseteq S$. Viceversa, dati u,v, e posto $s:=ue^{\frac{v}{u}}$ e $t:=e^{-\frac{v}{u}}$, si ha

$$(u,v,ue^{\frac{v}{u}})=s(t,t\log\frac{1}{t},1).$$

Cio' prova che S e' contenuta in $\Sigma\backslash\{(0,0,0)\}$, e dunque che $S=\Sigma\backslash\{(0,0,0)\}$. Il fatto che S sia un cono implica che tutti i suoi punti sono parabolici o planari, percio' l'affermazione (c) e' falsa.

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono la (a) e la (b). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie di equazione $z=x^3+xy+2y^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) I punti con $x>\frac{1}{24}$ sono tutti e soli i punti ellittici di S.

(b) I punti parabolici di S sono disposti lungo una parabola.

(c) Le curvature principali di S nell'origine sono $\kappa_1=2+\sqrt{5}$ e $\kappa_2=2-\sqrt{5}$.

(d) Le direzioni asintotiche di S uscenti dall'origine sono $(1,0,0)$ e $(2,-1,0)$.

Svolgimento. Una rappresentazione parametrica di S e':

$$\mathbf{x}(u,v)=(u,v,u^3+uv+2v^2).$$

Le derivate parziali sono:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 3u^2 + v), \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, u + 4v), \quad \mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 6u), \quad x_{uv} = (0, 0, 1), \quad x_{vv} = (0, 0, 4).$$

Quindi

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-3u^2 - v, -u - 4v, 1),$$

e, posto $\nu := \|(-3u^2 - v, -u - 4v, 1)\|$, si ha

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\nu}(-3u^2 - v, -u - 4v, 1).$$

Percio'

$$L = \frac{6u}{\nu}, \quad M = \frac{1}{\nu}, \quad N = \frac{4}{\nu},$$

e

$$LN - M^2 = \frac{24u - 1}{\nu^2}.$$

Ne consegue che $K > 0$ se e solo se $u > \frac{1}{24}$, il che prova l'affermazione (a). Per S, che non ha punti planari perche' $M \neq 0$, i punti parabolici sono tutti e soli i punti con $K = 0$, cioe' corrispondono alla $v-$curva $u_0 = \frac{1}{24}$, la cui immagine su S e' una parabola nel piano $x = u_0$.

Nell'origine abbiamo $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$. Percio' le curvature principali κ_1 e κ_2 altro non sono che gli autovalori della matrice

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cioe'

$$\kappa_1 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

Infine le direzioni asintotiche sono date dai vettori $\mathbf{x}_u(0,0)du + \mathbf{x}_v(0,0)dv$, con $(du : dv)$ soluzioni dell'equazione $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$, cioe' dell'equazione $2dudv + 4dv^2 = 0$. Per cui anche l'ultima affermazione e' vera.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Sia $\mathcal{V}_+(F)$ il luogo degli zeri di una quadrica irriducibile in $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ ($n \geq 3$). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se P,Q sono due punti distinti di $\mathcal{V}_+(F)$, e $P \in Sing(F)$, allora la retta ℓ_{PQ} che li congiunge e' tutta contenuta in $\mathcal{V}_+(F)$.

(b) Se P,Q sono due punti distinti di $\mathcal{V}_+(F)$, e $P \in Sing(F)$, allora la retta ℓ_{PQ} che li congiunge non e' contenuta in $\mathcal{V}_+(F)$.

(c) Se P e' un punto regolare di $\mathcal{V}_+(F)$, e se $T\, (\cong \mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{C}})$ e' l'iperpiano tangente a $\mathcal{V}_+(F)$ in P, allora $\mathcal{V}_+(F) \cap T$ e' il luogo degli zeri di una quadrica di T per la quale P e' un punto regolare.

(d) Se P e' un punto regolare di $\mathcal{V}_+(F)$, e se $T\, (\cong \mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{C}})$ e' l'iperpiano tangente a $\mathcal{V}_+(F)$ in P, allora $\mathcal{V}_+(F) \cap T$ e' il luogo degli zeri di una quadrica di T per la quale P e' un punto singolare.

Svolgimento. Sia

$$F = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} X_i X_j = X^T C X = 0$$

l'equazione di $\mathcal{V}_+(F)$. E sia $X = \lambda P + \mu Q \in \ell_{PQ}$ il generico punto di ℓ_{PQ}. Sappiamo che $X \in \ell_{PQ} \cap \mathcal{V}_+(F)$ se e solo se

$$P^T C P \lambda^2 + 2P^T C Q \lambda\mu + Q^T C Q \mu^2 = 0.$$

Se P e Q stanno su $\mathcal{V}_+(F)$ allora $P^TCP = Q^TCQ = 0$. Inoltre se P e' singolare per $\mathcal{V}_+(F)$ allora si ha anche $P^TC = \mathbf{0}$. Per cui l'equazione precedente e' identicamente nulla e dunque la retta ℓ_{PQ} e' contenuta in $\mathcal{V}_+(F)$.

Per studiare $\mathcal{V}_+(F) \cap T$ e' lecito assumere che $P = [1 : 0 : \cdots : 0]$, e che T sia l'iperpiano di equazione $X_n = 0$. Per cui possiamo pensare T come $\mathbf{P}^{n-1}_{\mathbf{C}}$ con coordinate $X_0, \ldots, X_{n-1}$. In tal caso allora $\mathcal{V}_+(F) \cap T$ e' il luogo degli zeri dell'equazione

$$G = \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{ij} X_i X_j = 0$$

che e' una quadrica di T (il polinomio G non puo' essere nullo perche' F e' irriducibile). Inoltre, poiche'

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(P) X_i = X_n = 0$$

e' l'equazione dell'iperpiano tangente a $\mathcal{V}_+(F)$ in P allora $\frac{\partial F}{\partial X_i}(P) = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$. Ma allora si ha anche $\frac{\partial G}{\partial X_i}(P) = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, e percio' P e' un punto singolare per la quadrica che rappresenta $\mathcal{V}_+(F) \cap T$.

In conclusione, sono vere soltanto le affermazioni (a) e (d). $\blacksquare$

Geometria 4, Matematica, II appello, 1 luglio 2013.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la spirale logaritmica rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = e^t(\cos t, \sin t).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) L'equazione $(\cos t + \sin t)x - (\cos t - \sin t)y = e^t$ rappresenta la retta normale a C in $P = \mathbf{x}(t)$.

(b) L'evoluta piana di C si ottiene ruotando C intorno all'origine di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$.

(c) L'inviluppo della famiglia delle normali di C e' rappresentato dall'equazione

$$\mathbf{x}^*(t) = e^{2t}(-\sin t, \cos t).$$

Svolgimento. Poiche' $\mathbf{x}'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$, allora la retta normale ha equazione

$$e^t(\cos t - \sin t)(x - e^t \cos t) + e^t(\cos t + \sin t)(y - e^t \sin t) = 0,$$

cioe'

$$(\cos t - \sin t)x + (\cos t + \sin t)y = e^t.$$

Quindi (a) e' falsa. L'inviluppo della famiglia delle rette normali e' costituito dai punti (x, y) che soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} (\cos t - \sin t)x + (\cos t + \sin t)y = e^t \\ (-\cos t - \sin t)x + (\cos t - \sin t)y = e^t \end{cases}$$

(la seconda equazione e' ottenuta dalla prima derivando rispetto a t). Risolvendo il sistema si ottiene $\mathbf{x}^*(t) = e^t(-\sin t, \cos t)$. Quindi anche (c) e' falsa. Infine, ricordiamo che l'evouta piana altro non e' che l'inviluppo delle rette normali. Per cui l'evoluta si rappresenta con la funzione

$$\mathbf{x}^*(t)^T = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)^T.$$

Il che prova che (b) e' vera.

In conclusione, (b) e' l'unica affermazione vera. ■

Esercizio 2. *Sia C una curva non contenuta in un piano, ed S sia la superficie rigata di base C, generata dalle rette binormali di C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S e' sviluppabile.

(b) Le rette binormali di C sono linee asintotiche per S.

(c) Se C e' un'elica circolare con $\kappa_C = 2$ e $\tau_C = 1$, e D e' una linea asintotica per S che non sia una retta, allora nei punti di D si ha $\tau_D^2 = H^4$ (τ_D =torsione di D, H =curvatura media di S).

Svolgimento. Sia $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$ una rappresentazione naturale per C. Allora possiamo rappresentare S sotto la forma $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{b}(u)$. Sappiamo che se S e' sviluppabile allora $[\mathbf{t}\,\mathbf{b}\,\dot{\mathbf{b}}] \equiv 0$, il che implica $\tau \equiv 0$, e cio' non e' possibile perche' C non e' piana. Quindi l'affermazione (a) e' falsa. La (b) e' vera perche' le rette sono sempre linee asintotiche.

Veniamo all'affermazione (c). Per il Teorema di Beltrami-Enneper sappiamo che $\tau_D^2 = -K$. D'altra parte dalla rappresentazione parametrica di S deduciamo (quando $\kappa_C = 2$ e $\tau_C = 1$):

$$E = 1 + v^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = -2\sqrt{E}, \quad M = -\frac{1}{\sqrt{E}}, \quad N = 0.$$

Deduciamo
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{E^2}, \quad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{L}{2E} = -\frac{1}{\sqrt{E}}.$$
Quindi $-K = H^4$, e percio' (c) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto (b) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una rappresentazione regolare di una superficie S con i seguenti coefficienti fondamentali:*
$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \quad F = 0, \quad L = 2, \quad M = 0, \quad N = -2.$$
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) S e' una rigata sviluppabile.

(b) Le curvature principali di S sono $\kappa = \pm\frac{4}{1+u^2+v^2}$.

(c) Le linee asintotiche di S formano due famiglie di curve ortogonali in S.

(d) Le linee asintotiche di S corrispondono ad iperboli nel piano u, v.

Svolgimento. Poiche'
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} \neq 0,$$
allora S certo non puo' essere una rigata sviluppabile. Anche (b) e' falsa perche' altrimenti K, dovendo essere il prodotto delle curvature principali, sarebbe uguale a $K = -\frac{16}{(1+u^2+v^2)^4}$. Le linee asintotiche sono definite dalla condizione
$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 2du^2 - 2dv^2 = 0.$$
Pertanto esse nel piano u, v corrispondono alle famiglie $\frac{dv}{du} = \pm 1$, cioe' $v = \pm u + costante$. Si tratta di rette nel piano u, v, percio' anche (d) e' falsa. Invece (c) e' vera. Infatti le direzioni asintotiche $(du : dv) = (1 : 1)$ e $(\delta u : \delta v) = (1 : -1)$ sono ortogonali in quanto
$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = E - G = 0.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' (c). ■

Esercizio 4. *Sia Σ il cilindro rappresentato dall'equazione*
$$x^2 + y^2 = 4.$$
Si considerino i seguenti punti di Σ: $P = (2, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 3\pi)$, $R = (0, 2, 0)$, ed $S = (2, 0, 7)$. Si denoti con d_I la distanza intrinseca su Σ, e con d_E quella euclidea nello spazio x, y, z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) $d_I(P, Q) = \pi\sqrt{10}$.

(b) $d_I(P, Q) < d_E(P, Q)$.

(c) $d_I(P, S) = d_E(P, S)$.

(d) $d_E(P, R) = 2\sqrt{2}$.

Svolgimento. Consideriamo la carta di Σ
$$(u, v) \in]-\pi, 3\pi[\times \mathbf{R} \to \mathbf{x}(u, v) := \Big(2\cos\frac{u}{2}, 2\sin\frac{u}{2}, v\Big) \in \Sigma,$$

per la quale si ha

$$P = \mathbf{x}(0,0), \quad Q = \mathbf{x}(\pi, 3\pi), \quad R = \mathbf{x}(\pi, 0), \quad S = \mathbf{x}(0,7),$$

ed anche

$$E = G = 1, \quad F = 0.$$

Per cui $d_I(P,Q)$ coincide con la lunghezza del segmento di estremi $(0,0)$, $(\pi, 3\pi)$ nel piano u, v, cioe' $d_I(P,Q) = \pi\sqrt{10}$. Percio' (a) e' vera.

In alternativa: sappiamo che le geodetiche del cilindro sono (a parte le generatrici e le traslate della base, nessuna delle quali passa simultaneamente per P e Q) le eliche circolari; possiamo allora cercare un'elica siffatta C passante per P e Q, del tipo $\mathbf{y}(t) = (2\cos t, 2\sin t, bt)$; dovendo passare anche per Q deve essere $b = 6$; calcolando la lunghezza dell'arco di tale elica compreso tra P e Q otteniamo di nuovo la (a).

L'affermazione (b) e' palesemente falsa. L'affermazione (c) e' vera perche' i punti P ed S sono allineati sul cilindro. Anche la (d) e' vera in quanto $d_E(P,R) = \|P - R\| = \|(2,-2,0)\| = 2\sqrt{2}$.

In conclusione, le sole affermazioni vere sono (a), (c), e (d). ∎

Esercizio 5. *Nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ si considerino quattro punti E_0, E_1, E_2, E, a tre a tre non allineati. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esiste un'unica conica nonsingolare passante per E_0, E_1 ed E_2, per la quale la retta ℓ_{E_0E} e' una retta tangente.

(b) Ci sono infinite coniche nonsingolari passanti per E_0, E_1 ed E_2, per le quali la retta ℓ_{E_0E} e' una retta tangente.

(c) Non esiste nessuna conica nonsingolare passante per E_0, E_1 ed E_2, per la quale la retta ℓ_{E_0E} e' una retta tangente.

Svolgimento. Possiamo supporre $E_0 = [1:0:0]$, $E_1 = [0:1:0]$, $E_2 = [0:0:1]$, $E = [1:1:1]$. In tal caso una conica passa per E_0, E_1 ed E_2 se e solo se la sua equazione e' del tipo

$$F = aX_0X_1 + bX_0X_2 + cX_1X_2 = 0,$$

mentre la retta ℓ_{E_0E} ha equazione

$$X_1 - X_2 = 0.$$

D'altra parte la retta tangente ad F in E_0 ha equazione $aX_1 + bX_2 = 0$. Per cui se esiste una conica nonsingolare che soddisfa le condizioni richieste, essa ha un'equazione del tipo

$$a(X_0X_1 - X_0X_2) + cX_1X_2 = 0, \quad [a:c] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}.$$

E viceversa, se l'equazione precedente definisce una conica nonsingolare, allora essa soddisfa le condizioni richieste. Il calcolo del determinante della matrice di Gram mostra che tale conica e' nonsingolare se e solo se $ac \neq 0$. Per cui tutte e sole le coniche nonsingolari passanti per E_0, E_1 ed E_2, per le quali la retta ℓ_{E_0E} e' una retta tangente, sono quelle di equazione

$$a(X_0X_1 - X_0X_2) + cX_1X_2 = 0, \quad [a:c] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \backslash \{[1:0], [0:1]\}.$$

Ce ne sono pertanto infinite.

In conclusione, l' unica affermazione vera e' la (b). ∎

Geometria 4, Matematica, III appello, 5 settembre 2013.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(2t - \log t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(2t + \log t),\ t^2\right) \qquad (t > 0).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) $\kappa = -\tau$.

(b) Nel punto $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ *il triedro di Frenet di* C *e':*

$$\mathbf{t} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 4), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}, 0, -1).$$

(c) Il piano osculatore a C *nel punto* $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ *ha equazione* $2\sqrt{2}x - z = 3$.

Svolgimento. Per rispondere alla prima domanda, andiamo a calcolare la curvatura e la torsione di C in funzione di t. Derivando otteniamo:

$$\mathbf{x}'(t) = (\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2t}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2t}, 2t),$$

$$\mathbf{x}''(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2t^2}, -\frac{\sqrt{2}}{2t^2}, 2),$$

$$\mathbf{x}'''(t) = (-\frac{\sqrt{2}}{t^3}, \frac{\sqrt{2}}{t^3}, 0).$$

Deduciamo allora:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \frac{1}{t}(1 + 2t^2), \qquad \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = (2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{t}, -2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{t}, -\frac{2}{t^2}),$$

$$\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = \frac{2}{t^2}(1 + 2t^2), \qquad [\mathbf{x}'\,\mathbf{x}''\,\mathbf{x}'''] = -\frac{8}{t^3}.$$

Quindi

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{2t}{(1 + 2t^2)^2},$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{x}'\,\mathbf{x}''\,\mathbf{x}''']}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2} = -\frac{2t}{(1 + 2t^2)^2}.$$

Cio' prova che la (a) e' vera.

Il punto P corrisponde al valore $t = 1$. Percio' utilizzando il calcolo precedente abbiamo:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(1)}{\|\mathbf{x}'(1)\|} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4),$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)}{\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\|} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}, 0, -1),$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 4).$$

Percio' anche la (b) e' vera. Come lo e' la (c), in quanto il piano assegnato e' ortogonale a $\mathbf{b}(1)$, e passa per P.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 2. *La prima forma fondamentale di una superficie S e' la seguente:*

$$I(du, dv) = du^2 + (u^2 + c^2)dv^2,$$

dove c e' un parametro. Siano A e B le due curve di S corrispondenti alle rette del piano u, v rappresentate dalle equazioni $2u + v = 0$, e $u - 2v = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Nel punto in comune le curve A e B hanno la stessa retta tangente se e solo se $c = 0$.

(b) Nel punto in comune le curve A e B si incontrano ortogonalmente se e solo se $c^2 = 4$.

Svolgimento. Il punto P in comune ad A e B e' quello corrispondente all'origine $u = 0$, $v = 0$ del piano u, v. Il vettore $(1, -2)$ e' un vettore tangente alla retta $2u + v = 0$ nell'origine, mentre il vettore $(2, 1)$ e' un vettore tangente alla retta $u - 2v = 0$ nell'origine. Sulla superficie S tali vettori corrispondono a due vettori tangenti in P, chiamiamoli $d\mathbf{x}$ e $\delta\mathbf{x}$, il primo tangente ad A in P, ed il secondo tangente a B in P. Tali vettori formano un angolo α dato da:

$$\cos\alpha = \frac{d\mathbf{x}\cdot\delta\mathbf{x}}{\|d\mathbf{x}\|\,\|\delta\mathbf{x}\|} = \frac{\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2-2c^2}{(1+4c^2)^{\frac{1}{2}}(4+c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ora A e B hanno la stessa retta tangente in P se e solo se $\cos\alpha = \pm 1$, e cio' equivale a dire che $c = 0$. Quindi (a) e' vera.(*) Invece A e B si incontrano ortogonalmente in P se e solo se $\cos\alpha = 0$, cioe' se e solo se $c^2 = 1$. Quindi (b) e' falsa.

In conclusione, (a) e' vera e (b) e' falsa. ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie che si ottiene ruotando la parabola $x^2 = 4z$ del piano x, z intorno all'asse z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S possiede un atlante costituito da un'unica carta.

(b) S e' compatta.

(c) L'origine e' l'unico ombelico di S.

(d) L'equazione del piano tangente ad S nel punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ e' $x_0x + y_0y - 2z = 2z_0$.

Svolgimento. Poiche' S si ottiene ruotando la parabola $\mathbf{x}(t) = (t, 0, \frac{t^2}{4})$ intorno all'asse z, allora una rappresentazione parametrica di S e' data dalla funzione $\mathbf{x}(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{t^2}{4})$. Ne deduciamo la seguente rappresentazione cartesiana di S: $x^2 + y^2 = 4z$. Dunque S e' un grafico, e percio' ammette una carta globale, cioe' $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \frac{u^2+v^2}{4})$. Quindi la proprieta' (a) e' vera. Da quest'ultima carta otteniamo i seguenti coefficienti fondamentali:

$$E = 1 + \frac{u^2}{4}, \quad F = \frac{uv}{4}, \quad G = 1 + \frac{v^2}{4}, \quad L = N = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+4}}, \quad M = 0.$$

Cio' premesso, veniamo alle altre domande. E' chiaro che S non e' compatta, perche' non e' limitata, infatti contiene una parabola. Quanto ai punti ombelicali, sappiamo che essi sono i punti in cui la matrice

$$\begin{bmatrix} L & M & N \\ E & F & G \end{bmatrix}$$

(*)Alcuni studenti hanno osservato che se $c = 0$ allora nel punto $u = v = 0$ si ha $G = 0$, il che e' assurdo; percio' le due curve non possono avere la stessa retta tangente, e dunque la risposta corretta e' che (a) e' falsa.

ha rango ≤ 1. Poiche' $M = 0$ allora $F = 0$ e percio' $uv = 0$. D'altra parte $L = N$, percio' $E = G$ e dunque $v = \pm u$. Ne deduciamo che $u = v = 0$, e percio' S possiede un unico punto ombelicale, cioe' l'origine. Infine, ricordando che l'equazione del piano tangente in $P = (x_0, y_0, z_0)$ per una superficie $f(x, y, z) = 0$, e' $f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) = 0$, nel nostro caso abbiamo:

$$f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 4(z - z_0) = 0,$$

cioe' $x_0 x + y_0 y - 2z = 2z_0$ (si tenga presente che $x_0^2 + y_0^2 = 4z_0$).

In conclusione, le uniche proprieta' vere sono la (a), la (c), e la (d). $\blacksquare$

Esercizio 4. *Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, v)$ una rappresentazione regolare di una superficie S con i seguenti primi coefficienti fondamentali:*

$$E = c^2 + v^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

(c denota un parametro). Sia Γ l'arco della θ-curva $v = v_0$ di S compreso tra i punti P_1 e P_2 corrispondenti a (θ_1, v_0) e (θ_2, v_0) $(\theta_1 \leq \theta_2)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) La lunghezza di Γ e' pari a $\ell(\Gamma) = (\theta_2 - \theta_1)(c^2 + v_0^2)$.

(b) Nei punti di Γ si ha $\kappa_g = -\frac{v_0}{c^2+v_0^2}$.

Svolgimento. Sappiamo che la lunghezza di un arco sopra una superficie e' l'integrale della radice quadrata di I. Percio', nel nostro caso, tenuto conto che Γ corrisponde al segmento $\theta(t) = t$, $v = v_0$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$, abbiamo:

$$\ell(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dv}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{c^2 + v_0^2}dt = (\theta_2 - \theta_1)\sqrt{c^2 + v_0^2}.$$

Percio' (a) e' falsa. Invece, per la curvatura geodetica, poiche' $F = 0$, possiamo applicare la formula:

$$\kappa_g = (\kappa_g)_{v=v_0} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = -\frac{E_v}{2E} = -\frac{v_0}{c^2 + v_0^2},$$

il che prova che (b) e' vera.

In conclusione, l'unica proprieta' vera e' la (b). $\blacksquare$

Esercizio 5. *Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ si consideri la quadrica Q luogo degli zeri dell'equazione*

$$X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 - 2X_0X_3 + 2X_1^2 - 2X_1X_2 + 4X_1X_3 + 2X_2^2 + 3X_3^2 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$.

(b) Q e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$.

(c) Ogni piano di $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ interseca Q in qualche punto.

(d) Q e' anche un sottospazio.

Svolgimento. La matrice di Gram dell'equazione di Q e' la seguente:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applicando a G l'algoritmo di Gauss-Lagrange (cioe' applicando le operazioni elementari $e_{21}(1)$, $e^{21}(1)$, $e_{31}(-1)$, $e^{31}(-1)$, $e_{41}(1)$, $e^{41}(1)$, $e_{42}(-1)$, $e^{42}(-1)$, $e_{43}(-1)$, $e^{43}(-1)$), si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che Q e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. Quindi la proprieta' (b) e' vera, mentre e' falsa la (a) per l'unicita' della forma canonica. Quanto alle altre proprieta', osserviamo che esse sono invarianti per proiettivita'. Percio' e' sufficiente analizzarle per la quadrica $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. Il luogo degli zeri di tale quadrica e' il punto $[0 : 0 : 0 : 1]$. Percio' (c) e' falsa, mentre (d) e' vera.

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono la (b) e la (d). ■

Geometria 4, Matematica, Appello straordinario, 19 settembre 2013.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = e^t(\cos t + \sin t, \sin t - \cos t, \cos t).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) La funzione curvatura $\kappa = \kappa(t)$ di C e' costante.
(b) La curva C e' contenuta in una sfera.
(c) Il piano osculatore a C nel punto $P = (1, -1, 1)$ passa per l'origine.

Svolgimento. Calcolando le derivate della rappresentazione di C otteniamo:

$$\mathbf{x}'(t) = e^t(2\cos t, 2\sin t, \cos t - \sin t), \quad \mathbf{x}''(t) = 2e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, -\sin t),$$

$$\mathbf{x}'''(t) = 2e^t(-2\sin t, 2\cos t, -\sin t - \cos t), \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = 2\sqrt{6}e^{-t}(5 - 2\cos t \sin t)^{-\frac{3}{2}}.$$

Percio' κ non e' costante, e la (a) e' falsa. Osserviamo anche che $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{x}'(t) + \frac{1}{2}\mathbf{x}'''(t)$, percio' la torsione di C e' identicamente nulla, cioe' C e' contenuta in un piano. Ne deduciamo che (b) e' falsa, altrimenti C sarebbe una circonferenza, il che non e' possibile perche' κ non e' costante. Infine il piano osculatore a C in P e' ortogonale al vettore $(-1, 1, 2)$ (infatti tale vettore e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)$), e, dovendo passare per P, ha equazione cartesiana $x - y - 2z = 0$, percio' (c) e' vera.

In conclusione, l' unica proprieta' vera e' la (c). ■

Esercizio 2. *Sia S la superficie di equazione $z = (x + 1)^2 y$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*
(a) S non possiede punti ombelicali.
(b) I punti parabolici di S sono contenuti in una retta.
(c) Le curvature principali di S nel punto $O = (0, 0, 0)$ sono $\kappa_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\kappa_1 = -\sqrt{2}$.
(d) Le direzioni asintotiche di S uscenti dal punto $P = (0, 1, 1)$ sono $(0, 1, 1)$ e $(2, -1, 3)$.

Svolgimento. Calcolando le derivate della rappresentazione $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, (u + 1)^2 v)$, otteniamo:

$$E = 1 + 4v^2(u + 1)^2, \quad F = 2v(u + 1)^3, \quad G = 1 + (u + 1)^4, \quad L = \frac{2v}{\nu}, \quad M = \frac{2(u + 1)}{\nu}, \quad N = 0,$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\nu}(-2v(u + 1), -(u + 1)^2, 1),$$

dove abbiamo posto $\nu := \sqrt{4v^2(u + 1)^2 + (u + 1)^4 + 1}$. Osserviamo che il punto $Q = (-1, 0, 0)$ (che si ottiene in corrispondenza di $u = -1$ e $v = 0$), e' un punto planare per S, percio' ombelicale, dunque (a) e' falsa. I punti parabolici di S, invece, sono quei punti per cui $LN - M^2 = -4\frac{(u+1)^2}{\nu^2} = 0$, $v \neq 0$. Percio' tali punti sono tutti contenuti nella retta $x + 1 = 0, z = 0$, e la (b) e' vera. Nel punto O abbiamo:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2, \quad L = 0, \quad M = \sqrt{2}, \quad N = 0,$$

percio' le curvature principali in O sono date dalle soluzioni dell'equazione:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} - \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

da cui otteniamo $\kappa = \pm 1$, dunque (c) e' falsa. Infine, poiche' il punto P corrisponde a $u = 0$ e $v = 1$, allora l'equazione delle direzioni asintotiche in P e':

$$du^2 + 2dudv = 0.$$

Alla soluzione $du = 0$ corrisponde il vettore tangente $\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv = (0, 1, 1)$, ed alla soluzione $du = 1$, $dv = -\frac{1}{2}$, corrisponde il vettore tangente $(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Percio' l'ultima proprieta' (d) e' vera.

In conclusione, le uniche proprieta' vere sono la (b) e la (d). ■

Esercizio 3. *Sia S la sfera di centro il punto $C = (1, 2, -3)$, e raggio 1. Si considerino i seguenti punti di S: $P = (2, 2, -3)$, $Q = (\frac{3}{2}, \frac{4+\sqrt{3}}{2}, -3)$ ed $R = (0, 2, -3)$. Si denoti con d_I la distanza intrinseca su S, e con d_E quella euclidea nello spazio x, y, z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $d_I(P, Q) = \frac{\pi}{3}$.

(b) $d_I(P, Q) = \frac{\pi}{6}$.

(c) $d_I(P, R) = \pi$.

(d) $d_E(P, R) = 2$.

Svolgimento. I vettori $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CQ}$ formano un angolo di ampiezza 60^0. Quindi il piano passante per C, P, Q interseca la sfera S in un cerchio massimo, sul quale P e Q sono estremi di un arco di lunghezza minima, pari a $\frac{\pi}{3}$. Percio' (a) e' vera, e (b) e' falsa. Invece l'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CR}$ e' ampio 180^0. Cio' significa che i punti P ed R sono antipodali rispetto al centro di S. Percio' sia (c) che (d) sono vere.

In conclusione, le uniche proprieta' vere sono la (a), la (c), e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie di equazione $xyz = 1$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S possiede un atlante costituito da un'unica carta.

(b) S e' compatta.

(c) S non possiede punti ellittici.

(d) Il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_0 x - y_0 y = x_0^2 - y_0^2 \\ x_0 x - z_0 z = x_0^2 - z_0^2 \end{cases}$$

rappresenta la retta normale ad S nel punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

Svolgimento. L'applicazione

$$(u, v) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(u, v) : uv = 0\} \to \mathbf{x}(u, v) := (u, v, \frac{1}{uv}) \in S$$

fornisce una carta globale per S, percio' (a) e' vera, e (b) e' falsa perche' S e' omeomorfa a $\mathbf{R}^2 \backslash \{(u, v) : uv = 0\}$, che non e' compatto in quanto non e' limitato. Poi, calcolando le derivate di $\mathbf{x}$, otteniamo

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}(v, u, u^2 v^2), \quad L = \frac{2}{\sqrt{\nu}} \frac{v}{u}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \quad N = \frac{2}{\sqrt{\nu}} \frac{u}{v}$$

$(\nu := u^2 + v^2 + u^4 v^4)$. Deduciamo $LN - M^2 = \frac{3}{\nu} > 0$, quindi tutti i punti di S sono ellittici, e (c) e' falsa. Infine osserviamo che la retta indicata passa per $P = (x_0, y_0, z_0)$, ed e' parallela ad $\mathbf{N}$ calcolato in P. Percio' (d) e' vera.

In conclusione, le uniche proprieta' vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 5. *Nello spazio proiettivo* $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ *si consideri la quadrica* Q *luogo degli zeri dell'equazione*

$$X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_3 + 2X_1^2 + 2X_1X_3 - X_2^2 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q *e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione* $-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$.

(b) Q *e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione* $-X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$.

(c) Ogni piano di $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ *interseca* Q *in qualche punto.*

(d) La retta passante per i punti $[0 : 0 : 1 : 0]$ *e* $[0 : 0 : 0 : 1]$ *e' una retta tangente a* Q.

Svolgimento. La matrice di Gram dell'equazione di Q e' la seguente:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando alla matrice G l'algoritmo di Gauss-Lagrange (cioe' applicando le operazioni elementari $e_{21}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e_{41}(-1)$, $e^{41}(-1)$, p_{14} p^{14}, p_{23}, p^{23}), si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che Q e' proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione $-X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$. Quindi la proprieta' (b) e' vera, mentre e' falsa la (a) per l'unicita' della forma canonica. Dalla forma canonica di Q deduciamo che Q ha indice $i = 1$, e percio', per la stessa definizione di indice, la proprieta' (c) e' vera. Infine osserviamo che Q e' nonsingolare, perche' non lo e' la sua forma canonica, e la retta assegnata interseca Q solo nel punto $[0 : 0 : 0 : 1]$. Percio' tale retta e' tangente a Q nel punto $[0 : 0 : 0 : 1]$, ed anche (d) e' vera.

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono la (b), la (c), e la (d). $\blacksquare$

Geometria 4, Matematica, II Appello straordinario, 26 novembre 2013.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Siano C e D le curve piane rappresentate rispettivamente dalle equazioni $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$. Al variare del punto P in $C \cap D$, sia α_P l'angolo sotto cui C e D si intersecano in P.*
Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Per ogni $P \in C \cap D$ si ha $\cos\alpha_P \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right\}$.

(b) Per ogni $P \in C \cap D$ si ha $\cos\alpha_P \in \{\pm 1,\, 0\}$.

(c) Per ogni $P \in C \cap D$ si ha $\cos\alpha_P \in \left\{\pm\frac{3}{\sqrt{10}},\, \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

Svolgimento. Le due curve si intersecano esattamente nei due punti $P = (2, -2)$ e $Q = (2, 2)$. Un vettore tangente a C in P e' $(1, 1)$, e un vettore tangente a C in Q e' dato da $(-1, 1)$. Inoltre un vettore tangente a D in P e' $(-2, 1)$, e un vettore tangente a D in Q e' dato da $(2, 1)$. Percio' in P le due curve si incontrano sotto un angolo α_P dato da

$$\pm\cos\alpha_P = \frac{(1,1)\cdot(-2,1)}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

E in Q l'angolo e' dato da:

$$\pm\cos\alpha_Q = \frac{(-1,1)\cdot(2,1)}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva intersezione delle superfici $x^2 = z$, $z^2 = y$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Nel punto $P = (1, 1, 1)$, la curva C ha il piano osculatore di equazione $8x + y - 6z = 3$.

(b) Nel punto $P = (1, 1, 1)$, la curva C ha il piano normale di equazione $x + 4y + 2z = 7$.

(c) Il piano rettificante a C nel punto $P = (1, 1, 1)$ ammette la seguente rappresentazione parametrica: $x = 1 + 8s + t$, $y = 1 + s + 4t$, $z = 1 - 6s + 2t$.

Svolgimento. La curva assegnata ammette come rappresentazione parametrica $\mathbf{x}(t) = (t, t^4, t^2)$. Quindi $\mathbf{x}'(t) = (1, 4t^3, 2t)$, $\mathbf{x}''(t) = (0, 12t^2, 2)$, e $\mathbf{x}'''(t) = (0, 24t, 0)$. Percio', nel punto $P = \mathbf{x}(1)$, si ha che $\mathbf{t}(P)$ e' parallelo al vettore $(1, 4, 2)$, e $\mathbf{b}(P)$ al vettore $(8, 1, -6)$. Tenuto conto che l'equazione del piano osculatore e' $(\mathbf{x} - P)\cdot\mathbf{b}(P) = 0$, che quella del piano normale e' $(\mathbf{x} - P)\cdot\mathbf{t}(P) = 0$, e che la rappresentazione parametrica del piano rettificante e' data da $\mathbf{x} = P + s\mathbf{b}(P) + t\mathbf{t}(P)$, un calcolo diretto prova che tutte le affermazioni sono vere.

In conclusione, le affermazioni sono tutte vere. ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie rigata avente come base la curva $\mathbf{y}(u) = (u, u, u^2)$, e direttrici parallele al vettore $\mathbf{g}(u) = (0, \cos u, \sin u)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S e' una superficie sviluppabile.

(b) Il piano tangente ad S nel punto $P = (0, 1, 0)$ ha equazione $x - y + 1 = 0$.

(c) La retta normale ad S nel punto $P = (0, 1, 0)$ ha equazioni $x + y = 1$, $z = 0$.

Svolgimento. Sappiamo che una rigata e' sviluppabile se e soltanto se il prodotto misto $[\mathbf{y}'(u)\,\mathbf{g}(u)\,\mathbf{g}'(u)]$ e' identicamente nullo. Nel nostro caso abbiamo

$$[\mathbf{y}'(u)\,\mathbf{g}(u)\,\mathbf{g}'(u)] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos u & -\sin u \\ 2u & \sin u & \cos u \end{bmatrix} = 1,$$

percio' S non e' sviluppabile, ed (a) e' falsa. Per le altre domande, osserviamo che la rappresentazione parametrica di S e' data dalla funzione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u,u,u^2) + v(0,\cos u,\sin u).$$

Percio' nel punto $P = (0,1,0) = \mathbf{x}(0,1)$ abbiamo

$$\mathbf{x}_u(P) = (1,1,1), \quad \mathbf{x}_v(P) = (0,0,1), \quad \mathbf{x}_u(P) \times \mathbf{x}_v(P) = (1,-1,0).$$

Ne consegue che il piano tangente ad S in P ha equazione $(\mathbf{x} - P) \cdot (x_u(P) \times \mathbf{x}_v(P)) = x - y + 1 = 0$, mentre la retta normale ha equazioni parametriche $\mathbf{x} = P + \lambda(1,-1,0)$. Percio' (b) e (c) sono vere.(*)

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie di equazione $x^3 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - z = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Nei punti di S con $x = 1$ c'e' una sola direzione asintotica.

(b) Nei punti di S con $x < 1$ ci sono due direzioni asintotiche distinte.

(c) Nei punti di S con $x \neq 1$ ci sono due direzioni asintotiche distinte.

Svolgimento. Poiche' $z = x^3 - 2\sqrt{3}xy + y^2$, la superficie e' un grafico, ed ammette la rappresentazione parametrica

$$\mathbf{x}(u,v) = (u,v,u^3 - 2\sqrt{3}uv + v^2).$$

Si deduce:

$$LN - M^2 = \frac{12u - 12}{\|(-3u^2 + 2\sqrt{3}v, 2\sqrt{3}u - 2v, 1)\|^2}.$$

Percio' per $u > 1$ i punti di S sono ellittici, per $u < 1$ sono iperbolici, e per $u = 1$ sono parabolici (non ci sono punti planari perche' $N = \frac{2}{\|(-3u^2+2\sqrt{3}v, 2\sqrt{3}u-2v,1)\|}$ non si annulla mai). Ricordando che in un punto parabolico c'e' una sola direzione asintotica, che in quelli iperbolici ce ne sono due, e che in quelli ellittici non ce ne sono, deduciamo che (a) e (b) sono vere, e (c) e' falsa.

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono (a) e (b). ■

Esercizio 5. *Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ si consideri la quadrica Q luogo degli zeri dell'equazione*

$$X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_3 + 2X_1^2 + 2X_1X_3 + X_2^2 + X_3^2 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q non contiene rette.

(b) Esistono due rette di Q disgiunte.

(c) Q contiene rette, e tutte passano per uno stesso punto.

Svolgimento. La quadrica e' proiettivamente equivalente alla quadrica definita dall'equazione $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. Percio' Q e' un cono su una conica nonsingolare. Deduciamo che Q possiede rette, e sono tutte e sole quelle che congiungono i punti della conica con il vertice. Quindi (a) e (b) sono false, e (c) e' vera.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' (c). ■

(*)Anche qui c'e' un errore, che mi e' stato fatto notare da alcuni studenti. Infatti deve essere $\mathbf{x}_v(P) = (0,1,0)$, e quindi $\mathbf{x}_u(P) \times \mathbf{x}_v(P) = (-1,0,1)$. Ne consegue che il piano tangente ha equazione $x - z = 0$, e la retta normale e' l'intersezione dei piani $y = 1$, $x + z = 0$. Percio' anche (b) e (c) sono false.

Geometria 4, Matematica, IV appello, 19 febbraio 2014.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(-\frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2},\, e^t(\cos t - \sin t) + 1,\, -\frac{\sqrt{3}\, e^t}{2}(\sin t + \cos t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) L'arco di C compreso tra i punti $\mathbf{x}(0)$ ed $\mathbf{x}(t)$ ha lunghezza $\ell = 2(e^t - 1)$.

(b) La curva C e' contenuta in un piano passante per l'origine.

(c) La curvatura di C soddisfa l'equazione $2e^t\kappa(t) = 1$.

(d) L'intersezione del piano osculatore a C nel punto $P = (-1, 2, -\sqrt{3})$, con il piano rettificante, e' la retta $\mathbf{x}(s) = (s-1, 2, \sqrt{3}(s-1))$.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che le coordinate di $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ soddisfano l'equazione $\sqrt{3}x_1(t) - x_3(t) = 0$. Percio' la curva e' contenuta nel piano di equazione $\sqrt{3}x_1 - x_3 = 0$, che passa per l'origine (in alternativa, avremmo potuto calcolare la torsione di C, verificare che e' identicamente nulla, e dedurne che C e' piana; poi, per trovare l'equazione del piano, sarebbe stato sufficiente calcolare il piano osculatore di C in un qualsiasi suo punto).

Ora derivando otteniamo:

$$\mathbf{x}'(t) = e^t(-\cos t, -2\sin t, -\sqrt{3}\cos t), \qquad \|\mathbf{x}'(t)\| = 2e^t,$$

$$\mathbf{x}''(t) = e^t(-\cos t + \sin t, -2\sin t - 2\cos t, -\sqrt{3}\cos t + \sqrt{3}\sin t),$$

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = e^{2t}(-2\sqrt{3}, 0, 2), \qquad \|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = 4e^{2t}.$$

Deduciamo:

$$\ell = \int_0^t \|\mathbf{x}'(\tau)\| d\tau = \int_0^t 2e^\tau d\tau = 2(e^t - 1).$$

Poi

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Con cio' abbiamo verificato che le prime tre affermazioni sono vere. Infine, osserviamo che, in generale, l'intersezione del piano osculatore con il piano rettificante, altro non e' che la retta tangente in $P = \mathbf{x}(0)$. E tale retta e':

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + s\mathbf{x}'(0) = (-s-1, 2, \sqrt{3}(-s-1)).$$

E tale retta coincide con quella indicata nel testo dell'esercizio.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti curve C_1 e C_2:*

$$\mathbf{x}_1(t) = 2e^t(\cos t, \sin t), \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^t(\cos t, \sin t).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Le curve C_1 e C_2 sono uguali.

(b) Le due curve sono sovrapponibili.

(c) Le due curve non sono sovrapponibili.

Svolgimento. Le due curve sono diverse. Per provare cio', e' sufficiente osservare che il punto $(1, 0)$, che appartiene all'immagine della funzione $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(t)$, non appartiene all'immagine della funzione $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(t)$ (altrimenti esisterebbe $t \in \mathbf{R}$ tale che $2e^t(\cos t, \sin t) = (1, 0)$; tale numero allora soddisfa la condizione $e^t = \frac{1}{2}$, percio' $-1 < t < 0$, e cio' e' impossibile perche' in tale intervallo la funzione seno non si annulla). Pero' le due curve sono sovrapponibili. Per provare cio', possiamo rappresentare le due curve con l'ascissa curvilinea (effettuando la sostituzione $s = 2\sqrt{2}e^t = 2\sqrt{2} + \int_0^t \|\mathbf{x}_1'(\tau)\| d\tau$ per la prima curva, ed $s = \sqrt{2}e^t = \sqrt{2} + \int_0^t \|\mathbf{x}_2'(\tau)\| d\tau$ per la seconda):

$$\mathbf{x}_1(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\left(\cos\log\frac{s}{2\sqrt{2}}, \sin\log\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \qquad \mathbf{x}_2(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\left(\cos\log\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\log\frac{s}{\sqrt{2}}\right),$$

calcolare le rispettive curvature

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{s}, \qquad \kappa_2(s) = \frac{1}{s},$$

osservare che coincidono, e finalmente invocare il Teorema di esistenza ed unicita'.

Possiamo anche fare un calcolo diretto. Infatti possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{t+\log 2}\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix},$$

da cui, sostituendo il parametro t con $\tau = t + \log 2$, otteniamo:

$$\mathbf{x}_1(\tau) = e^\tau\begin{bmatrix}\cos(\tau - \log 2)\\ \sin(\tau - \log 2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\log 2 & \sin\log 2\\ -\sin\log 2 & \cos\log 2\end{bmatrix}\left(e^\tau\begin{bmatrix}\cos\tau\\ \sin\tau\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\log 2 & \sin\log 2\\ -\sin\log 2 & \cos\log 2\end{bmatrix}\mathbf{x}_2(\tau),$$

cio' che prova che C_1 si ottiene da C_2 tramite una rotazione di angolo pari a $\log 2$ in senso orario.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie ottenuta ruotando l'iperbole $xz = 1$ del piano x, z intorno all'asse z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La superficie $S' := S \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z > 0\}$ e' un grafico.

(b) S possiede un unico punto ombelicale.

(c) S possiede punti dotati di un'unica direzione asintotica.

(d) Le direzioni asintotiche di S uscenti dal punto $P = (1, 0, 1)$ sono le direzioni $(1, \pm\sqrt{2}, -1)$.

(e) Il piano tangente ad S nel punto $P = (1, 0, 1)$ ha equazione $x + y + z = 2$.

Svolgimento. Possiamo rappresentare l'iperbole tramite la funzione $\mathbf{x}(t) = (t, 0, \frac{1}{t})$ $(t \neq 0)$. Quindi una rappresentazione parametrica di S e':

$$\mathbf{x}(t, \theta) = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{1}{t}\right) \qquad (t \neq 0).$$

Osserviamo che S soddisfa l'equazione $z^2(x^2 + y^2) = 1$, percio' S' e' il grafico della funzione $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Derivando la rappresentazione di S otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti fondamentali:

$$E = 1 + \frac{1}{t^4}, \qquad F = 0, \qquad G = t^2,$$

$$L = \frac{2}{\sqrt{t^2(1 + t^4)}}, \qquad M = 0, \qquad N = -\sqrt{\frac{t^2}{1 + t^4}}.$$

Dunque

$$K = -\frac{2t^2}{(1+t^4)^2}.$$

Ora osserviamo che, dalle formule precedenti, segue che la matrice

$$\begin{bmatrix} L & M & N \\ E & F & G \end{bmatrix}$$

ha sempre rango 2. Percio' la superficie S non ha punti ombelicali. Ed essendo tutti i suoi punti iperbolici (in quanto $K < 0$), in ogni suo punto ci sono due direzioni asintotiche distinte. Ora osserviamo che il punto P assegnato corrisponde ai parametri $t = 1$ e $\theta = 0$. Poiche'

$$\mathbf{x}_t(t,\theta) = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{1}{t^2}\right), \qquad \mathbf{x}_\theta(t,\theta) = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0),$$

il piano tangente ad S in P ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = P + h\mathbf{x}_t(1,0) + k\mathbf{x}_\theta(1,0) = (1,0,1) + h(1,0,-1) + k(0,1,0).$$

Eliminando i parametri, si ottiene l'equazione cartesiana che e' $x+z = 2$. Infine, sappiamo che le direzioni asintotiche in P si ottengono in corrispondenza delle soluzioni $(dt : d\theta)$ dell'equazione:

$$L(1,0)dt^2 + 2M(1,0)dtd\theta + N(1,0)d\theta^2 = \frac{2}{\sqrt{2}}dt^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta^2 = 0.$$

Le soluzioni sono $(1 : \pm\sqrt{2})$, percio' le due direzioni asintotiche uscenti da P sono i vettori tangenti :

$$d\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}_t(1,0) \pm \sqrt{2} \cdot \mathbf{x}_\theta(1,0) = 1 \cdot (1,0,-1) \pm \sqrt{2} \cdot (0,1,0) = (1, \pm\sqrt{2}, -1).$$

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la sfera unitaria rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$. Sia C una curva di S rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(s) := \mathbf{x}(u(s), v(s))$, dove s rappresenta un parametro naturale. Sia $P = \mathbf{x}(s_0)$ un punto di C, e sia α l'angolo con cui C incontra il meridiano $u = u(s_0)$ in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\cos\alpha = \pm\dot{u}(s_0)$.

(b) $\cos\alpha = \pm\dot{v}(s_0)$.

(c) $\cos\alpha = \pm(\dot{u}(s_0) \cdot \dot{v}(s_0))$.

(d) $\cos\alpha = \pm(\dot{u}(s_0) + \dot{v}(s_0))$.

Svolgimento. Un versore tangente al meridiano $u = u(s_0)$ in P e' dato dal vettore $\mathbf{x}_v(u(s_0), v(s_0))$, mentre un versore per C e' dato dal vettore

$$\dot{\mathbf{x}}(s_0) = \mathbf{x}_u(u(s_0), v(s_0)) \cdot \dot{u}(s_0) + \mathbf{x}_v(u(s_0), v(s_0)) \cdot \dot{v}(s_0).$$

Tenuto conto che $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, e che $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$, segue che:

$$\pm\cos\alpha = \dot{\mathbf{x}}(s_0) \cdot \mathbf{x}_v(u(s_0), v(s_0)) = \dot{v}(s_0).$$

In conclusione, l' unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 5. *Al variare del parametro $t \in \mathbf{C}$, si consideri, nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, la quadrica Q_t luogo degli zeri dell'equazione*

$$F = X_0^2+4X_0X_1+2X_0X_2+2X_0X_3+2X_1^2+6X_1X_2+4X_1X_3+(t+2)X_2^2+2(t+1)X_2X_3+(t+1)X_3^2 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Per ogni valore del parametro t la quadrica Q_t e' nonsingolare.

(b) Per ogni valore del parametro $t \in \mathbf{C}$, la quadrica Q_t e' irriducibile.

(c) Per ogni $t \in \mathbf{C}$, il punto $P = [-2+\sqrt{2} : 1 : 0 : 0]$ e' un punto regolare per Q_t, ed il piano tangente a Q_t in P ha equazione $\sqrt{2}X_0 + 2(\sqrt{2}-1)X_1 + (\sqrt{2}+1)X_2 + \sqrt{2}X_3 = 0$.

Svolgimento. La matrice di Gram dell'equazione di Q_t e' la seguente:

$$G_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & t+2 & t+1 \\ 1 & 2 & t+1 & t+1 \end{bmatrix}.$$

Il rango di G_t e' 4 se $t \neq 0$, mentre il rango di $G_0 = 3$. Percio' (a) e' falsa. Invece (b) e' vera, perche' Q_0 e' proiettivamente equivalente alla quadrica $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$, che e' irriducibile. Infine, una sostituzione diretta prova che $P \in Q_t$ per ogni t, e che le derivate parziali F_{X_i} dell'equazione di Q_t, valutate in $(-2+\sqrt{2}, 1, 0, 0)$, sono:

$$F_{X_0} = 2\sqrt{2}, \quad F_{X_1} = 2(2\sqrt{2}-2), \quad F_{X_2} = 2(\sqrt{2}+1), \quad F_{X_3} = 2\sqrt{2}.$$

Percio', per ogni $t \in \mathbf{C}$, P e' un punto regolare per Q_t, ed il piano indicato nel testo e' il piano tangente.

In conclusione, le uniche affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Geometria 4, Matematica, I appello, 17 giugno 2014.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione* $\mathbf{x}(t) := (t^3 + t^2 + 1, 4t^3 + 5t + 2, t^4 - t^3)$. *Sia p il punto di C di coordinate* $(1, -7, 2)$. *Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Le equazioni

$$\begin{cases} 17x + 6y + 17z = 9 \\ 7y + 17z + 15 = 0 \end{cases}$$

rappresentano la retta tangente a C in p.

(b) L'equazione $x + 17y - 7z + 132 = 0$ rappresenta il piano normale a C in p.

(c) Le equazioni

$$\begin{cases} x = -9s - 22t + 1 \\ y = 23s - 7 \\ z = 23s + 68t + 2 \end{cases}$$

rappresentano il piano osculatore a C in p.

(d) Le equazioni

$$\begin{cases} x = 69h + 1 \\ y = 5h - 7 \\ z = 22h + 2 \end{cases}$$

rappresentano la retta binormale a C in p.

Svolgimento. Il punto p corrisponde al valore $t = -1$ del parametro. Percio' il vettore $\mathbf{x}'(-1) = (1, 17, -7)$ e' tangente a C in p, ed i punti della retta tangente hanno coordinate $\mathbf{y} = (1, -7, 2) + h(1, 17, -7)$, $h \in \mathbf{R}$. Tali punti soddisfano il sistema assegnato, e dunque (a) e' vera. L'equazione data in (b) e' quella di un piano passante per p, ortogonale a $(1, 17, -7) = \mathbf{x}'(-1)$, cioe' e' quella del piano normale, quindi anche (b) e' vera. Il piano osculatore a C in p e' il piano per p ortogonale a $\mathbf{b}$, cioe' ortogonale a $\mathbf{x}'(-1) \times \mathbf{x}''(-1) = (1, 17, -7) \times (2, 12, -9) = -(69, 5, 22)$. Questo vettore non e' ortogonale al vettore $(-22, 0, 68)$ parallelo al piano assegnato in (c). Percio' la proprieta' (c) e' falsa. Mentre (d) e' vera perche' la retta data e' parallela a $\mathbf{x}'(-1) \times \mathbf{x}''(-1) = -(69, 5, 22)$, e passa per p.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (d). ■

Esercizio 2. *Nel piano x, y si consideri la curva C definita dalla funzione* $\mathbf{x}(t) = (\frac{t^2+2}{2}, t)$, $t \in \mathbf{R}$. *Per ogni punto $P = (a, b) \neq (1, 0)$ di C, si consideri il punto $Q = (4a - 3, -2b)$, anch'esso appartenente a C. Denotiamo con n_P ed n_Q le rette normali principali a C in P ed in Q. Sia R il punto di intersezione di tali rette. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L' equazione di n_P e' $y = b - b(x - a)$.

(b) L' equazione di n_Q e' $y = 4b + 2b(x - 4a - 3)$.

(c) $R = (3a + 1, -2ab)$.

(d) La distanza di P da R e' pari a $\frac{1}{\kappa_P}$, dove κ_P e' la curvatura di C in P.

Svolgimento. La curva C e' la parabola definita dall'equazione $f(x, y) :== 2(x - 1) - y^2 = 0$. Percio' l'equazione della retta tangente a C in P e':

$$f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) = 2(x - a) - 2b(y - b) = 0.$$

Quindi la retta normale in P ha equazione $2b(x-a)+2(y-b)=0$, cioe' $y=b-b(x-a)$. Similmente, l'equazione della retta tangente a C in Q e':

$$f_x(Q)(x-(4a-3))+f_y(Q)(y+2b)=2(x-4a+3)+4b(y+2b)=0.$$

Quindi la retta normale in Q ha equazione $4b(x-4a+3)-2(y+2b)=0$, cioe' $y=4b+2b(x-4a)$. Ne consegue che (a) e' vera e (b) e' falsa. Risolvendo il sistema formato dalle equazioni trovate, si trova che il punto R in comune alle due rette ha coordinate:

$$R=(3a-1,2b(1-a)).$$

Per cui (c) e' falsa. La distanza ρ tra $P=(a,b)$ ed R e':

$$\rho^2=(2a-1)^2+(b(1-2a))^2=(2a-1)^2(1+b^2)=(2a-1)^3.$$

Cioe' $\rho=(2a-1)^{\frac{3}{2}}$. D'altra parte la curvatura κ_P di C in $P=(a,b)=\mathbf{x}(b)$ e' data dalla formula:

$$\kappa_P=\frac{\|\mathbf{x}'(b)\times\mathbf{x}''(b)\|}{\|\mathbf{x}'(b)\|^3}=(1+b^2)^{-\frac{3}{2}}=(2a-1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\rho}.$$

Dunque (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia S una superficie con prima forma fondamentale data da:*

$$I=2du^2+(u^2+16)dv^2.$$

Sia $T\subset S$ il triangolo curvilineo di S corrispondente al triangolo curvilineo nel piano dei parametri u,v formato, nei punti di intersezione, dalle tre curve $u=\pm v^2$ e $v=1$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Il perimetro p di T e' $p=\sqrt{2}+\frac{26}{3}$.
(b) Il perimetro p di T e' $p=2\sqrt{2}+\frac{26}{3}$.
(c) Per almeno uno dei tre angoli α di T, si ha $\cos\alpha\in\{-1,1\}$.
(d) Per almeno uno dei tre angoli α di T, si ha $\cos\alpha\in\{-\frac{2}{5}\sqrt{2},\frac{2}{5}\sqrt{2}\}$.

Svolgimento. Sia $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)$ la carta di S corrispondente ad I. Nel piano u,v le tre curve assegnate si intersecano, a due a due, nei punti $A=(0,0)$, $B=(1,1)$, e $C=(-1,1)$. Il lato di T corrispondente all'arco di estremi AB sulla curva $u=v^2$ ha lunghezza data da:

$$\ell_{AB}=\int_0^1\|\mathbf{x}'(t^2,t)\|dt=\int_0^1\|\mathbf{x}_u(t^2,t)2t+\mathbf{x}_v(t^2,t)\|dt=\int_0^1\sqrt{E(t^2,t)4t^2+2F(t^2,t)2t+G(t^2,t)}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{8t^2+t^4+16}\,dt=\int_0^1(t^2+4)\,dt=\frac{13}{3}.$$

Un calcolo simile prova che il lato di T corrispondente all'arco di estremi AC sulla curva $u=-v^2$ ha lunghezza data da $\ell_{AC}=\frac{13}{3}$, e che il lato di T corrispondente all'arco di estremi BC sulla curva $v=1$ ha lunghezza data da $\ell_{BC}=2\sqrt{2}$. Si deduce che

$$p=\ell_{AB}+\ell_{AC}+\ell_{BC}=2\sqrt{2}+\frac{26}{3}.$$

Percio' (a) e' falsa e (b) e' vera.

Ora denotiamo con α_A l'angolo formato da T nel vertice corrispondente al punto A. Il punto A e' il punto di intersezione delle curve $u = v^2$, $u = -v^2$. Percio':

$$\cos \alpha_A = \frac{\mathbf{x}'(t^2, t)_{|t=0} \cdot \mathbf{x}'(-t^2, t)_{|t=0}}{\|\mathbf{x}'(t^2, t)_{|t=0}\| \cdot \|\mathbf{x}'(-t^2, t)_{|t=0}\|} = \frac{\mathbf{x}_v(0,0) \cdot \mathbf{x}_v(0,0)}{\|\mathbf{x}_v(0,0)\| \cdot \|\mathbf{x}_v(0,0)\|} = 1.$$

Dunque (c) e' vera. Lo e' anche (d). Infatti, sia α_C l'angolo formato da T nel vertice corrispondente al punto C. Il punto C e' il punto di intersezione delle curve $u = -v^2$, $v = 1$. Percio' come prima abbiamo:

$$\cos \alpha_C = \frac{\mathbf{x}'(-t^2, t)_{|t=1} \cdot \mathbf{x}'(t, 1)_{|t=-1}}{\|\mathbf{x}'(-t^2, t)_{|t=1}\| \cdot \|\mathbf{x}'(t, 1)_{|t=-1}\|} = \frac{(-2\mathbf{x}_u(-1,1) + \mathbf{x}_v(-1,1)) \cdot \mathbf{x}_u(-1,1)}{\|-2x_u(-1,1) + \mathbf{x}_v(-1,1)\| \cdot \|\mathbf{x}_u(-1,1)\|} = -\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c), e (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie ottenuta ruotando la curva $z = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ del piano x, z, intorno all'asse z. Sia $P \subseteq S$ il luogo costituito dai punti parabolici di S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) P e' una parabola.

(b) P e' una circonferenza.

(c) P e' una linea di curvatura.

(d) P e' una linea asintotica.

(e) P e' una linea geodetica.

Svolgimento. Una rappresentazione parametrica regolare per S e' data dalla funzione

$$\mathbf{x} : (\theta, t) \in \mathbf{R} \times (0, \pi) \to \mathbf{x}(\theta, t) := (t \cos \theta, t \sin \theta, \cos t) \in S.$$

Osserviamo che S e' una superficie regolare in quanto $S = \mathbf{x}(\mathbf{R} \times (0, \pi))$ e' il grafico della funzione $z = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$, con $0 < x^2 + y^2 < \pi^2$. Per tale rappresentazione si ha:

$$I = t^2 d\theta^2 + (1 + \sin^2 t) dt^2, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} (t \sin t \, d\theta^2 + \cos t \, dt^2).$$

Poiche' L non si annulla mai, non ci sono punti planari, e percio' P e' il luogo dei punti di S per cui

$$LN - M^2 = \frac{t \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} = 0.$$

Cioe' P e' il parallelo $t = \frac{\pi}{2}$. Ne consegue che P e' una circonferenza, e che non e' una parabola. Poiche' $F = M = 0$ allora le linee coordinate sono anche linee di curvatura, percio' P e' una linea di curvatura. Poiche' $F = 0$ abbiamo anche

$$(\kappa_g)_{t=\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{E_t}{2E\sqrt{G}} \right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{-t}{E\sqrt{G}} \right)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

il che prova che P non e' una linea geodetica. E non e' nemmeno una linea asintotica. Infatti P e' una $\theta-$curva, percio' in ciascun punto $\mathbf{x}(\theta, \frac{\pi}{2})$ di P la retta tangente a P e' diretta da $\mathbf{x}_\theta$. Invece la direzione asintotica per $t = \frac{\pi}{2}$ deve soddisfare la condizione $d\theta = 0$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 5. *Sia C la curva nel piano x, z rappresentata dalla funzione $\mathbf{c}(t) = (f(t), 0, g(t))$, con $f(t) > 0$. Sia S la superficie che si ottiene ruotando C intorno all'asse z. Per ogni punto p di S, sia L_p la retta normale ad S passante per p. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L_p e' uguale all'intersezione del piano osculatore con il piano normale al parallelo di S passante per p.

(b) L_p e' ortogonale alla retta tangente al parallelo di S passante per p.

(c) L_p e' uguale all'intersezione del piano osculatore con il piano normale al meridiano di S passante per p.

(d) L_p interseca l'asse di rotazione.

Svolgimento. La superficie S e' rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(\theta, t) := (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$. Il versore normale ad S e':

$$\mathbf{N}(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}(g'(t)\cos\theta, g'(t)\sin\theta, -f'(t)).$$

Ora poniamo $p = \mathbf{x}(\theta_0, t_0)$. La funzione $\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{x}(\theta, t_0)$ rappresenta il parallelo di S per p, mentre la funzione $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(\theta_0, t)$ il meridiano. L'intersezione del piano osculatore con il piano normale al parallelo di S passante per p, coincide con la retta normale principale alla curva $\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{x}(\theta, t_0)$ nel punto $p = \mathbf{y}(\theta_0)$. Il parallelo e' una circonferenza posta nel piano $z = g(t_0)$. Percio' in questo caso $\mathbf{b} = \pm(0, 0, 1)$, ed il versore normale principale e' proporzionale al vettore:

$$(0, 0, 1) \times \mathbf{y}'(\theta_0) = (-\cos\theta_0, -\sin\theta_0, 0).$$

Confrontando con $\mathbf{N}(\theta_0, t_0)$, e tenendo presente che $f'(t_0)$ puo' essere non nullo, si deduce che (a) e' falsa. Un calcolo analogo mostra che il versore normale principale al meridiano per p, cioe' alla curva $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(\theta_0, t)$, e' proporzionale al vettore

$$(-g'(t_0)\cos\theta_0, -g'(t_0)\sin\theta_0, f'(t_0)),$$

dunque e' proporzionale ad $\mathbf{N}(\theta_0, t_0)$, percio' (c) e' vera.

E' ovvio che (b) e' vera perche' i vettori tangenti ad S sono tutti ortogonali ad $\mathbf{N}$.

Infine osserviamo che una rappresentazione del generico punto $\mathbf{u}$ della retta L_p e':

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(h) = \mathbf{x}(\theta_0, t_0) + h(\mathbf{x}_u(\theta_0, t_0) \times \mathbf{x}_v(\theta_0, t_0))$$

$$= ((f(t_0) + hg'(t_0))\cos\theta_0, (f(t_0) + hg'(t_0))\sin\theta_0, g(t_0) - hf'(t_0)).$$

Per qualche profilo C puo' accadere che $g'(t_0) = 0$ (ad esempio $\mathbf{c}(t) = (t, 0, (t-1)^2)$), e percio' (d) in generale e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ∎

Geometria 4, Matematica, II appello, 8 luglio 2014.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva nel piano x, y rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (1+t, t^2+t+9)$, $t \in \mathbf{R}$. Siano $P = \mathbf{x}(t_1)$ e $Q = \mathbf{x}(t_2)$, $t_1 < t_2$, i due punti di C tali che le rette ℓ_{OP} ed ℓ_{OQ} congiungenti l'origine degli assi $O = (0,0)$ con P e con Q siano tangenti a C in P ed in Q. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La retta congiungente P con Q ha equazione $x - y = 18$.

(b) La retta congiungente P con Q ha equazione $2x - y = 18$.

(c) Le curvature di C in P e Q sono $|\kappa(P)| = \frac{\sqrt{2}}{258}$, $|\kappa(Q)| = \frac{\sqrt{26}}{330}$.

(d) Le curvature di C in P e Q sono $|\kappa(P)| = \frac{\sqrt{2}}{250}$, $|\kappa(Q)| = \frac{\sqrt{26}}{338}$.

Svolgimento. Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ un qualunque punto di C. La retta tangente a C in $\mathbf{x}(t)$ e' parallela al vettore $\mathbf{x}'(t) = (1, 2t+1)$. Percio' la retta $\ell_{O\mathbf{x}(t)}$, congiungente O con $\mathbf{x}(t)$, e' tangente a C in $\mathbf{x}(t)$ se e solo se $\mathbf{x}(t) \cdot (2t+1, -1) = 0$, cioe' se e solo se $t^2 + 2t - 8 = 0$. Quindi $P = \mathbf{x}(-4) = (-3, 21)$, e $Q = \mathbf{x}(2) = (3, 15)$, ed (a) e (b) sono false. Possiamo calcolare le curvature utilizzando la formula

$$\kappa(P) = \frac{\|\mathbf{x}'(-4) \times \mathbf{x}''(-4)\|}{\|\mathbf{x}'(-4)\|} = \frac{\sqrt{2}}{250}.$$

Un calcolo simile prova che

$$\kappa(Q) = \frac{\sqrt{26}}{338}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (d). ■

Esercizio 2. *Sia S la superficie ottenuta ruotando la curva $x = z^3 + 1$ $(z^3 + 1 > 0)$ del piano x, z, intorno all'asse z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Tutti e soli i punti ellittici (x, y, z) di S sono quelli per cui $z > 0$.

(b) S possiede infiniti punti ombelicali.

(c) Il luogo dei punti parabolici di S e' una linea geodetica.

(d) Il luogo dei punti parabolici di S e' una curva nei cui punti la curvatura normale e' $|\kappa_n| = 1$.

Svolgimento. Una rappresentazione di S e' $\mathbf{x}(\theta, t) = ((t^3+1)\cos\theta, (t^3+1)\sin\theta, t)$. Si deduce che la prima e la seconda forma fondamentale sono:

$$I = (t^3+1)^2\, d\theta^2 + (1+9t^4)\, dt^2, \qquad II = \frac{-1}{\sqrt{1+9t^4}}((t^3+1)\, d\theta^2 - 6t\, dt^2).$$

In particolare si ha:

$$LN - M^2 = \frac{-6t(t^3+1)}{1+9t^4}.$$

Quindi, ricordando che deve essere $t^3 + 1 > 0$, un punto di S e' ellittico se e solo se $t \in (-1, 0)$. Dunque (a) e' falsa. Inoltre $LN - M^2 = 0$ se e solo se $t = 0$. Percio', tenuto conto che L non si annulla mai, possiamo dire che il luogo C dei punti parabolici di S e' il parallelo $t = 0$. Per tale θ-curva sappiamo che:

$$(\kappa_g)_{t=0} = \left(-\frac{E_t}{2E\sqrt{E}}\right)_{t=0} = \left(-\frac{6t^2(t^3+1)}{2E\sqrt{E}}\right)_{t=0} = 0.$$

Si deduce che (c) e' vera. Poiche' $F = M = 0$, allora le curvature principali sono $\kappa_1 = \frac{L}{E}$ e $\kappa_2 = \frac{N}{G}$. I punti ombelicali sono quelli per cui $\kappa_1 = \kappa_2$, e cio' equivale a dire, per le formule precedenti, che

$$p(t) := 15t^4 + 6t + 1 = 0.$$

Ora la derivata $p'(t) = 6(10t^3 + 1)$ si annulla per $t_0 = -10^{\frac{1}{3}}$ (> -1), e si mantiene < 0 per $t < t_0$ e > 0 per $t > t_0$. Poiche' $p(-1) > 0$, $p(t_0) < 0$ e $p(0) > 0$, allora l'equazione $p(t) = 0$ ammette due radici $t_1, t_2 > -1$. Le θ-curve $t = t_1$ e $t = t_2$ sono curve di punti ombelicali, il che prova che (b) e' vera. Infine consideriamo di nuovo il luogo C dei punti parabolici, cioe' il parallelo $t = 0$. Nei punti di C la retta tangente ha direzione $\mathbf{x}_\theta(\theta, 0)$, che e' la direzione principale corrispondente a

$$(k_1)_{t=0} = \left(\frac{L}{E}\right)_{t=0} = \left(\frac{-1}{(t^3+1)\sqrt{1+9t^3}}\right)_{t=0} = -1.$$

Dunque (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia C la curva ottenuta intersecando il cilindro S di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, con il piano T di equazione $x - y - 2z + 2 = 0$. Sia P il punto di C di coordinate $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r, 1)$. Siano κ e κ_n la curvatura e la curvatura normale di C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $|\kappa| = \frac{2r}{3r+1}$.
(b) $|\kappa| = \frac{3r}{4r+1}$.
(c) $|\kappa_n| = \frac{2}{3r}$.
(d) $|\kappa_n| = \frac{3}{4r}$.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x}(\theta, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, v)$. In tal caso $P = \mathbf{x}(\frac{\pi}{4}, 1)$, $\mathbf{N}(\theta, v) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, e le forme fondamentali sono:

$$I = r^2\, d\theta^2 + dv^2, \quad II = -r\, d\theta^2.$$

Osserviamo che $\mathbf{N}(P) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, percio' $C = S \cap T$ e' una sezione normale ad S in P, in particolare $\kappa = \kappa_n$, dunque per rispondere alle domande sara' sufficiente calcolare κ_n. Ora noi sappiamo che

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = -\frac{r\, d\theta^2}{r^2\, d\theta^2 + dv^2}.$$

Percio' occorre calcolare la direzione tangente $[d\theta : dv]$ alla curva C' che corrisponde a C nel piano dei parametri, nel punto $P' = (\frac{\pi}{4}, 1)$ corrispondente a P. Una rappresentazione $v = v(\theta)$ di C' si ottiene imponendo che le coordinate del generico punto $\mathbf{x}(\theta, v)$ di S soddisfino l'equazione di T. Un calcolo prova che

$$v = \frac{1}{2}(2 + r\cos\theta - r\sin\theta).$$

Quindi $v'(\theta) = -\frac{r}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$, e nel punto P' avremo $[d\theta : dv] = [-\sqrt{2} : r]$, da cui $\kappa_n = -\frac{2}{3r}$ (per calcolare $[d\theta : dv]$ avremmo anche potuto procedere cosi': la direzione cercata e' quella della retta intersezione del piano T con il piano tangente ad S in P, che ha equazione $x + y = \sqrt{2}r$; tale retta e' parallela al vettore $\frac{1}{r}(1, -1, 1) = -\sqrt{2} \cdot \mathbf{x}_\theta(\frac{\pi}{4}, 1) + r \cdot \mathbf{x}_v(\frac{\pi}{4}, 1)$).

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 4. *Sia S il paraboloide di equazione $z = x^2 - y^2 + \frac{9}{2}$. Sia $\mathcal{L}$ il luogo formato dai punti P di S tali che il vettore $\overrightarrow{OP}$ e' ortogonale al piano tangente ad S in P (il punto $O = (0, 0, 0)$ denota l'origine degli assi). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{L}$ e' costituito esattamente da 2 punti.

(b) $\mathcal{L}$ e' costituito esattamente da 4 punti.

(c) Esiste $P \in \mathcal{L}$ tale che $\|\overrightarrow{OP}\| = \frac{1}{|\kappa|}$, per qualcuna delle curvature principali κ di S in P.

(d) Per ogni punto $P \in \mathcal{L}$ si ha $\|\overrightarrow{OP}\| = \frac{1}{|\kappa|}$, per qualcuna delle curvature principali κ di S in P.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2 + \frac{9}{2})$. La prima e la seconda forma fondamentale sono:

$$I = (1+4u^2)du^2 - 8uvdudv + (1+4v^2)dv^2, \qquad II = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(du^2 - dv^2).$$

Il luogo $\mathcal{L}$ corrisponde ai punti $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ tali che:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{x}_u(u,v) = \mathbf{x}(u,v) \cdot (1,0,2u) = u + 2u(u^2 - v^2 + \frac{9}{2}) = 0 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{x}_v(u,v) = \mathbf{x}(u,v) \cdot (0,1,-2v) = v - 2v(u^2 - v^2 + \frac{9}{2}) = 0. \end{cases}$$

Tra le soluzioni c'e' evidentemente $(u,v) = (0,0)$. Inoltre se $u = 0$ e $v \neq 0$, dalla seconda equazione deduciamo $v = \pm 2$. Se invece $u \neq 0$ e $v = 0$, la prima equazione non ha soluzioni, cosi' come non ci sono soluzioni se $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Percio'

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(0, 0, \frac{9}{2}\right), \left(0, -2, \frac{1}{2}\right), \left(0, 2, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Nel primo punto le curvature principali sono $\kappa_1(0,0) = \frac{L(0,0)}{E(0,0)} = 2$, $\kappa_2(0,0) = \frac{N(0,0)}{G(0,0)} = -2$, mentre la distanza di $\left(0,0,\frac{9}{2}\right)$ dall'origine e' pari a $\frac{9}{2}$. Gli altri due punti invece hanno una distanza dall'origine pari a $\frac{\sqrt{17}}{2}$, che coincide con il reciproco di $\kappa_1(0,2) = \frac{L(0,2)}{E(0,2)} = \kappa_1(0,-2) = \frac{L(0,-2)}{E(0,-2)} = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Sia $S \subset \mathbf{R}^3$ la sfera parametrizzata da $\mathbf{x}(\theta,\phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$. Si considerino i due punti $P = \mathbf{x}(\theta,\phi)$ e $Q = \mathbf{x}(\theta',\phi')$ di S, con $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$. Si denoti con $d_I(P,Q)$ la distanza intrinseca su S tra P e Q, e con $d_E(P,Q)$ quella euclidea nello spazio x, y, z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $d_I(P,Q) = r\arccos(\sin\phi\sin\phi')$.

(b) $d_I(P,Q) = r\arccos(\cos\phi\cos\phi')$.

(c) $d_I(P,Q) = r\arccos(1 - \frac{d_E(P,Q)^2}{2r^2})$.

(d) $d_I(P,Q) = r\arccos(1 - \frac{d_E(P,Q)^2}{3r^2})$.

Svolgimento. La distanza intrinseca coincide con la lunghezza di quell'arco di meridiano di estremi P e Q, che corrisponde, nel centro O della sfera, ad un angolo $\alpha \in [0,\pi]$. Percio' $d_I(P,Q) = r\alpha$, e, tenuto conto che $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{\|\overrightarrow{OP}\|\,\|\overrightarrow{OQ}\|} = \sin\phi\sin\phi'\cos(\theta - \theta') + \cos\phi\cos\phi' = \cos\phi\cos\phi'.$$

Ne consegue che (a) e' falsa, e (b) e' vera. Per la distanza euclidea invece abbiamo:

$$d_E^2(P,Q) = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\| = 2r^2(1 - \cos\phi\cos\phi').$$

Sostituendo, si vede che (c) e' vera e (d) e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Geometria 4, Matematica, III appello, 18 settembre 2014.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(t + 2\sqrt{2}\sin t, 3\cos t, 2\sqrt{2}t - \sin t\right).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Esiste un vettore fisso che forma con le rette tangenti a C un angolo costante α, tale che $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Esiste un piano fisso tale che la proiezione ortogonale di C su tale piano e' una circonferenza di raggio $r = 3$.

(c) L'asse delle x_2 e' la normale principale a C nel punto $P = (0, 3, 0)$.

(d) La retta binormale a C nel punto $P = (0, 3, 0)$ e' l'intersezione del piano di equazione $7x_1 + x_2 + (9 - 4\sqrt{2})x_3 = 3$, con il piano di equazione $7x_1 + 3x_2 + (9 - 4\sqrt{2})x_3 = 9$.

Svolgimento. Poiche' $\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = 18$, allora la sostituzione $s = 3\sqrt{2}\,t$ ci consente di esprimere C in funzione del parametro naturale:

$$\mathbf{x}(s) = \left(\frac{s}{3\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), 3\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), \frac{2s}{3} - \sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\right).$$

Derivando otteniamo:

$$\mathbf{t}(s) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), \frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\mathbf{k}(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{9}\sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{6}\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), \frac{1}{18}\sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\right), \qquad \kappa(s) = \|\mathbf{k}(s)\| = \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times 6\mathbf{k}(s) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right), -\frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{3\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\tau(s) = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot 6\mathbf{k}(s) = -\frac{1}{6}.$$

Poiche' la curvatura e la torsione di C sono costanti, possiamo dire che C e' un'elica circolare. Percio' un opportuno movimento dello spazio portera' C in un'elica D della forma

$$\mathbf{y}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt).$$

Poiche' $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{6}$, e $\tau = \frac{b}{a^2+b^2} = -\frac{1}{6}$, allora $a = 3$ e $b = -3$. Il vettore $(0, 0, 1)$ forma con le tangenti a D un angolo α tale che:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b) \cdot (0, 0, 1) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ne consegue che (a) e' falsa (un altro vettore fisso, indipendente da $(0, 0, 1)$, che incontra le tangenti sotto un angolo costante, non puo' esistere, altrimenti D sarebbe una retta). Invece la proiezione ortogonale di D sul piano $x_3 = 0$ e' una circonferenza di raggio $r = 3$. Percio' (b) e' vera. Infine, il punto $P = (0, 3, 0)$ corrisponde al valore del parametro $s = 0$. Percio' la normale principale a C in P e' parallela al vettore $\mathbf{k}(0) = (0, -\frac{1}{6}, 0)$, e passa per P. L'asse delle x_2 soddisfa queste condizioni, percio' (c) e' vera. Anche (d)

e' vera, perche' la retta binormale in P e' la retta per P parallela al vettore $\mathbf{b}(0) = (-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{3})$. E queste condizioni sono soddisfatte dalla retta intersezione dei piani assegnati.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 2. *Nello spazio x, y, z, si consideri il toro T rappresentato dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = ((2 + \sin\phi)\cos\theta, (2 + \sin\phi)\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

Sia $\mathcal{Y}$ il luogo costituito dai punti di T che hanno piano tangente parallelo al piano x, z. Sia $\mathcal{Z}$ il luogo costituito dai punti di T che hanno piano tangente parallelo al piano x, y. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) $\mathcal{Y}$ e' formato esattamente da 4 punti, di cui soltanto due sono iperbolici.
(b) In $\mathcal{Y}$ c'e' un punto ombelicale.
(c) $\mathcal{Z}$ coincide con il luogo dei punti parabolici di T.
(d) $\mathcal{Z}$ e' una circonferenza.

Svolgimento. Sia $P = \mathbf{x}(\theta, \phi)$ il generico punto di T. Il piano tangente a T in P e' parallelo ai vettori

$$\mathbf{x}_\theta = (-(2 + \sin\phi)\sin\theta, (2 + \sin\phi)\cos\theta, 0), \qquad \mathbf{x}_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi).$$

Tali vettori sono paralleli al piano x, z se e solo se $\cos\theta = 0$ e $\cos\phi = 0$. Quindi $\mathcal{Y}$ e' formato dai quattro punti $P_1 = \mathbf{x}(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $P_2 = \mathbf{x}(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $P_3 = \mathbf{x}(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $P_4 = \mathbf{x}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiche' $K = \frac{\sin\phi}{2+\sin\phi}$, ne consegue che soltanto P_2 e P_3 sono iperbolici, e percio' (a) e' vera. L'affermazione (b) e' falsa perche' un toro non possiede punti ombelicali. Dalle formule precedenti segue anche che il piano tangente in P e' parallelo al piano x, y se e solo se $\sin\phi = 0$. Quindi $\mathcal{Z}$ coincide con il luogo dei punti in cui la curvatura di T e' nulla. Ne consegue che (c) e' vera (su un toro non esistono punti planari). Invece (d) e' falsa, perche' il luogo $\sin\phi = 0$ e' l'unione dei due paralleli $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, cioe' e' l'unione di due circonferenze.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia Σ la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e T il toro rappresentato dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = ((2 + \sin\phi)\cos\theta, (2 + \sin\phi)\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

Sia $\gamma : T \to \Sigma$ l'applicazione che ad ogni punto $P = \mathbf{x}(\theta, \phi)$ di T associa il punto di Σ corrispondente al versore normale $\mathbf{N}(\theta, \phi)$ a T in P. Sia $\mathcal{E}$ il luogo dei punti ellittici di T, ed $\mathcal{I}$ quello dei punti iperbolici. Si denotino il polo nord e quello sud di Σ con N ed S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) L'applicazione γ e' suriettiva.
(b) L'applicazione γ e' iniettiva.
(c) L'applicazione γ induce per restrizione una applicazione biiettiva tra $\mathcal{E}$ e Σ.
(d) L'applicazione γ induce per restrizione una applicazione biiettiva tra $\mathcal{I}$ e $\Sigma\backslash\{N, S\}$.

Svolgimento. L'applicazione γ associa al punto $P = \mathbf{x}(\theta, \phi)$ di T il punto di Σ avente coordinate:

$$\gamma(P) = \mathbf{N}(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = -(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

Tenuto conto che la funzione $\mathbf{y}(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ e' una rappresentazione di Σ, deduciamo che γ e' suriettiva. Ma non e' iniettiva, perche' tutti i punti del toro sul parallelo $\phi = 0$ sono contratti in S, mentre quelli del parallelo $\phi = \pi$ sono contratti in N. Ora osserviamo che la curvatura di T e' $K = \frac{\sin\phi}{2+\sin\phi}$. Percio' $\mathcal{E}$ coincide con il luogo di T definito dalla condizione $\sin\phi > 0$, ed $\mathcal{I}$ con quello definito dalla condizione $\sin\phi < 0$. Se $P = \mathbf{x}(\theta, \phi)$ e $Q = \mathbf{x}(\theta_1, \phi_1)$ sono due punti di $\mathcal{E}$ che hanno la stessa immagine, allora $\cos\phi = \cos\phi_1$, e poiche' $\sin\phi > 0$ e $\sin\phi_1 > 0$, si ha anche $\sin\phi = \sin\phi_1$, e percio' anche $\cos\theta = \cos\theta_1$ e $\sin\theta = \sin\theta_1$. Dunque $P = Q$, e γ e' iniettiva su $\mathcal{E}$. Inoltre, poiche' $\sin\phi > 0$, $\mathcal{E}$ copre, tramite γ, tutti i punti della sfera, tranne i poli. Quindi (c) e' falsa, mentre con un argomento simile si vede che (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie rappresentata dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right).$$

Si considerino i seguenti punti di S: $P = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$, $Q = (\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, 3)$, $R = \mathbf{x}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Il piano tangente ad S in P e quello in Q si intersecano nella retta definita dalle equazioni:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 3z = 4 \\ y + z = 4. \end{cases}$$

(b) I piani tangenti nei punti di S corrispondenti alla circonferenza $u^2 + v^2 = 1$, sono tutti paralleli all'asse z.

(c) Il piano tangente ad S in P e' parallelo a quello in R.

(d) Il piano tangente ad S in P e' uguale a quello in R.

Svolgimento. Dalla rappresentazione di S deduciamo che:

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2).$$

Quindi l'equazione del piano tangente nel punto generico $\mathbf{x}(u,v)$ di S e':

$$-2u\left(x - u + \frac{u^3}{3} - uv^2\right) + 2v\left(y - v + \frac{v^3}{3} - u^2v\right) + (1 - u^2 - v^2)\left(z - u^2 + v^2\right) = 0.$$

Il coefficiente della variabile z si annulla nei punti corrispondenti all'equazione $u^2 + v^2 = 1$, percio' (b) e' vera. Inoltre, tenuto conto che $P = \mathbf{x}(1,1)$, e che $Q = \mathbf{x}(2,1)$, deduciamo che le equazioni per i piani tangenti in P, Q ed R sono:

$$T_{S,P} : 2x - 2y + z = 0, \quad T_{S,Q} : 2x - y + 2z - 4 = 0, \quad T_{S,R} : 2x - 2y + z = 0.$$

Quindi (c) e (d) sono vere, e lo e' anche (a). Infatti, la retta intersezione $T_{S,P} \cap T_{S,R}$ ammette la rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

Tale retta passa per il punto $(\frac{5}{2}, 3, 1)$, ed e' parallela al vettore $(-3, -2, 2)$. E queste condizioni sono soddisfatte anche dalla retta assegnata.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 5. *Sia S la superficie che si ottiene ruotando intorno all'asse z la curva del piano x, z rappresentata dall'equazione $3z = x^3$ $(x > 0)$. Sia C la curva ottenuta intersecando S con il piano $2x - 17y + 8z - \frac{76}{3} = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La curvatura di C nel punto $P = (2, 0, \frac{8}{3})$ e' $|\kappa| = \frac{4}{7\sqrt{17}}$.

(b) La curvatura di C nel punto $P = (2, 0, \frac{8}{3})$ e' $|\kappa| = \frac{5}{7\sqrt{17}}$.

(c) La curvatura di C nel punto $P = (2, 0, \frac{8}{3})$ e' una curvatura principale per S in P.

(d) S possiede infiniti punti ombelicali.

Svolgimento. La superficie S si puo' rappresentare con la funzione:

$$\mathbf{x}(\theta, t) = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{t^3}{3} \right) \quad (t > 0).$$

I coefficienti fondamentali di tale rappresentazione sono:

$$E = t^2, \quad F = 0, \quad G = 1 + t^4, \quad L = -\frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{2t}{\sqrt{1+t^4}},$$

ed il versore normale e':

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(t^2\cos\theta, t^2\sin\theta, -1).$$

Osserviamo che $P = \mathbf{x}(0, 2)$. Dal calcolo di $\mathbf{N}$, deduciamo che C e' una sezione normale di S, perche' il piano assegnato contiene la retta normale. Percio' la curvatura di C in P coincide con la curvatura normale di S in P. Tale curvatura normale e' quella corrispondente alla direzione tangente a C in P, che altro non e' che quella della retta che si ottiene intersecando il piano assegnato con il piano tangente ad S in P:

$$\begin{cases} 2x - 17y + 8z - \frac{76}{3} = 0 \\ 4x - z = \frac{16}{3} \end{cases}.$$

Questa retta ha direzione data dal vettore $(1, 2, 4)$. Poiche' $(1, 2, 4) = 1 \cdot \mathbf{x}_\theta(0, 2) + 1 \cdot \mathbf{x}_t(0, 2)$, allora nel piano θ, t tale direzione corrisponde alla direzione $(d\theta : dt) = (1 : 1)$. Quindi:

$$|\kappa| = \frac{II}{I} = \left| \frac{L(0,2)d\theta^2 + N(0,2)dt^2}{E(0,2)d\theta^2 + G(0,2)dt^2} \right| = \left| \frac{L(0,2) + N(0,2)}{E(0,2) + G(0,2)} \right| = \frac{4}{7\sqrt{17}}.$$

Osserviamo anche che, essendo le direzioni principali uguali a quelle coordinate, allora le curvature principali ad S in P sono date da:

$$\kappa_1 = \frac{L(0,2)}{E(0,2)} = -\frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \kappa_2 = \frac{N(0,2)}{G(0,2)} = -\frac{4}{17\sqrt{17}}.$$

Sempre per lo stesso motivo, i punti ombelicali sono caratterizzati dalla condizione:

$$\frac{L}{E} = \frac{N}{G},$$

cioe' dalla condizione $t^4 = 1$. Quindi i punti ombelicali di S sono tutti e soli i punti del parallelo $t = 1$. Dunque ce ne sono infiniti.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Geometria 4, Matematica, IV appello, 4 febbraio 2015.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la circonferenza di raggio $r = \sqrt{2}$, con centro nel punto di coordinate $(1, 2)$. Sia Γ il luogo descritto da un punto fisso P di C, quando C rotola senza strisciare sulla retta $x + y - 1 = 0$. Si assuma che il punto P occupi la posizione iniziale $Q = (0, 1)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) *La funzione $\mathbf{x}(t) = (2 - \sin t - \cos t, 2 - t + \sin t - \cos t)$ e' una rappresentazione parametrica di Γ.*

(b) *La curvatura $|\kappa|$ di Γ nel punto $R = (2 + \pi, 3 - \pi)$ e' $|\kappa| = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.*

(c) *La retta tangente a Γ in $R = (2 + \pi, 3 - \pi)$ ha equazione $2x + y = 7 + \pi$.*

(d) *La retta normale a Γ in $R = (2 + \pi, 3 - \pi)$ ha equazione $x - y = 2\pi - 1$.*

(e) *L'arco di Γ di estremi $Q = (0, 1)$ ed $R = (2 + \pi, 3 - \pi)$ ha lunghezza pari a $\ell = 4\sqrt{2}$.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che (a) e' falsa. Infatti l'equazione $2-\sin t-\cos t = 0$ non ha soluzioni, mentre sappiamo che su Γ c'e' il punto Q, che ha ascissa nulla. Ora denotiamo con $\mathbf{x} = (x, y)$ le coordinate rispetto al riferimento canonico, e con $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ quelle rispetto al riferimento con centro nel punto Q, e con gli assi paralleli ai vettori $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (cioe' con gli assi dati dalla retta $x + y - 1 = 0$, e la sua perpendicolare per Q). Il luogo Γ e' una cicloide rappresentata dalla funzione:

$$\mathbf{x}^*(t) = \sqrt{2}(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Tenuto conto delle formule per il cambiamento delle coordinate:

$$(x, y) = (0, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (x^* + y^*, -x^* + y^*),$$

deduciamo che una rappresentazione parametrica di Γ e' data da:

$$\mathbf{x}(t) = (t - \sin t + 1 - \cos t, 2 - t + \sin t - \cos t).$$

Il punto R corrisponde al parametro $t = \pi$. Percio' $\mathbf{x}'(\pi) = (2, -2)$ e $\mathbf{x}''(\pi) = (-1, -1)$. Ne consegue che la retta tangente a Γ in R ha equazione $x + y = 5$, la normale invece $x - y = 2\pi - 1$. Dunque (c) e' falsa, e (d) e' vera. Inoltre La curvatura in R e':

$$|\kappa| = |\kappa(\pi)| = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Quindi (b) e' vera. Ed e' vera anche (e) in quanto:

$$\ell = \int_0^\pi |\mathbf{x}'(t)|\, dt = \int_0^\pi 2\sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{2}\, [-2 \cos(t/2)]_0^\pi = 4\sqrt{2}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (d) ed (e). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (-\sqrt{2}\, t^3, 3t^2, 3\sqrt{2}\, t)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) *La curvatura di C e' data dalla funzione $|\kappa(t)| = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$.*

(b) *La torsione di C e' data dalla funzione $\tau(t) = \frac{1}{6(t^2+1)^2}$.*

(c) Le equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 3 - 4\sqrt{2} \\ x - z = -4\sqrt{2} \end{cases}$$

rappresentano la retta normale principale a C nel punto $P = (-\sqrt{2}, 3, 3\sqrt{2})$.

(d) Le equazioni

$$\begin{cases} x + z = 2\sqrt{2} \\ y - \sqrt{2}z = -3 \end{cases}$$

rappresentano la retta binormale a C nel punto $P = (-\sqrt{2}, 3, 3\sqrt{2})$.

(e) Il piano osculatore a C in $P = (-\sqrt{2}, 3, 3\sqrt{2})$ e' rappresentato dall'equazione $x + \sqrt{2}y - z + \sqrt{2} = 0$.

Svolgimento. Un calcolo diretto mostra che:

$$\mathbf{x}'(t) = (-3\sqrt{2}\,t^2, 6t, 3\sqrt{2}), \quad \mathbf{x}''(t) = (-6\sqrt{2}\,t, 6, 0), \quad \mathbf{x}'''(t) = (-6\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = -36\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t, -\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right),$$

$$|\mathbf{x}'(t)| = 3\sqrt{2}(t^2+1), \quad |\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)| = 18\sqrt{2}(t^2+1), \quad [\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)] = 216.$$

Percio' abbiamo:

$$|\kappa(t)| = \frac{|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)|}{|\mathbf{x}'(t)|^3} = \frac{1}{3(t^2+1)^2} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \frac{[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)]}{|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)|^2} = \frac{1}{3(t^2+1)^2}.$$

Cio' mostra che (a) e' vera e (b) e' falsa.

Ora osserviamo che nel punto $P = \mathbf{x}(1)$ la retta tangente e' parallela al vettore $\mathbf{x}'(1) = (-3\sqrt{2}, 6, 3\sqrt{2})$, e che la retta binormale e' parallela al vettore $\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)$, cioe' al vettore $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Percio' (d) e' falsa, perche' la retta che appare in (d) non e' parallela a tale vettore. Invece (c) e' vera, perche' la retta ivi indicata passa per P ed e' parallela al vettore $(1, 0, 1)$, che e' parallelo al versore normale, cioe' parallelo al vettore $(-3\sqrt{2}, 6, 3\sqrt{2}) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-6\sqrt{2}, 0, -6\sqrt{2})$. Anche (e) e' vera, perche' l'equazione assegnata e' quella di un piano passante per P, ortogonale alla retta binormale in P.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c) ed (e). ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie definita dall'equazione $z = x^2 - 2xy + 2y^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) I punti di S sono tutti ellittici.

(b) Il punto $O = (0, 0, 0)$ e' un punto ombelicale per S.

(c) S possiede esattamente due punti ombelicali.

(d) La curva C rappresentata dalla funzione $\mathbf{y}(t) = (2\cos t + 2\sin t, 2\sin t, 4)$, e' una linea di curvatura per S.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - 2uv + 2v^2)$. In tal caso i coefficienti fondamentali di S sono:

$$E = 1 + 4u^2 + 4v^2 - 8uv, \quad F = 12uv - 4u^2 - 8v^2, \quad G = 1 + 4u^2 + 16v^2 - 16uv,$$

$$L = \frac{2}{\nu}, \quad M = -\frac{2}{\nu}, \quad N = \frac{4}{\nu},$$

dove si e' posto $\nu := |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = (1 + 8u^2 + 20v^2 - 24uv)^{\frac{1}{2}}$. Poiche' $LN - M^2 = \frac{4}{\nu^2} > 0$, allora (a) e' vera. Sappiamo poi che un punto $\mathbf{x}(u, v)$ di S e' ombelicale se e solo se le terne (L, M, N) ed (E, F, G) sono proporzionali. Nel nostro caso cio' equivale a dire che $F = -E$ e $2E = G$, cioe'

$$\begin{cases} v^2 - uv = \frac{1}{4} \\ 8v^2 - 4u^2 = 1. \end{cases}$$

Questo sistema ammette due soluzioni distinte, corrispondenti ai valori di v per cui $v^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$. Ne consegue che (b) e' falsa, mentre (c) e' vera. Infine osserviamo che (d) e' falsa. Infatti consideriamo il punto $P := \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(2, 0)$. La retta tangente a C in P e' parallela al vettore $(1, 1, 0) = \mathbf{x}_u(2, 0) + \mathbf{x}_v(2, 0)$, corrispondente alla direzione $(du : dv) = (1, 1)$. Se C fosse una linea di curvatura tale direzione sarebbe una direzione principale in P, ed in quanto tale dovrebbe essere

$$(EM - LF)du^2 + (EN - LG)dudv + (FN - MG)dv^2 = 0.$$

Ma il calcolo mostra che, per $u = 2$ e $v = 0$,

$$EM - LF + EN - LG + FN - MG = \frac{2}{\nu} \neq 0.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (c). ■

Esercizio 4. *Sia S una superficie con prima forma fondamentale data da:*

$$I = (1 + 4u^2)du^2 + 8uvdudv + (1 + 4v^2)dv^2.$$

Sia $T \subset S$ il triangolo curvilineo di S corrispondente al triangolo nel piano dei parametri u, v formato, nei punti di intersezione, dalle tre rette $u = 0$, $v = 0$, e $u + v = 1$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Per ciascuno dei tre angoli α di T, si ha $\cos\alpha \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$.

(b) Per ciascuno dei tre angoli α di T, si ha $\cos\alpha \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$.

(c) Per ciascuno dei tre angoli α di T, si ha $\cos\alpha \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right\}$.

Svolgimento. Nel piano u, v il triangolo assegnato ha vertici nei punti $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, e $B = (0, 1)$. Sia α_O l'angolo del triangolo T nel vertice corrispondente al punto O, intersezione delle curve di S corrispondenti alle rette $u = 0$ e $v = 0$. Possiamo applicare la formula:

$$\cos\alpha_O = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

dove E, F, e G vanno valutati in $u = v = 0$, $(du, dv) = (1, 0)$ e' un vettore parallelo alla retta $v = 0$, e $(\delta u, \delta v) = (0, 1)$ e' un vettore parallelo alla retta $u = 0$. Ne consegue $\cos\alpha_O = 0$. Con la stessa formula possiamo calcolare $\cos\alpha_A$ e $\cos\alpha_B$, dove α_A e' l'angolo di T nel vertice corrispondente al punto A, intersezione delle rette $v = 0$, $u + v = 1$, e α_B e' l'angolo corrispondente al punto B, intersezione delle rette $u = 0$, $u + v = 1$. Nel primo caso la formula si applica con E, F e G valutati in $u = 1$ e $v = 0$, $(du, dv) = (1, 0)$ e $(\delta u, \delta v) = (1, -1)$, nel secondo caso con E, F e G valutati in $u = 0$ e $v = 1$, $(du, dv) = (0, 1)$ e $(\delta u, \delta v) = (1, -1)$. Il calcolo mostra che $\cos\alpha_A = -\cos\alpha_B = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Sia S la superficie ottenuta ruotando la curva $x = \cos z$ del piano x, z, intorno all'asse z (si assuma $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il luogo costituito dai punti parabolici di S e' una circonferenza.

(b) Il luogo costituito dai punti ombelicali di S e' una circonferenza.

(c) Il piano tangente ad S nel punto $P = (1, 0, 0)$ si interseca con il piano tangente ad S nel punto $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$, in una retta parallela al vettore $(0, 1, -1)$.

Svolgimento. Possiamo parametrizzare la superficie S tramite la funzione

$$\mathbf{x}(\theta, t) = (\cos t \cos\theta, \cos t \sin\theta, t),$$

con $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, e $\theta \in \mathbf{R}$. Per tale rappresentazione si ha:

$$I = \cos^2 t d\theta^2 + (1 + \sin^2 t)dt^2, \quad II = -\frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}(d\theta^2 + dt^2), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}(\cos\theta, \sin\theta, \sin t).$$

In particolare abbiamo

$$K = \frac{1}{(1 + \sin^2 t)^2}.$$

Percio' tutti i punti sono ellittici, e la (a) e' falsa, non essendoci affatto punti parabolici. I punti ombelicali di S sono quelli per cui le terne (E, F, G) ed (L, M, N) sono proporzionali, cioe' i punti di S per cui $\cos^2 t = 1 + \sin^2 t$, cioe' sono i punti corrispondenti al parallelo $t = 0$. Percio' (b) e' vera. Infine osserviamo che $P = (1, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0)$, e che $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}) = \mathbf{x}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Quindi il versore normale $\mathbf{N}(0, 0)$ ad S in P coincide con il vettore $(1, 0, 0)$, mentre il versore normale $\mathbf{N}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ad S in Q e' parallelo al vettore $(1, 1, 1)$. Poiche' $(1, 0, 0) \times (1, 1, 1) = -(0, 1, -1)$, ne consegue che (c) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Geometria 4, Matematica, I appello, 17 giugno 2015.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{1}{2}(\cos t + t\sin t), \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t), \frac{1}{4}(1+t^2)\right) \quad (t>0).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) C e' contenuta nel paraboloide $z = x^2 + y^2$.

(b) C e' un'elica di asse il vettore $(0,0,1)$.

(c) $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) L'arco di C compreso tra i punti $\mathbf{x}(\frac{\pi}{2})$ e $\mathbf{x}(\pi)$ ha lunghezza ℓ pari a $\ell = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2$.

(e) Il piano osculatore a C nel punto $\mathbf{x}(\frac{\pi}{2})$ ha equazione $y - z + \frac{\pi^2-4}{16} = 0$.

Svolgimento. Posto $x_1(t) = \frac{1}{2}(\cos t + t\sin t)$ e $x_2(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$, un calcolo mostra che $x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = \frac{1}{4}(1+t^2)$. Percio' (a) e' vera. Sempre con un calcolo vediamo che:

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{2}t(\cos t, \sin t, 1), \quad \mathbf{x}''(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t, 1) + \frac{1}{2}t(-\sin t, \cos t, 0),$$

$$\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t) = \frac{1}{4}t^2(-\cos t, -\sin t, 1), \quad \mathbf{x}'''(t) = (-\sin t, \cos t, 0) + \frac{1}{2}t(-\cos t, -\sin t, 0).$$

Deduciamo:

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}t, \quad \|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{4}t^2, \quad [\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)] = \frac{1}{8}t^3.$$

Percio' abbiamo:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{1}{t}, \quad \tau = \frac{[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)]}{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|^2} = \frac{1}{t}.$$

Quindi $\frac{\tau}{\kappa} = 1$, da cui segue che (c) e' falsa, e che C e' un'elica. Osserviamo anche che:

$$\mathbf{t}(t)\cdot(0,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)\cdot(0,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

percio' (b) e' vera. La lunghezza richiesta e':

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\|\mathbf{x}'(t)\|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{t}{\sqrt{2}}\,dt = \left[\frac{t^2}{\sqrt{8}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi^2.$$

Dunque (d) e' falsa, mentre (e) e' vera perche' il piano assegnato passa per il punto $\mathbf{x}(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{4+\pi^2}{16})$, ed e' ortogonale al vettore $(0,-1,1)$, che e' parallelo a $\mathbf{b}(\frac{\pi}{2})$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) ed (e). ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $a\in\mathbf{R}$, si consideri la curva C_a rappresentata dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(t) = (1+t+t^3,\ 1+t^2,\ 3+2t+t^2+at^3).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ la curva C_a non e' una curva piana.

(b) Esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che la curva C_a e' una curva piana.

(c) Posto $a = 0$, il triedro di Frenet di C_0 nel punto $P = (1, 1, 3)$ e' formato dai vettori: $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1)$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1)$.

Svolgimento. Poiche' $\tau = \frac{[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)]}{\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\|^2}$, allora C_a e' piana se e solo se $[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)] \equiv 0$, cioe' se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 1+3t^2 & 6t & 6 \\ 2t & 2 & 0 \\ 2+2t+3at^2 & 2+6at & 6a \end{bmatrix} = 12(a-2) = 0.$$

Percio' C_a e' piana se e solo se $a = 2$. Ne consegue che (a) e' falsa, mentre (b) e' vera.

Posto $a = 0$, osserviamo che la curva C_0 e' rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (1 + t + t^3, 1 + t^2, 3 + 2t + t^2)$, e percio' $P = \mathbf{x}(0)$. Il calcolo mostra che:

$$\mathbf{x}'(0) = (1+3t^2, 2t, 2+2t)_{|t=0} = (1, 0, 2), \quad \mathbf{x}''(0) = (6t, 2, 2)_{|t=0} = (0, 2, 2).$$

Percio'

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,-1,1), \quad \mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,5,1).$$

Dunque anche (c) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 3. *La superficie S possiede la prima forma $I = \log^2 t d\theta^2 + dt^2$ (si assuma $t > 1$). Siano A e B le curve di S che corrispondono, nel piano θ, t, alle parabole $t - \theta^2 = 0$, $t + \theta^2 - 8 = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Le linee coordinate di S sono geodetiche.

(b) $K = -\frac{1}{t^2 \log t}$

(c) $K = \frac{1}{t^2 \log t}$

(d) Per ogni $P \in A \cap B$, le curve A e B si incontrano formando un angolo α_P tale che $\cos\alpha_P = \pm\frac{\log^2 2 - 16}{\log^2 2 + 16}$.

Svolgimento. Poiche' $F = 0$ allora la curvatura geodetica delle linee coordinate e' data dalle formule:

$$(\kappa_g)_{t=t_0} = -\frac{E_t}{2E\sqrt{G}} = -\frac{1}{t\,\log t}, \quad (\kappa_g)_{\theta=\theta_0} = \frac{G_\theta}{2G\sqrt{E}} = 0.$$

Percio' (a) e' falsa, perche' le θ-curve hanno curvatura geodetica non nulla. Invece le t-curve sono geodetiche, e dunque il Theorema Egregium si riduce alla formula:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{t^2 \log t}.$$

Dunque (b) e' falsa, e (c) e' vera. Infine osserviamo che i punti di $A \cap B$ corrispondono ai punti $(\pm 2, 4)$ del piano θ, t. Nel punto $(-2, 4)$ le curve assegnate nel piano dei parametri hanno rette tangenti parallele ai vettori $[d\theta : dt] = [1 : \mp 4]$. Percio' A e B, nel punto P corrispondente a $(-2, 4)$, si incontrano sotto un angolo α_P tale che

$$\cos\alpha_P = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \log^2 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \log^2 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \log^2 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log^2 4 - 16}{\log^2 4 + 16}.$$

Percio' la (d) e' falsa.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 4. *Sia Σ la sfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$, ed S la superficie $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\theta,t)$, ottenuta ruotando la curva $z=\cos x$ $(0<x<\pi)$ del piano x, z, intorno all'asse z. Sia $\gamma : S \to \Sigma$ l'applicazione che ad ogni punto $P=\mathbf{x}(\theta,t)$ di S associa il punto di Σ corrispondente al versore normale $\mathbf{N}(\theta,t)$ ad S in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'applicazione γ e' iniettiva.

(b) L'applicazione γ e' suriettiva.

(c) Per ogni parallelo C di S, l'immagine $\gamma(C)$ e' (un arco di) un parallelo di Σ, ed in punti corrispondenti le rette tangenti a C ed a $\gamma(C)$ sono parallele.

(d) Per ogni meridiano D di S, l'immagine $\gamma(D)$ e' (un arco di) un meridiano di Σ, ed in punti corrispondenti le rette tangenti a D ed a $\gamma(D)$ sono parallele.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione

$$\mathbf{x} : (\theta,t) \in \mathbf{R}\times(0,\pi) \to \mathbf{x}(\theta,t) := (t\cos\theta, t\sin\theta, \cos t) \in S.$$

Un calcolo prova che:

$$\mathbf{N}(\theta,t) = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}(\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, 1).$$

Percio' l'applicazione γ e' l'applicazione

$$\gamma : P=\mathbf{x}(\theta,t)\in S \to \mathbf{N}(\theta,t) = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}(\sin t\cos\theta, \sin t\sin\theta, 1) \in \Sigma.$$

Poiche' $\sin t = \sin(\pi - t)$, allora γ non e' iniettiva. E nemmeno suriettiva in quanto $(1,0,0)\in\Sigma$ non appartiene all'immagine di γ. Percio' sia (a) che (b) sono false.

Ora fissiamo un parallelo C di S, rappresentato dalla funzione

$$\mathbf{y}(\theta) = (t_0\cos\theta, t_0\sin\theta, \cos t_0).$$

La curva immagine $\gamma(C)$ e' rappresentata dalla funzione

$$\mathbf{z}(\theta) = \mathbf{N}(\theta,t_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t_0}}(\sin t_0\cos\theta, \sin t_0\sin\theta, 1).$$

Quindi $\gamma(C)$ e' contenuta nel parallelo di Σ che si ottiene intersecando Σ con il piano

$$z = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t_0}}.$$

Inoltre la retta tangente a $\gamma(C)$ nel punto $\mathbf{z}(\theta)$ e' parallela al vettore

$$\mathbf{z}'(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t_0}}(-\sin t_0\sin\theta, \sin t_0\cos\theta, 0),$$

che e' parallelo al vettore tangente a C dato da

$$\mathbf{y}'(\theta) = (-t_0\sin\theta, t_0\cos\theta, 0).$$

Quindi l'affermazione (c) e' vera.

Un argomento analogo mostra che anche (d) e' vera. Infatti, come prima, fissiamo un meridiano D di S rappresentato dalla funzione

$$\mathbf{u}(t) = (t\cos\theta_0, t\sin\theta_0, \cos t).$$

La curva immagine $\gamma(D)$ e' rappresentata dalla funzione

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{N}(\theta_0, t) = -\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}(\sin t\cos\theta_0, \sin t\sin\theta_0, 1).$$

Quindi $\gamma(D)$ e' contenuta nel meridiano di Σ che si ottiene intersecando Σ con il piano

$$x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0 = 0.$$

Inoltre la retta tangente a $\gamma(D)$ nel punto $\mathbf{v}(t)$ (quando $t \neq \frac{\pi}{2}$) e' parallela al vettore

$$\mathbf{v}'(t) = \cos t \cdot (1+\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}(-\cos\theta_0, -\sin\theta_0, \sin t),$$

che e' parallelo al vettore tangente a D dato da

$$\mathbf{u}'(t) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0, -\sin t).$$

Per continuita' cio' deve valere anche nei punti corrispondenti $\mathbf{u}(\frac{\pi}{2})$ e $\mathbf{v}(\frac{\pi}{2})$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia S il cono quadrico di equazione $x^2+y^2=z^2$. Sia C la curva che si ottiene intersecando S con il piano R di equazione $2x+2y-z=\sqrt{3}$, e sia $P=(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1) \in S \cap R$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il piano tangente ad S in P ha equazione $\sqrt{3}x+y-2z=0$.

(b) La retta normale ad S in P e' rappresentata dalle equazioni: $\begin{cases} 2x+\sqrt{3}z = 2\sqrt{3} \\ 2y+z=2. \end{cases}$

(c) La curvatura normale a C in P e' $|\kappa_n| = \frac{3}{(11-4\sqrt{3})\sqrt{2}}$.

(d) La curvatura normale a C in P e' $|\kappa_n| = \frac{3}{(11-5\sqrt{3})\sqrt{2}}$.

Svolgimento. Una rappresentazione del cono e' data dalla funzione:

$$\mathbf{x}(\theta, v) = v(\cos\theta, \sin\theta, 1).$$

Ne consegue che $P = \mathbf{x}(\frac{\pi}{6}, 1)$, e che (quando $v>0$)

$$I = v^2 d\theta^2 + 2dv^2, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, -1), \quad II = -\frac{v}{\sqrt{2}}d\theta^2.$$

Percio' la retta normale ad S in P e' parallela al vettore $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1) = \sqrt{2}\,\mathbf{N}(\frac{\pi}{6}, 1) = \sqrt{2}\,\mathbf{N}(P)$. Poiche' il piano assegnato e' ortogonale a tale vettore, e passa per P, possiamo dire che (a) e' vera. Anche (b) e' vera, in quanto la retta assegnata e' parallela al vettore $\mathbf{N}(P)$, e passa per P.

Infine, per calcolare la curvatura normale, ricordiamo che:

$$(*) \qquad \kappa_n = \frac{II}{I} = \left(\frac{-\frac{v}{\sqrt{2}}d\theta^2}{v^2 d\theta^2 + 2dv^2}\right)_{|\theta=\frac{\pi}{6}, v=1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\theta^2}{d\theta^2+2dv^2}.$$

Il valore richiesto va calcolato per una scelta di $(d\theta, dv)$ tale che il vettore $\mathbf{x}_\theta(\frac{\pi}{6}, 1)d\theta + \mathbf{x}_v(\frac{\pi}{6}, 1)dv$ sia un vettore parallelo alla retta tangente a C in P. La retta tangente a C in P e' l'intersezione del piano tangente ad S in P, con il piano assegnato R. Cioe' tale retta ammette come rappresentazione cartesiana il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Tale retta e' parallela al vettore $(-3, 4 - \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$. Tenuto conto che

$$\mathbf{x}_\theta\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \text{e che} \quad \mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

allora il vettore precedente che si puo' scrivere come combinazione lineare:

$$(-3, 4 - \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}\mathbf{x}_\theta\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) + (2 - 2\sqrt{3})\mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{6}, 1\right).$$

Quindi ponendo $d\theta = 2\sqrt{3}$ e $dv = 2 - 2\sqrt{3}$ in $(^*)$ si ottiene

$$\kappa_n = -\frac{3}{\sqrt{2}(11 - 4\sqrt{3})}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). ■

Geometria 4, Matematica, II appello, 8 luglio 2015.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia S il cono quadrico rappresentato dall'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, e sia C la curva di S rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{t}\,(\cos t, \sin t, 1)\,, \quad t > 0.$$

Per ogni punto $\mathbf{x}(t)$ di C si denotino con $\kappa(t)$, $\tau(t)$ e $\kappa_n(t)$, la curvatura, la torsione e la curvatura normale. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) *Per ogni punto $\mathbf{x}(t)$ di C si ha $|\kappa_n(t)| = \frac{t^3}{(t^2+2)\sqrt{2}}$.*

(b) *Esiste almeno un punto $\mathbf{x}(t)$ di C per cui $|\kappa(t)| = |\kappa_n(t)|$.*

(c) *Per ogni punto $\mathbf{x}(t)$ di C si ha $|\kappa(t)| = \frac{t^3}{t^2+2}\sqrt{\frac{t^3+1}{t^2+2}}$.*

(d) *Per ogni punto $\mathbf{x}(t)$ di C si ha $\tau(t) = -\frac{t^2}{t^2+1}$.*

Svolgimento. Il calcolo delle derivate della funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ mostra che:

$$\mathbf{x}'(t) = -\frac{1}{t^2}(\cos t, \sin t, 1) + \frac{1}{t}(-\sin t, \cos t, 0),$$

$$\mathbf{x}''(t) = -\frac{2}{t}\mathbf{x}'(t) + \frac{1}{t}(-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$\mathbf{x}'''(t) = \frac{2}{t^2}\,\mathbf{x}'(t) - \frac{2}{t}\,\mathbf{x}''(t) - \frac{1}{t^2}(-\cos t, -\sin t, 0) + \frac{1}{t}(\sin t, -\cos t, 0).$$

Dalle proprieta' dei determinanti segue:

$$[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)] = \left[-\frac{1}{t^2}(\cos t, \sin t, 1) \quad \frac{1}{t}(-\cos t, -\sin t, 0) \quad \frac{1}{t}(\sin t, -\cos t, 0)\right] = -\frac{1}{t^4}.$$

Poi abbiamo anche:

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \frac{1}{t^3}(-\sin t, \cos t, t),$$

e

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \frac{\sqrt{t^2+2}}{t^2}, \quad \|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

Quindi

$$|\kappa(t)| = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{t^3}{t^2+2}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2+2}},$$

e

$$\tau(t) = \frac{[\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)]}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2} = -\frac{t^2}{t^2+1}.$$

Per calcolare la curvatura normale nei punti di C, parametrizziamo il cono S mediante l'applicazione:

$$\mathbf{x}(\theta, v) = (v\cos\theta, v\sin\theta, v), \quad \theta, v \in \mathbf{R}.$$

Tramite tale applicazione, la curva C e' immagine del ramo di iperbole

$$\begin{cases} \theta = t \\ v = \frac{1}{t} \end{cases} \quad t > 0.$$

Percio' nel punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ di C, la direzione tangente corrisponde, nel piano θ, v, al vettore

$$[d\theta : dv] = [-t^2 : 1].$$

Quindi abbiamo:

$$\kappa_n(t) = \frac{II}{I} = \frac{-\frac{v}{\sqrt{2}}d\theta^2}{v^2 d\theta^2 + 2dv^2} = -\frac{t^3}{(t^2+2)\sqrt{2}}.$$

Osserviamo infine che $\frac{t^3}{(t^2+2)\sqrt{2}} = \frac{t^3}{t^2+2}\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2+2}}$ se e solo se $t = 0$, percio' (b) e' falsa in quanto C e' definita solo per $t > 0$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Esercizio 2. *Sia T il toro rappresentato dalla funzione*

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = ((b + a\sin\phi)\cos\theta, (b + a\sin\phi)\sin\theta, a\cos\phi)$$

($\theta, \phi \in \mathbf{R}$, $b > a > 0$). Sia T^* il sottoinsieme di T costituito dai punti con curvatura non nulla. Per ogni $\mathbf{x}(\theta, \phi) \in T^*$, siano $\mathbf{N}(\theta, \phi)$ il corrispondente versore normale, e $\kappa_1(\theta, \phi)$ e $\kappa_2(\theta, \phi)$ le curvature principali. Si assuma $\kappa_1(\theta, \phi) \leq \kappa_2(\theta, \phi)$. Al variare di $\mathbf{x}(\theta, \phi) \in T^*$, e per ogni $i \in \{1, 2\}$, sia Y_i il luogo dei punti

$$\mathbf{y}_i(\theta, \phi) := \mathbf{x}(\theta, \phi) + \frac{1}{\kappa_i(\theta, \phi)}\mathbf{N}(\theta, \phi).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Y_1 coincide con l'asse di rotazione di T.

(b) $Y_1 = T - T^*$.

(c) Y_2 coincide con il parallelo $\phi = \frac{\pi}{2}$.

(d) Y_2 coincide con la circonferenza descritta durante la rotazione dal centro del cerchio generatore di T.

Svolgimento. Il calcolo delle derivate della funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, \phi)$ mostra che:

$$E = (b + a\sin\phi)^2, \quad F = 0, \quad G = a^2, \quad L = (b + a\sin\phi)\sin\phi, \quad M = 0, \quad N = a$$

ed

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = -(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

Poiche' $F = M = 0$ allora abbiamo:

$$\kappa_1(\theta, \phi) = \frac{L}{E} = \frac{\sin\phi}{b + a\sin\phi} \quad \text{e} \quad \kappa_2(\theta, \phi) = \frac{N}{G} = \frac{1}{a}.$$

Percio'

$$\mathbf{y}_1(\theta, \phi) := \mathbf{x}(\theta, \phi) + \frac{1}{\kappa_1(\theta, \phi)}\mathbf{N}(\theta, \phi) = (0, 0, -b\cot\phi),$$

il che prova che Y_1 e' l'asse di rotazione del toro (tale asse e' diverso da $T - T^*$, che consiste dei due paralleli $\phi = 0$ e $\phi = \pi$). Inoltre

$$\mathbf{y}_2(\theta, \phi) := \mathbf{x}(\theta, \phi) + \frac{1}{\kappa_2(\theta, \phi)}\mathbf{N}(\theta, \phi) = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0),$$

cioe' Y_2 coincide con la circonferenza descritta durante la rotazione dal centro del cerchio generatore di T.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie rigata rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(\theta, v) = (0, 0, b\theta) + v(\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad \theta, v \in \mathbf{R}, \quad b > 0.$$

Fissato $\theta_0 \in \mathbf{R}$, sia $\alpha(\theta)$ l'angolo che la retta generatrice L_θ forma con L_{θ_0} (si assuma $\alpha(\theta) \in [0, \frac{\pi}{2}]$), e sia $\delta(\theta)$ la minima distanza tra le rette L_θ e L_{θ_0} in $\mathbf{R}^3$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) $\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{|\alpha(\theta)|}{\delta(\theta)} = \frac{1}{b}$.

(b) S e' una superficie sviluppabile.

(c) Per ogni θ, l'immagine sferica della retta generatrice L_θ coincide con un cerchio massimo.

(d) Nei punti di una θ-curva $v = v_0 \neq 0$, il piano osculatore coincide con il piano tangente ad S.

Svolgimento. La retta generatrice L_θ e' parallela al vettore $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, percio', quando θ e' vicino a θ_0, si ha $|\alpha(\theta)| = |\theta - \theta_0|$. Inoltre l'asse z e' ortogonale ad ogni L_θ, percio' $\delta(\theta)$ altro non e' che la distanza tra i punti $(0, 0, b\theta)$ ed $(0, 0, b\theta_0)$, cioe' $\delta(\theta) = |b(\theta - \theta_0)|$. Quindi

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{|\alpha(\theta)|}{\delta(\theta)} = \lim_{\theta\to\theta_0} \frac{|\theta - \theta_0|}{|b(\theta - \theta_0)|} = \frac{1}{b}.$$

Cio' prova che (a) e' vera. Invece (b) e' falsa. Infatti, posto $\mathbf{y}(\theta) = (0, 0, b\theta)$ e $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, si ha:

$$[\mathbf{y}(\theta)' \ \mathbf{g}(\theta) \ \mathbf{g}'(\theta)] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = b \neq 0.$$

Cio' equivale a dire che nessuna generatrice ha carattere di sviluppabilita'. Per quanto riguarda (c), fissiamo una generatrice L_{θ_0}. La sua immagine sferica consiste nel luogo descritto sulla sfera unitaria dal punto:

$$\mathbf{N}(\theta_0, v) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}}(-b\sin\theta_0, b\cos\theta_0, -v)$$

al variare di $v \in \mathbf{R}$. Per descrivere questo luogo, a patto di effettuare una rotazione sulla sfera, possiamo sempre assumere $\theta_0 = 0$, e dunque ridurci a studiare l'immagine sferica di L_0. In tal caso il luogo e' descritto dal punto

$$\mathbf{N}(0, v) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}}(0, b, -v)$$

al variare di $v \in \mathbf{R}$. Si tratta di una semicirconferenza, percio' (c) e' falsa. Infine, consideriamo una θ-curva

$$\mathbf{z}(\theta) = \mathbf{x}(\theta, v_0) = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta, b\theta),$$

con $v_0 \neq 0$. Abbiamo

$$\mathbf{z}'(\theta) = \mathbf{x}_\theta(\theta, v_0), \quad \text{e} \quad \mathbf{z}''(\theta) = \mathbf{x}_{\theta\theta}(\theta, v_0) = (-v_0\cos\theta, -v_0\sin\theta, 0) = -v_0\mathbf{x}_v(\theta, v_0).$$

Deduciamo che il versore binormale della θ-curva, che e' parallelo a $\mathbf{z}'(\theta) \times \mathbf{z}''(\theta)$, e' allora parallelo a $\mathbf{x}_\theta(\theta, v_0) \times \mathbf{x}_v(\theta, v_0)$, cioe' e' parallelo al versore normale $\mathbf{N}(\theta, v_0)$. Quindi (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Esercizio 4. *Si consideri il toro T. Diremo che una curva C di T e' una "sezione normale di T"se esiste un piano Γ tale che $C \subseteq T \cap \Gamma$, e Γ contiene la retta normale a T in ogni punto di C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Ogni meridiano di T e' una sezione normale di T.
(b) Esiste un meridiano di T che e' una sezione normale di T.
(c) Ogni parallelo di T e' una sezione normale di T.
(d) Esiste un parallelo di T che e' una sezione normale di T.

Svolgimento. Rappresentiamo il toro con la funzione

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = ((b + a\sin\phi)\cos\theta, (b + a\sin\phi)\sin\theta, a\cos\phi), \quad \theta, \phi \in \mathbf{R}, \quad b > a > 0.$$

Il versore normale e' dato da:

$$\mathbf{N}(\theta, \phi) = -(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

Consideriamo un meridiano $\theta = \theta_0$:

$$\mathbf{y}(\phi) = \mathbf{x}(\theta_0, \phi) = ((b + a\sin\phi)\cos\theta_0, (b + a\sin\phi)\sin\theta_0, a\cos\phi), \quad \phi \in \mathbf{R}.$$

Esso e' contenuto nel piano $x\sin\theta_0 - y\cos\theta_0 = 0$. Tale piano contiene la retta normale in ogni punto del meridiano: infatti $(\sin\phi\cos\theta_0)\sin\theta_0 - (\sin\phi\sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$ per ogni ϕ. Percio' (a) e (b) sono vere.

Infine consideriamo un parallelo $\phi = \phi_0$:

$$\mathbf{z}(\theta) = \mathbf{x}(\theta, \phi_0) = ((b + a\sin\phi_0)\cos\theta, (b + a\sin\phi_0)\sin\theta, a\cos\phi_0), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Esso e' contenuto nel piano $z = a\cos\phi_0$. Adesso pero' tale piano e' parallelo al versore normale $\mathbf{N}(\theta, \phi_0)$ se e solo se $\cos\phi_0 = 0$. Percio' in questo caso (c) e' falsa, e (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia S il paraboloide di equazione*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \geq b > 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Se $a = b$ allora S possiede un unico punto ombelicale.
(b) Se $a \neq b$ allora S non possiede punti ombelicali.
(c) Se $a \neq b$ allora S possiede esattamente due punti ombelicali.
(d) Se $a = b$ allora S possiede esattamente due punti ombelicali.

Svolgimento. Possiamo rappresentare il paraboloide con la funzione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

Il calcolo delle derivate mostra che, posto $\nu := \sqrt{1 + \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4}}$, si ha:

$$E = 1 + \frac{4u^2}{a^4}, \quad F = \frac{4uv}{a^2b^2}, \quad G = 1 + \frac{4v^2}{b^4}, \quad L = \frac{2}{\nu a^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2}{\nu b^2}.$$

Sappiamo che un punto $\mathbf{x}(u, v)$ di S e' ombelicale se e solo se la matrice

$$\Omega := \Omega(u, v) := \begin{bmatrix} L & M & N \\ E & F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\nu a^2} & 0 & \frac{2}{\nu b^2} \\ 1 + \frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^2b^2} & 1 + \frac{4v^2}{b^4} \end{bmatrix}$$

ha rango ≤ 1.

Esaminiamo innanzitutto il caso $a = b$. In tal caso la matrice precedente e' equivalente alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+\frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^4} & 1+\frac{4v^2}{a^4} \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango ≤ 1 se e solo se $uv = 0$ e $1 + \frac{4u^2}{a^4} = 1 + \frac{4v^2}{a^4}$, cioe' se e solo se $u = v = 0$. Percio' se $a = b$ la superficie S possiede soltanto un punto ombelicale, che e' l'origine $\mathbf{x}(0,0) = (0,0,0)$.

Supponiamo infine che $a \neq b$, cioe' che $a > b$. Se il rango di Ω e' ≤ 1, allora deve essere $uv = 0$, cioe' $u = 0$ oppure $v = 0$. Se $u = 0$ allora il rango di Ω e' ≤ 1 se e solo se

$$\frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{4v^2}{b^4}\right) - \frac{1}{b^2} = 0,$$

cioe' se e solo se

$$v = \pm\frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Percio' nel caso $u = 0$ ed $a > b$, S possiede due punti ombelicali distinti, cioe'

$$\mathbf{x}\left(0, \frac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2}\right) = \left(0,\ \frac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2},\ \frac{a^2-b^2}{4}\right),$$

e

$$\mathbf{x}\left(0, -\frac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2}\right) = \left(0,\ -\frac{b}{2}\sqrt{a^2-b^2},\ \frac{a^2-b^2}{4}\right).$$

Se invece $v = 0$ ed $a > b$ allora il rango di Ω e' ≤ 1 se e solo se

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left(1 + \frac{4u^2}{a^4}\right) = 0,$$

cioe' se e solo se

$$u^2 = \frac{a^2(b^2-a^2)}{4}.$$

Poiche' $a > b$ tale equazione non ammettte soluzioni in u, e percio' nel caso $a \neq b$ non ci sono ulteriori punti ombelicali.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (c). ■

Geometria 4, Matematica, III appello, 15 settembre 2015.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Nel piano x, y si consideri la circonferenza Γ di raggio r_0 centrata nell'origine O, e la circonferenza γ di raggio r e centro in $(r_0+r, 0)$. Sia C l'epicicloide descritta dal punto $A = (r_0, 0)$ di γ, quando γ rotola senza strisciare su Γ. Per ogni $P \in C - \Gamma$, sia γ_P la corrispondente posizione di γ durante il rotolamento, e sia Q l'intersezione della retta passante per l'origine e per il centro di γ_P, con $\gamma_P - \Gamma$. Si assuma $Q \neq P$, e che P e Q si trovino nel primo quadrante. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Per ogni $P \in C - \Gamma$, la retta passante per P e Q e' la retta normale principale a C in P.

(b) Per ogni $P \in C - \Gamma$, la retta passante per P e Q e' la retta tangente a C in P.

(c) Se $r_0 = 2r$ allora l'angolo $\angle AOQ$ che la retta L passante per O e Q forma con l'asse positivo delle ascisse, coincide con l'angolo $\angle PQO$ che L forma con la retta passante per P e Q.

(d) Se $r_0 = 3r$ allora l'angolo $\angle AOQ$ che la retta L passante per O e Q forma con l'asse positivo delle ascisse, coincide con l'angolo $\angle PQO$ che L forma con la retta passante per P e Q.

Svolgimento. Denotiamo con $((r_0+r)\cos\theta, (r_0+r)\sin\theta)$ le coordinate del centro di γ_P. Sappiamo che una rappresentazione di C e' data dalla funzione:

$$\mathbf{x}(\theta) = \left((r_0+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right),\, (r_0+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right)\right).$$

In un punto $P = \mathbf{x}(\theta) \in C - \Gamma$, la retta tangente e' parallela al vettore

$$\mathbf{x}'(\theta) = (r_0+r)\left(-\sin\theta + \sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right),\, \cos\theta - \cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right)\right)$$

D'altra parte il punto Q e' il punto di coordinate

$$Q = (r_0+2r)(\cos\theta, \sin\theta).$$

Percio' la retta passante per P e Q e' parallela al vettore

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = r\left(\cos\theta + \cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right),\, \sin\theta + \sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right)\right).$$

Poiche'

$$\det\begin{bmatrix} -\sin\theta + \sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) & \cos\theta - \cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) \\ \cos\theta + \cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) & \sin\theta + \sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) \end{bmatrix} = 0$$

allora $\mathbf{x}'(\theta)$ e' parallelo a $\overrightarrow{PQ}$, e dunque (b) e' vera (ed (a) e' falsa).

Ora andiamo a confrontare gli angoli. Abbiamo

$$\cos(\angle PQO) = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QO}}{\|\overrightarrow{QP}\|\cdot\|\overrightarrow{QO}\|} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{r_0}{r}\,\theta\right)}{2}},$$

e

$$\cos(\angle AOQ) = \cos\theta.$$

Tenuto conto che $\cos\theta \geq 0$ (siamo nel primo quadrante), segue che gli angoli $\angle PQO$ e $\angle AOQ$ sono uguali se e solo se

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos\left(\frac{r_0}{r}\,\theta\right).$$

Il che e' vero se $r_0 = 2r$, ma non e' vero se $r_0 = 3r$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2},\, t,\, \frac{t}{1+t^2}\right).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) C e' compatta.

(b) Nel punto $P = (1,0,0)$ la curvatura di C e' $|\kappa| = 1$.

(c) Nel punto $P = (1,0,0)$ la torsione di C e' $\tau = -\frac{2}{3}$.

(d) Il piano osculatore a C in $P = (1,0,0)$ ha equazione $y = z$.

Svolgimento. Poiche' C possiede punti con ordinata arbitrariamente grande, allora C non e' limitata, percio' non e' compatta. Per calcolare la curvatura e la torsione, osserviamo che:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2},\, 1,\, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right), \quad \mathbf{x}''(t) = \left(\frac{6t^2-2}{(1+t^2)^3},\, 0,\, \frac{2t^3-6t}{(1+t^2)^3}\right),$$

e

$$\mathbf{x}'''(t) = \left(\frac{24(t-t^3)}{(1+t^2)^4},\, 0,\, \frac{-6(t^4-6t^2+1)}{(1+t^2)^4}\right).$$

Percio' nel punto $P = (1,0,0) = \mathbf{x}(0)$ abbiamo:

$$\|\mathbf{x}'(0)\| = \|(0,1,1)\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = \|(0,1,1) \times (-2,0,0)\| = \|(0,-2,2)\| = \sqrt{8},$$

e

$$[\mathbf{x}'(0)\mathbf{x}''(0)\mathbf{x}'''(0)] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = -12.$$

Quindi:

$$|\kappa| = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = 1,$$

e

$$\tau = \frac{[\mathbf{x}'(0)\mathbf{x}''(0)\mathbf{x}'''(0)]}{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|^2} = -\frac{3}{2}.$$

Infine ricordiamo che il piano osculatore cercato e' il piano passante per P ed ortogonale a $\mathbf{b}(0)$. Poiche' $\mathbf{b}(0)$ e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = (0,-2,2)$, allora un'equazione cartesiana per il piano osculatore e' data da: $(0,-2,2) \cdot ((x,y,z) - (1,0,0)) = 0$, che e' equivalente all'equazione $y = z$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (d). ■

Esercizio 3. *La funzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(s)$ sia una rappresentazione naturale della curva C (si assuma $\kappa(s) \cdot \tau(s) \neq 0$ per ogni s). Sia $\mathbf{x}(s,v) := \mathbf{y}(s) + v\mathbf{n}(s)$ la rappresentazione della superficie rigata S, avente C come curva base, generata dalle normali principali di C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Tutti i punti di S sono iperbolici.

(b) C e' una linea di curvatura per S.

(c) C e' una linea asintotica per S.

(d) C e' una linea geodetica per S.

(e) Nei punti di C, la curvatura $|\kappa|$ di C coincide con la curvatura geodetica $|\kappa_g|$.

Svolgimento. Utilizzando le formule di Frenet, otteniamo:

$$\mathbf{x}_s = (1 - v\kappa)\mathbf{t} + v\tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v = -v\tau\mathbf{t} + (1 - v\kappa)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sigma}\left(-v\tau\mathbf{t} + (1 - v\kappa)\mathbf{b}\right), \quad \sigma := \sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2},$$

$$E = \sigma^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

(si osservi che $\sigma > 0$ per ogni s, v, in quanto $\kappa(s) \cdot \tau(s) \neq 0$ per ogni s; in particolare la rappresentazione di S e' sempre regolare). Poi abbiamo:

$$\mathbf{x}_{ss} = (-v\dot\kappa)\mathbf{t} + (\kappa - v\kappa^2 - v\tau^2)\mathbf{n} + v\dot\tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{sv} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{vv} = \mathbf{0},$$

$$L = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{ss} = \frac{1}{\sigma}\left(v^2(\tau\dot\kappa - \kappa\dot\tau) + v\dot\tau\right), \quad M = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{sv} = \frac{\tau}{\sigma}, \quad N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Poiche' $LN - M^2 = -M^2 = -\frac{\tau^2}{\sigma^2} < 0$ allora tutti i punti sono iperbolici, ed (a) e' vera. Inoltre sappiamo che le direzioni principali $(ds : dv)$ sono le direzioni che soddisfano la condizione:

$$(EM - LF)ds^2 + (EN - LG)dsdv + (FN - MG)dv^2 = 0.$$

Nei punti della curva C si ha $v = 0$, percio' l'equazione precedente si riduce a:

$$\tau ds^2 - \tau dv^2 = 0.$$

Quindi le direzioni principali nei punti di C sono $(ds : dv) = (1 : \pm 1)$. Cio' implica che C non e' una linea di curvatura, perche' la direzione tangente nei punti di C e' $(ds : dv) = (1 : 0)$. Invece C e' una linea asintotica. Infatti, nei punti $v = 0$ si ha $L = 0$, percio' nei punti di C si ha $II = \tau\, dsdv$, e $(ds : dv) = (1 : 0)$ annulla II. Infine ricordiamo che $|\kappa_g| = |[\mathbf{t}\,\mathbf{k}\,\mathbf{N}]|$. Poiche' nei punti di C si ha $v = 0$, allora ivi $\mathbf{N} = \mathbf{b}$, ed abbiamo:

$$|\kappa_g| = |[\mathbf{t}\,\mathbf{k}\,\mathbf{N}]| = |[\mathbf{t}\,\kappa\mathbf{n}\,\mathbf{b}]| = |\kappa| \neq 0.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c), e la (e). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie rappresentata dalla funzione:*

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u^3 \sin^3 v, u^3 \cos^3 v, -\sqrt{(4 - u^2)^3}\right).$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Laddove definito, il piano tangente ad S e' rappresentato dall'equazione $\frac{x}{u \sin v} + \frac{y}{u \cos v} + \frac{z}{\sqrt{4-u^2}} = 4$.

(b) Laddove definito, il piano tangente ad S e' rappresentato dall'equazione $\frac{x}{u \sin v} + \frac{y}{u \cos v} + \frac{z}{\sqrt{4-u^2}} = -4$.

(c) Laddove definito, il piano tangente ad S e' rappresentato dall'equazione $\frac{x}{u \sin v} + \frac{y}{u \cos v} - \frac{z}{\sqrt{4-u^2}} = 4$.

Svolgimento. Il calcolo delle derivate mostra che:

$$\mathbf{x}_u = \left(3u^2 \sin^3 v,\ 3u^2 \cos^3 v,\ 3u\sqrt{4 - u^2}\right), \quad \mathbf{x}_v = \left(3u^3 \sin^2 v \cos v,\ -3u^3 \cos^2 v \sin v,\ 0\right),$$

e percio'

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 9u^4 \cos v \sin v \left(\sqrt{4-u^2}\cos v,\ \sqrt{4-u^2}\sin v,\ -u\cos v \sin v \right).$$

Quindi il piano tangente e' rappresentato dall'equazione:

$$\sqrt{4-u^2}\cos v\left(x - u^3\sin^3 v\right) + \sqrt{4-u^2}\sin v\left(y - u^3\cos^3 v\right) - u\cos v\sin v\left(z + \sqrt{(4-u^2)^3}\right) = 0.$$

Cioe' dall'equazione:

$$\left(\sqrt{4-u^2}\cos v\right)\cdot x + \left(\sqrt{4-u^2}\sin v\right)\cdot y - (u\cos v\sin v)\cdot z = 4u\sqrt{4-u^2}\cos v\sin v.$$

Dividendo per $u\sqrt{4-u^2}\cos v\sin v$ si ottiene la (c).

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *La prima forma fondamentale della superficie S e' data da:*

$$I = (v^2+v+1)du^2 + dv^2.$$

Siano C e D le due curve di S corrispondenti alle rette del piano u, v rappresentate dalle equazioni $u = v$ e $u + v = 4$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Tutti i punti di S sono ellittici.

(b) Nel punto in comune C e D si incontrano sotto un angolo α tale che $\cos\alpha = \pm\frac{3}{4}$.

(c) Nel punto in comune C e D si incontrano sotto un angolo α tale che $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$.

(d) Nel punto in comune C e D si incontrano sotto un angolo α tale che $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Svolgimento. Dal Theorema Egregium sappiamo che:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{v^2+v+1}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{v^2+v+1}}{\partial v^2}\right) = -\frac{3}{4(v^2+v+1)^2}.$$

Quindi tutti i punti di S sono iperbolici, ed (a) e' falsa.

Per quel che riguarda l'angolo, osserviamo che C e D si incontrano nel punto P corrispondente ad $(u, v) = (2, 2)$, con vettori tangenti $d\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{x}$ corrispondenti alle direzioni $(du : dv) = (1 : \pm 1)$. Quindi:

$$\cos\alpha = \frac{d\mathbf{x}\cdot\delta\mathbf{x}}{\|d\mathbf{x}\|\,\|\delta\mathbf{x}\|} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Geometria 4, Matematica, IV appello, 19 gennaio 2016.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia C una curva rappresentata dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, con s parametro naturale, e di equazioni intrinseche $\kappa(s) \equiv \tau(s) \equiv 1$. Si considerino le curve C_1 e C_2 rappresentate rispettivamente dalle funzioni $\mathbf{x}_1(s) := \mathbf{t}(s)$, e $\mathbf{x}_2(s) := \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t}(s) + \mathbf{n}(s))$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il parametro s e' un parametro naturale per C_1 e C_2.

(b) In punti corrispondenti allo stesso valore di s, i versori tangenti di C_1 e C_2 hanno uguale proiezione ortogonale sulla retta che congiunge i punti $\mathbf{x}_1(s)$ e $\mathbf{x}_2(s)$.

(c) In punti corrispondenti C_1 e C_2 hanno la stessa curvatura $|\kappa_1| \equiv |\kappa_2|$.

(d) C_1 e C_2 sono entrambe piane.

Svolgimento. Osserviamo che, poiche' $\kappa(s) \equiv \tau(s) \equiv 1$, allora:

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{ds} = \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{k} = \mathbf{n}, \qquad \frac{d\mathbf{x}_2}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{n}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{t} + \mathbf{n} + \mathbf{b}).$$

Deduciamo che i vettori $\frac{d\mathbf{x}_1}{ds}$ e $\frac{d\mathbf{x}_2}{ds}$ hanno lunghezza 1, e quindi (a) e' vera. Ne consegue anche che:

$$\mathbf{k}_1 = \dot{\mathbf{t}}_1 = \dot{\mathbf{n}} = -\mathbf{t} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{k}_2 = \dot{\mathbf{t}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{b}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{t} - 2\mathbf{n} + \mathbf{b}).$$

Percio' C_1 e C_2 hanno curvatura costante $|\kappa_1| \equiv |\kappa_2| = \sqrt{2}$, il che prova che (c) e' vera. Portando avanti il calcolo, abbiamo:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{t} + \mathbf{b}), \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{t} - 2\mathbf{n} + \mathbf{b}),$$

da cui

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{b}), \qquad \mathbf{b}_2 = \mathbf{t}_2 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{b}).$$

Deduciamo

$$\dot{\mathbf{b}}_1 \equiv \dot{\mathbf{b}}_2 \equiv 0.$$

Percio' le due curve hanno torsione identicamente nulla, e quindi sono entrambe piane. Cio' prova che (d) e' vera. Infine anche (a) e' vera. Infatti la proiezione ortogonale $p(\mathbf{t}_1)$ di $\mathbf{t}_1$ sulla retta passante per $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ e' uguale a

$$p(\mathbf{t}_1) = \frac{\mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

che coincide con $p(\mathbf{t}_2)$.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere.

Osservazione. Poiche' la curva C e' l'elica circolare $\mathbf{x}(s) = \frac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}\,s), \sin(\sqrt{2}\,s), s)$, l'esercizio poteva essere svolto anche con un calcolo esplicito. ■

Esercizio 2. *Sia C la curva intersezione delle superfici $x = z^3$, $x - y = z^3(1 - z)$. Si considerino i punti $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (-1, 1, -1)$ di C. Si denotino con L_P, π_P, ρ_P e σ_P la retta tangente a C in P, il piano osculatore, quello normale, e quello rettificante. Similmente si considerino L_Q, π_Q, ρ_Q e σ_Q. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L_P ed L_Q sono sghembe.

(b) π_P e π_Q si intersecano nella retta di equazioni $y = 0$, $2x - 2z + 1 = 0$.

(c) L'intersezione di ρ_P con ρ_Q e' contenuta nel piano $y = 1$.

(d) L'intersezione di σ_P con σ_Q coincide con la retta avente rappresentazione $x(t) = -\frac{8}{7} - \frac{11}{7}t$, $y(t) = -\frac{9}{4}$, $z(t) = 2t$.

Svolgimento. La curva C puo' essere rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t^3, t^4, t)$. E si ha $P = \mathbf{x}(1)$ e $Q = \mathbf{x}(-1)$. Il calcolo delle derivate mostra che:

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2, 4t^3, 1), \quad \mathbf{x}''(t) = (6t, 12t^2, 0).$$

La retta L_P e' parallela al vettore $(3, 4, 1)$, mentre L_Q al vettore $(3, -4, 1)$. Le rappresentazioni parametriche di L_P ed L_Q sono date da:

$$L_P := \begin{cases} x = 1 + 3h \\ y = 1 + 4h \\ z = 1 + h \end{cases}, \qquad L_Q := \begin{cases} x = -1 + 3l \\ y = 1 - 4l \\ z = -1 + l. \end{cases}$$

Il calcolo prova che L_P ed L_Q non hanno punti in comune. Quindi, poiche' le rette non sono parallele, sono sghembe.

Ricordiamo ora che $\mathbf{b}(P)$ e' parallelo a $\mathbf{x}'(P) \times \mathbf{x}''(P) = 6(-2, 1, 2)$, e che $\mathbf{b}(Q)$ e' parallelo a $\mathbf{x}'(Q) \times \mathbf{x}''(Q) = 6(-2, -1, 2)$. Quindi le equazioni dei piani osculatori sono:

$$\pi_P : 2x - y - 2z + 1 = 0, \qquad \pi_Q : 2x + y - 2z + 1 = 0.$$

L'intersezione di tali piani coincide con la retta di equazioni $y = 0$, $2x - 2z + 1 = 0$.

Poiche' $\mathbf{t}(P)$ e' parallelo al vettore $(3, 4, 1)$, e $\mathbf{t}(Q)$ e' parallelo al vettore $(3, -4, 1)$, allora le equazioni dei piani normali sono:

$$\rho_P : 3x + 4y + z - 8 = 0, \qquad \rho_Q : 3x - 4y + z = 0.$$

La somma delle due equazioni porta alla condizione $y = 1$. Quindi l'intersezione dei due piani e' contenuta nel piano $y = 1$.

Infine osserviamo che $\mathbf{n}(P)$ e' parallelo al vettore $\mathbf{t}(P) \times \mathbf{b}(P)$, quindi al vettore $(7, -8, 11)$, e che $\mathbf{n}(Q)$ e' parallelo al vettore $\mathbf{t}(Q) \times \mathbf{b}(Q)$, quindi al vettore $(7, 8, 11)$. Percio' l'intersezione dei piani rettificanti σ_P e σ_Q e' una retta parallela al vettore $(7, -8, 11) \times (7, 8, 11) = 16(-11, 0, 7)$. Quindi tale retta non puo' essere quella assegnata, perche' non le e' parallela.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia S la superficie di equazione $xy - 1 = 0$. Sia P il punto di S di coordinate $P = (1, 1, z_0)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S e' connessa.

(b) S e' una superficie rigata.

(c) S possiede punti ombelicali.

(d) Le rette $x + y = 2, z = z_0$, e $x = 1, y = 1$, forniscono le direzioni principali ad S in P.

(e) La retta normale ad S in P e' intersezione dei piani di equazione $x = y$, $z = z_0$.

(f) Le curvature principali ad S in P sono $|\kappa_1| = 0$ e $|\kappa_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svolgimento. La superficie in questione e' il cilindro sull'iperbole $xy = 1$ del piano x, y. Possiamo rappresentare S con la funzione:

$$(u,v) \in (\mathbf{R}\backslash\{0\}) \times \mathbf{R} \to \mathbf{x}(u,v) = \left(u, \frac{1}{u}, v\right) = \left(u, \frac{1}{u}, 0\right) + v(0,0,1) \in S.$$

Quindi S e' rigata, e non e' connessa perche' la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ e' un omeomorfismo. Il calcolo delle derivate mostra che:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \left(1, -\frac{1}{u^2}, 0\right), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (0,0,1), \quad \mathbf{N}(u,v) = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}}\left(-\frac{1}{u^2}, -1, 0\right),$$

$$E = 1 + \frac{1}{u^4}, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = -\frac{2}{u\sqrt{1+u^4}}, \quad M = N = 0.$$

Poiche' (E, F, G) ed (L, M, N) non sono mai proporzionali, S non possiede punti ombelicali. Inoltre le linee principali sono proprio le $u-$curve e le $v-$curve. Quindi, le rette $x + y = 2, z = z_0$, e $x = 1, y = 1$, essendo parallele ad $\mathbf{x}_u(1,1)$ ed $\mathbf{x}_v(1,1)$, e passando per P, sono le rette principali ad S per P. Similmente, la retta di equazioni $x = y$, $z = z_0$ passa per P, ed e' parallela ad $\mathbf{N}(1,1)$. Percio' e' la retta normale ad S in P. Infine, le curvature principali sono i valori del parametro κ che annullano il determinante della matrice:

$$\begin{bmatrix} L - \kappa E & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}.$$

Sono percio', quando $u = v = 1$, $|\kappa_1| = 0$ e $|\kappa_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (d), la (e), e la (f). ■

Esercizio 4. *Sia S la sfera di raggio r, e T il triangolo geodetico di S con due vertici sull'equatore, ed uno al polo nord. Sia assuma che al polo nord i due lati di T formino un angolo α. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il perimetro di T e' uguale ad $r(\pi + \alpha)$.

(b) L'area di T e' uguale a $2r^2\alpha$.

(c) La somma degli angoli interni di T e' uguale a $\pi + \alpha$.

Svolgimento. Il perimetro di T consiste in due quarti di meridiano, ciascuno di lunghezza pari a $\frac{1}{2}r\pi$, e di un arco di equatore di lunghezza pari a $r\alpha$. Percio' (a) e' vera.

Allo scopo di calcolare l'area, consideriamo la seguente rappresentazione parametrica di S:

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi).$$

La prima forma e':

$$E = r^2\sin^2\phi, \quad F = 0, \quad G = r^2.$$

L'area di T e' la meta' dell'area della luna sferica delimitata da due meridiani formanti un angolo α. Percio'

$$\text{area}(T) = \frac{1}{2}\int\int_{[0,\alpha]\times[0,\pi]} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\phi = \frac{1}{2}\int\int_{[0,\alpha]\times[0,\pi]} r^2 \sin\phi\, d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\alpha d\theta \int_0^\pi r^2 \sin\phi d\phi = r^2\alpha.$$

Quindi (b) e' falsa.

Infine, tenuto conto che i meridiani sono ortogonali all'equatore $(F = 0)$, il triangolo T ha due angoli retti, ed uno di ampiezza α. Quindi (c) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (c).

Osservazione. Possiamo calcolare l'area di T anche sulla base della risposta data in (c). Infatti la formula di Gauss-Bonnet ci dice che l'area di un triangolo geodetico della sfera e' uguale ad r^2 moltiplicato per la differenza tra la somma degli angoli interni e π. ■

Esercizio 5. *Nel piano x, z si consideri la curva C rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t, 0, g(t))$, $0 < t < 1$, dove $g = g(t)$ e' una funzione con derivata $g'(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$. Sia S la superficie che si ottiene ruotando C intorno all'asse z. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esiste un unico punto P di S con curvatura media $H(P)$ nulla.

(b) Il luogo dei punti P di S con curvatura media $H(P)$ nulla e' un parallelo di S.

(c) Nei punti P di S con curvatura media $H(P)$ nulla, ci sono due direzioni asintotiche distinte, che sono ortogonali fra loro.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione:

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta, g(t)), \quad (t, \theta) \in (0, 1) \times \mathbf{R}.$$

Il calcolo delle derivate mostra che:

$$E = \frac{1}{t^2}, \quad F = 0, \quad G = t^2, \quad L = \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}, \quad M = 0, \quad N = -t\sqrt{1-t^2}.$$

Poiche' $F = M = 0$ allora le curvature principali sono:

$$\kappa_1 = \frac{L}{E} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \kappa_2 = \frac{N}{G} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Ne consegue che la curvatura media e'

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{2t^2 - 1}{2t\sqrt{1-t^2}},$$

che si annulla nei punti del parallelo di S di equazione

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Infine, poiche'

$$II = \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt^2 - t\sqrt{1-t^2} d\theta^2,$$

le direzioni asintotiche di S corrispondono, nel piano t, θ, ai vettori $[dt : d\theta] = [\pm t\sqrt{1-t^2} : 1]$. Queste due direzioni, sulla superficie S, formano un angolo α tale che

$$\cos\alpha = \frac{d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}}{\|d\mathbf{x}\| \, \|\delta\mathbf{x}\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} t\sqrt{1-t^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t\sqrt{1-t^2} \\ 1 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} t\sqrt{1-t^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t\sqrt{1-t^2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{bmatrix} -t\sqrt{1-t^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t\sqrt{1-t^2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} = 2t^2 - 1.$$

Percio' nei punti con curvatura media nulla, le due direzioni asintotiche uscenti sono ortogonali (questo e' un fatto di carattere generale).

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Geometria 4, Matematica, I appello, 18 giugno 2019.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$3x^2 - 3y^2 + 12xz - 12yz - 4x - 4y + 2z = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un ellissoide.
(b) Q e' un ellissoide di rotazione.
(c) Q e' un iperboloide iperbolico.
(d) Q e' un paraboloide iperbolico.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono $9, -9, 0$, ed un cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ che diagonalizza la parte omogenea e' dato dalla matrice:

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(le colonne di tale matrice formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ per il prodotto scalare geometrico, e sono autovettori per G, relativi, nell'ordine, agli autovalori $9, -9, 0$). Sostituendo, otteniamo l'equazione

$$9x'^2 - 9y'^2 + 6z' = 0.$$

Quindi Q e' un paraboloide iperbolico, l'affermazione (d) e' vera, le altre no.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (d). ■

Esercizio 2. *Nel piano x, y si consideri la circonferenza Γ di raggio r_0 centrata nell'origine O, e la circonferenza γ di raggio r e centro in $(r_0 + r, 0)$. Sia C l'epicicloide descritta dal punto $A = (r_0, 0)$ di γ, quando γ rotola senza strisciare su Γ. Per ogni $P \in C - \Gamma$, sia γ_P la corrispondente posizione di γ durante il rotolamento, e sia Q il punto di contatto di Γ con γ_P. Denotiamo con $|k|$ il valore della curvatura di C in P, e con d la distanza tra P e Q. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*
(a) $|k| = \frac{(2r+r_0)d}{2(r+r_0)}$.
(b) $|k| = \frac{2r+r_0}{2(r+r_0)d}$.
(c) $|k| = \frac{2r+r_0}{4(r+r_0)d}$.
(d) $|k| = \frac{4r+r_0}{2(r+r_0)d}$.

Svolgimento. Denotiamo con $((r_0 + r)\cos\theta, (r_0 + r)\sin\theta)$ le coordinate del centro di γ_P. Sappiamo che una rappresentazione di C e' data dalla funzione:

$$\mathbf{x}(\theta) = \left((r_0 + r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\,\theta\right),\ (r_0 + r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\,\theta\right) \right).$$

La curvatura di C in $P = \mathbf{x}(\theta)$ e':

$$|k| = \frac{\|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''\|}{\|\mathbf{x}'\|^3} = \pm \frac{2r + r_0}{4r(r + r_0)\sin\left(\frac{r_0}{2r}\theta\right)}.$$

D'altra parte, $Q = (r_0 \cos\theta, r_0 \sin\theta)$. Percio'

$$d = \|Q - P\| = r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{r_0}{r}\theta\right)\right)} = \pm 2r \sin\left(\frac{r_0}{2r}\theta\right).$$

Quindi l'unica affermazione vera e' la (b).

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 3. *Sia C la cubica gobba di $\mathbf{R}^3$, rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Per ogni coppia di punti distinti P e Q di C, la retta che li congiunge interseca C solo in P e Q.

(b) Per ogni punto P di C, la retta tangente a C in P interseca C solo in P.

(c) Per ogni punto P di C, la retta binormale a C in P interseca C solo in P.

(d) Per ogni punto P di C, il piano osculatore a C in P interseca C solo in P.

Svolgimento. Siano $P = (t, t^2, t^3)$, $Q = (s, s^2, s^3)$ ed $R = (u, u^2, u^3)$ tre punti distinti di C (il che equivale a dire che $t \neq s \neq u \neq t$). Se tali punti fossero allineati, allora i vettori $Q - P$ ed $R - P$ sarebbero legati. Cioe' la matrice

$$\begin{bmatrix} s - t & s^2 - t^2 & s^3 - t^3 \\ u - t & u^2 - t^2 & u^3 - t^3 \end{bmatrix}$$

avrebbe rango 1. Cio' e' impossibile se i tre punti sono distinti, percio' l'affermazione (a) e' vera.

Se la retta tangente in $P = (t, t^2, t^3)$ a C interseca C in un altro punto $Q = (s, s^2, s^3)$ $(t \neq s)$, allora il vettore $Q - P$ dovrebbe essere parallelo al vettore $\mathbf{x}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Cioe' la matrice

$$\begin{bmatrix} s - t & s^2 - t^2 & s^3 - t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix}$$

dovrebbe avere rango 1. Cio' e' impossibile se $t \neq s$, percio' anche (b) e' vera.

Come prima, se la retta binormale in $P = (t, t^2, t^3)$ a C interseca C in un altro punto $Q = (s, s^2, s^3)$ $(t \neq s)$, allora il vettore $Q - P$ dovrebbe essere parallelo al vettore $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = (6t^2, -6t, 2)$. Cioe' la matrice

$$\begin{bmatrix} s - t & s^2 - t^2 & s^3 - t^3 \\ 3t^2 & -3t & 1 \end{bmatrix}$$

dovrebbe avere rango 1. Cio' e' impossibile se $t \neq s$. Infatti, se $t = 0$ e' ovvio. Se $t \neq 0$, l'annullamento del primo minore a sinistra comporta $s = -\frac{1+t^2}{t}$. Allora l'annullamento del minore formato dalla prima colonna e dalla terza implica $3t^4 + 3t^2 + 2 = 0$, che non e' possibile se $t \in \mathbf{R}$. Percio' anche (c) e' vera.

Se $Q = (s, s^2, s^3)$ appartiene al piano osculatore a C in $P = (t, t^2, t^3)$, allora l'equazione del piano osculatore $3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$ ammetterebbe come soluzione $(x, y, z) = (s, s^2, s^3)$. Ne consegue che $s = t$. Percio' anche (d) e' vera.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 4. *Sia S il cono quadrico $x^2 + y^2 = z^2$, e sia C la curva che si ottiene intersecando S con il piano T di equazione $x - y + z = \sqrt{2}$. Si consideri il punto $P = (1, 1, \sqrt{2})$ di C. Sia k_n la curvatura normale di C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $|k_n| = \frac{1}{5}$.
(b) $|k_n| = \frac{1}{8}$.
(c) $|k_n| = \frac{1}{10}$.
(d) La direzione tangente a C in P e' una direzione principale ad S in P.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, v) = v(\cos\theta, \sin\theta, 1)$. In tal caso abbiamo:

$$P = (1, 1, \sqrt{2}) = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right).$$

Possiamo calcolare la curvatura normale utilizzando la formula

$$k_n = \frac{II}{I}.$$

Il calcolo mostra che:

$$I = v^2 d\theta^2 + 2dv^2, \quad II = -\frac{v}{\sqrt{2}} d\theta^2.$$

Percio' nel punto P abbiamo:

$$I = 2d\theta^2 + 2dv^2, \quad II = -d\theta^2.$$

Quindi

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{-d\theta^2}{2(d\theta^2 + dv^2)}.$$

Si tratta ora di capire quanto vale $[d\theta : dv]$. Cioe' si tratta di calcolare le coordinate di un vettore tangente a C in P, rispetto alla base

$$\mathbf{x}_\theta\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

del piano dei vettori tangenti ad S in P. Poiche' la retta tangente a C in P altro non e' che l'intersezione del piano tangente ad S in P con il piano T:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{2}\, z = 0 \\ x - y + z = \sqrt{2}, \end{cases}$$

allora la retta tangente a C in P ha la direzione del vettore $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, 2)$. Poiche'

$$(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, 2) = 1 \cdot (-1, 1, 0) + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$$

allora $[d\theta : dv] = [1 : 2]$, e percio'

$$k_n = \frac{-d\theta^2}{2(d\theta^2 + dv^2)} = -\frac{1}{10}.$$

Ne consegue che (c) e' vera, e che (a) e (b) sono false.

Anche (d) e' falsa, perche', essendo $F = M = 0$, le direzioni principali su S sono le linee coordinate (le θ-curve e le v-curve). Queste hanno direzioni $[d\theta : dv] = [1 : 0]$ e $[d\theta : dv] = [0 : 1]$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Sia S l'elicoide rappresentato dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, v) = (v\cos\theta, v\sin\theta, \theta)$, $\theta, v \in \mathbf{R}$. Sia P un punto di S, δ la distanza di P dall'asse, $\mathbf{N}$ il versore normale ad S in P, α l'angolo che $\mathbf{N}$ forma con l'asse. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S e' compatta.

(b) S e' connessa.

(c) $\delta = |\cot\alpha|$.

(d) $\delta = 2|\cot\alpha|$.

Svolgimento. L'applicazione $\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to S$ e' un omeomorfismo. Percio' S e' connessa, ma non e' compatta.

Sia ora $P = \mathbf{x}(\theta, v)$ un punto di S. Poiche'

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(-\sin\theta, \cos\theta, -v),$$

allora

$$\pm\cos\alpha = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3 = -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Quindi

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm v.$$

Poiche' $|v| = \delta$, allora (c) e' vera e (d) no.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). $\blacksquare$

Geometria 4, Matematica, II appello, 15 luglio 2019.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$4xy + 4xz + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 3 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un iperboloide ad una falda.
(b) Q e' un iperboloide a due falde.
(c) Q e' una superficie connessa.
(d) Q e' una superficie di rotazione.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 4 e -2, e l'autovalore 4 appare con molteplicita' 2. Percio' un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' l'equazione di Q nella forma

$$4x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2 - 3 = 0.$$

Ne consegue che Q e' un iperboloide ad una falda, che si puo' ottenere per rotazione, intorno al'asse z', dell'iperbole $4x'^2 - 2z'^2 = 3$ del piano $y' = 0$. Essendo Q un iperboloide ad una falda, e' anche una superficie connessa. Infatti Q e' l'immagine di $\mathbf{R}^2$ tramite l'applicazione

$$(\theta, z') \in \mathbf{R}^2 \to \left(\frac{\sqrt{3 + 2z'^2}}{2} \cos\theta, \frac{\sqrt{3 + 2z'^2}}{2} \sin\theta, z' \right) \in \mathbf{R}^3.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c) e (d). ■

Esercizio 2. *Sia γ la circonferenza di raggio r nel piano x, y, con centro nel punto di coordinate $(0, r)$. Sia C la cicloide descritta dal punto $O = (0,0)$ di γ, quando γ rotola senza strisciare sull'asse ℓ delle ascisse. Per ogni $P \in C$, sia γ_P la corrispondente posizione di γ durante il rotolamento, Q il punto di contatto di γ_P con ℓ, ed R il punto diametralmente opposto a Q. Si assuma $Q \neq P \neq R$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*
(a) La retta per P e Q e' la retta tangente a C in P.
(b) La retta per P e Q e' la retta normale a C in P.
(c) La retta per P ed R e' la retta tangente a C in P.
(d) La retta per P ed R e' la retta normale a C in P.

Svolgimento. Una rappresentazione parametrica di C e' data dalla funzione

$$P = \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = r(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

La retta tangente a C in P e' parallela al vettore

$$\mathbf{x}'(t) = r(1 - \cos t, \sin t).$$

Inoltre la retta ℓ_{PQ} per P e Q e' parallela al vettore

$$Q - P = (rt, 0) - r(t - \sin t, 1 - \cos t) = r(\sin t, -1 + \cos t),$$

e la retta ℓ_{PR} per P ed R e' parallela al vettore

$$R - P = (rt, 2r) - r(t - \sin t, 1 - \cos t) = r(\sin t, 1 + \cos t).$$

Ora e' chiaro che il vettore $Q - P$ e' ortogonale ad $\mathbf{x}'(t)$, e percio' la retta per P e Q e' la retta normale a C in P. Invece il vettore $R - P$ e' parallelo ad $\mathbf{x}'$ in quanto la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos t & \sin t \\ \sin t & 1 + \cos t \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo. E percio' la retta per P ed R e' la retta tangente a C in P.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia C l'elica circolare rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ ($a > 0$, $b \neq 0$). Sia C^* il luogo dei centri di curvatura di C, cioe' la curva rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(t)$, dove con k denotiamo la curvatura di C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C^* e' un'elica circolare che, a parte la posizione nello spazio, coincide con l'elica

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{b^2}{a^2}\cos t, \frac{b^2}{a^2}\sin t, bt\right).$$

(b) C^* e' un'elica circolare che, a parte la posizione nello spazio, coincide con l'elica

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{b^2}{a}\cos t, \frac{b^2}{a}\sin t, bt\right).$$

(c) C^* e' un'elica circolare che, a parte la posizione nello spazio, coincide con l'elica

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{b^4}{a}\cos t, \frac{b^4}{a}\sin t, bt\right).$$

(d) C^* e' un'elica circolare che, a parte la posizione nello spazio, coincide con l'elica

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{b^2}{a^4}\cos t, \frac{b^2}{a^4}\sin t, bt\right).$$

Svolgimento. Ponendo $s = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$, possiamo pensare di rappresentare C con un parametro naturale $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Il calcolo mostra che:

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \frac{\tau}{k}\mathbf{b}, \quad \frac{d^2\mathbf{x}^*}{ds^2} = -\frac{\tau^2}{k}\mathbf{n}, \quad \frac{d^3\mathbf{x}^*}{ds^3} = \tau^2\mathbf{t} - \frac{\tau^3}{k}\mathbf{b},$$

dove $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ denota il triedro di Frenet di C, e k e τ la curvatura e la torsione:

$$(*) \qquad k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Ne consegue che la curavtura e la torsione di C^* sono date da:

$$k^* = k, \quad \tau^* = \frac{k^2}{\tau}.$$

Cio' prova che anche C^* e' un elica circolare, poiche' k^* e τ^* sono costanti. Se denotiamo con a^* il raggio del cilindro su cui giace, e con $|2\pi b^*|$ il suo passo, allora, invertendo le formule $(*)$, che valgono per una qualsiasi elica, quindi anche per C^*, otteniamo:

$$a^* = \frac{k^*}{{k^*}^2 + {\tau^*}^2} = \frac{b^2}{a}, \quad b^* = \frac{\tau^*}{{k^*}^2 + {\tau^*}^2} = b.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 4. *Sia S il paraboloide rappresentato dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Sia $P = (1,1,2)$, e $\sigma = \sigma(u,v) := \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Le curvature principali di S nel punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ sono date da $k_1 = \frac{2}{\sigma}$ e $k_2 = \frac{2}{\sigma^2}$.

(b) Le curvature principali di S nel punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ sono date da $k_1 = \frac{2}{\sigma}$ e $k_2 = \frac{2}{\sigma^3}$.

(c) Le rette $\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - z = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ corrispondono alle direzioni principali di S uscenti da P.

(d) Le rette $\begin{cases} 6x - 2y - z = 2 \\ 5x - y - z = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y + z = 6 \end{cases}$ corrispondono alle direzioni principali di S uscenti da P.

Svolgimento. Per la superficie S abbiamo:

$$I = (1 + 4u^2)du^2 + 8uvdudv + (1 + 4v^2)dv^2, \qquad II = \frac{2}{\sigma}(du^2 + dv^2).$$

Le curvature principali k si ottengono imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sigma} - k(1 + 4u^2) & -4kuv \\ -4kuv & \frac{2}{\sigma} - k(1 + 4v^2) \end{bmatrix}$$

abbia determinante nullo. Cio' equivale a dire che:

$$\sigma^2 k^2 - \frac{2}{\sigma}(1 + \sigma^2)k + \frac{4}{\sigma^2} = 0.$$

Le radici di tale equazione sono

$$k_1 = \frac{2}{\sigma}, \quad k_2 = \frac{2}{\sigma^3}.$$

Percio' (b) e' vera ed (a) no.

Nel punto $P = (1,1,2) = \mathbf{x}(1,1)$ la matrice precedente si riduce a:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 5k & -4k \\ -4k & \frac{2}{3} - 5k \end{bmatrix},$$

e le curvature principali in P sono $\{k_1, k_2\} = \{\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\}$. Le direzioni principali uscenti da P corrispondono, nel piano u, v, alle direzioni $[du : dv]$ tali che

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 5k & -4k \\ -4k & \frac{2}{3} - 5k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $k \in \{k_1, k_2\}$. Cioe' alle direzioni $[du : dv]$ tali che

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{8}{27} & -\frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} & -\frac{8}{27} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' $[du : dv] = [\pm 1 : 1]$, e le rette per P che corrispondono alle direzioni principali sono quelle parallele ai vettori:

$$-\mathbf{x}_u(1,1) + \mathbf{x}_v(1,1) = (-1, 1, 0), \qquad \mathbf{x}_u(1,1) + \mathbf{x}_v(1,1) = (1, 1, 4).$$

Le coppie di rette che appaiono nelle affermazioni (c) e (d) coincidono con tali rette.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia S una superficie, e Σ la sfera unitaria centrata nell'origine. Sia $\gamma : S \to \Sigma$ la rappresentazione sferica di S. Si assuma che se C e' una curva di S, anche la sua immagine $\gamma(C)$ lo e'. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se C e' una linea di curvatura di S, allora, in punti corrispondenti, C e $\gamma(C)$ sono parallele.

(b) Se C e' una linea di curvatura di S, allora, in punti corrispondenti, C e $\gamma(C)$ sono ortogonali.

(c) Se C e' una linea asintotica di S, allora, in punti corrispondenti, C e $\gamma(C)$ sono parallele.

(d) Se C e' una linea asintotica di S, allora, in punti corrispondenti, C e $\gamma(C)$ sono ortogonali.

Svolgimento. Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una rappresentazione locale di S. Se C e' una linea di curvatura, allora in ogni punto di C abbiamo la formula di Rodrigues $d\mathbf{N} = -kd\mathbf{x}$. Cio' implica che C e $\gamma(C)$ sono parallele. Se C e' una linea asintotica, allora in ogni punto di C abbiamo $II = 0$, cioe' $-d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{x} = 0$. Questo vuol dire proprio che C e $\gamma(C)$ sono ortogonali.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (d). ■

Geometria 4, Matematica, III appello, 13 settembre 2019.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$2x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 - 2yz + 2z^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y + \sqrt{3}\,z = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q e' un paraboloide ellittico.

(b) Q e' un paraboloide iperbolico.

(c) Q e' una superficie di rotazione.

(d) Q e' connessa e compatta.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 3 e 0, e 3 figura con molteplicita' 2. Un cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ che diagonalizza la parte omogenea e' dato dalla matrice:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(le colonne di tale matrice formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ per il prodotto scalare geometrico, e sono autovettori per G, relativi, nell'ordine, agli autovalori $3, 3, 0$). Sostituendo, e dividendo per 3, otteniamo l'equazione

$$x'^2 + y'^2 + z' = 0.$$

Quindi Q e' un paraboloide ellittico, l'affermazione (a) e' vera, e (b) no. Inoltre, poiche' l'autovalore 3 appare due volte, allora Q e' una paraboloide di rotazione. Infatti, Q si puo' ottenere facendo ruotare la parabola $z' = -x'^2$ del piano $y' = 0$, intorno all'asse z'. Percio' anche (c) e' vera.

Infine osserviamo che la quadrica Q e' il grafico della funzione

$$(x', y') \in \mathbf{R}^2 \to -x'^2 - y'^2 \in \mathbf{R}.$$

Ne consegue che Q e' omeomorfa ad $\mathbf{R}^2$. Quindi' e' connessa, ma non e' compatta.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (c). ■

Esercizio 2. *Nel piano x, y si consideri la circonferenza Γ di raggio r_0 centrata nell'origine O, e la circonferenza γ di raggio r e centro in $(r_0 + r, 0)$. Sia C l'epicicloide descritta dal punto $A = (r_0, 0)$ di γ, quando γ rotola senza strisciare su Γ. Per ogni $P \in C - \Gamma$, sia γ_P la corrispondente posizione di γ durante il rotolamento, e sia Q il punto di contatto di Γ con γ_P. Denotiamo con $|\kappa|$ il valore della curvatura di C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La curvatura di C assume un valore minimo dato da $|\kappa|_{\min} = \frac{2r+r_0}{8r(r+r_0)}$.

(b) La curvatura di C assume un valore massimo dato da $|\kappa|_{\max} = \frac{2r+r_0}{8r(r+r_0)}$.

(c) La curvatura di C assume valore minimo in tutti i punti P per i quali O, P e Q sono allineati.

(d) La curvatura di C assume valore massimo in tutti i punti P per i quali O, P e Q sono allineati.

Svolgimento. Denotiamo con $((r_0+r)\cos\theta, (r_0+r)\sin\theta)$ le coordinate del centro di γ_P. Sappiamo che una rappresentazione di C e' data dalla funzione:

$$\mathbf{x}(\theta) = \left((r_0+r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right), (r_0+r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right)\right).$$

La curvatura di C in $P = \mathbf{x}(\theta)$ e':

$$|\kappa| = \frac{\|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''\|}{\|\mathbf{x}'\|^3} = \pm\frac{2r+r_0}{4r(r+r_0)\sin\left(\frac{r_0}{2r}\theta\right)}.$$

Da tale formula deduciamo che $|\kappa|$ non ammette un valore massimo, mentre ammette un valore minimo dato da:

$$|\kappa|_{\min} = \frac{2r+r_0}{4r(r+r_0)},$$

in corrispondenza dei valori del paramtero θ tali che

$$(*) \qquad \frac{r_0\theta}{2r} = \frac{\pi}{2} + h\pi, \quad h \in \mathbf{Z}.$$

Percio' possiamo dire che (a), (b) e (d) sono false.

Invece (c) e' vera.

Infatti, i punti O, P e Q sono allineati se e solo se

$$\mathbf{x}(\theta) = ((r_0+2r)\cos\theta, (r_0+2r)\sin\theta).$$

Cio' equivale a dire che

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) = -\cos\theta = \cos(\theta+\pi) \\ \sin\left(\frac{r_0+r}{r}\,\theta\right) = -\sin\theta = \sin(\theta+\pi). \end{cases}$$

E tali formule equivalgono alla condizione precedente $(*)$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 3. *Al variare del parametro reale $a \in \mathbf{R}$, si consideri la curva C_a rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}_a(t) = \left(t, \frac{a}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$, $t \in \mathbf{R}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se $a = 0$, allora C_a e' una curva piana.

(b) Se C_a e' una curva piana, allora $a = 0$.

(c) Se $a = \pm\sqrt{2}$, allora C_a e' un'elica.

(d) Se C_a e' un'elica, allora C_a e' una curva piana oppure $a = \pm\sqrt{2}$.

Svolgimento. Siano κ_a e τ_a la curvatura e la torsione di C_a. Il calcolo mostra che:

$$\kappa_a = \frac{(a^2+4t^2+a^2t^4)^{\frac{1}{2}}}{(1+a^2t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \tau_a = \frac{2a}{a^2+4t^2+a^2t^4}.$$

Quindi la torsione e' identicamente nulla se e solo se $a = 0$. Percio' (a) e (b) sono vere.

Supponiamo ora che $a \neq 0$, cioe' che C_a sia sghemba. Osserviamo che in tal caso κ_a non si annulla mai. Quindi, se $a \neq 0$, C_a e' un'elica se e solo se il rapporto τ_a/κ_a si mantiene costante.

Cio' premesso, supponiamo che C_a sia un'elica, cioe' che il rapporto τ_a/κ_a sia costante. Sia c_a il valore di tale costante. Deve essere $\tau_a^2 = c_a^2\kappa_a^2$. Dalle formule precedenti deduciamo che:

$$4a^2(1 + a^2t^2 + t^4)^3 = c_a^2(a^2 + 4t^2 + a^2t^4)^3.$$

Uguagliando i termini noti, deduciamo che

$$c_a^2 = \frac{4}{a^4}.$$

Sostituendo, otteniamo

$$a^2(1 + a^2t^2 + t^4) = a^2 + 4t^2 + a^2t^4.$$

Quindi $a^4 = 4$, cioe' $a = \pm\sqrt{2}$.

Un calcolo piu' semplice mostra che, viceversa, se $a = \pm\sqrt{2}$, allora τ_a/κ_a e' costante (uguale ad ± 1). Percio' anche (c) e (d) sono vere.

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 4. *La superficie S, rappresentata dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ ($u \in \mathbf{R}$, $v > 0$), ha la prima forma fondamentale data da $I = v^2du^2 + (1 + 4v^2)dv^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La curvatura di Gauss di S e' $K = \frac{8}{(1+4v^2)^2}$.

(b) Tutti i punti di S sono iperbolici.

(c) S non contiene rette.

(d) La lunghezza ℓ della u-curva $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$ ($0 \le u \le 2\pi$) e' $\ell = 2\pi {v_0}^2$.

Svolgimento. Poiche' $F = 0$ sappiamo che

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v\right].$$

Tenuto conto che $E = v^2$ e che $G = 1 + 4v^2$, il calcolo mostra che

$$K = \frac{4}{(1 + 4v^2)^2}$$

(avremmo anche potuto adoperare la formula di Brioschi). Percio' (a) e (b) sono false.

Invece (c) e' vera, in quanto tutti i punti di S sono ellittici. Percio' le curvature principali (cioe' i valori massimo e minimo della curvatura normale) hanno lo stesso segno e sono non nulle. Cio' e' impossibile se S contiene una retta, perche' nei punti di una retta la curvatura normale e' nulla.

Infine, ricordiamo che la lunghezza di una curva e' l'integrale della radice quadrata della prima forma fondamentale. Percio' nel nostro caso abbiamo:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{E}\, du = \int_0^{2\pi} v_0\, du = 2\pi v_0.$$

Quindi anche (d) e' falsa.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 5. *Sia S l'elicoide rappresentato dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, v) = (v\cos\theta, v\sin\theta, 2\theta)$, $\theta, v \in \mathbf{R}$. Sia $\mathcal{L}$ il luogo costituito dai punti P di S tali che il vettore $\overrightarrow{PO}$ sia tangente ad S in P (con $O = (0, 0, 0)$ si denota l'origine degli assi). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{L}$ e' l'unione di due rette.

(b) $\mathcal{L}$ *e' costituito da* 4 *punti.*

(c) In $\mathcal{L}$ *ci sono esattamente* 2 *punti* P *tali che* $\|\overrightarrow{PO}\| = 2$.

(d) In $\mathcal{L}$ *ci sono esattamente* 4 *punti* P *tali che* $\|\overrightarrow{PO}\| = 2$.

Svolgimento. Il calcolo mostra che

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{4+v^2}}(-2\sin\theta, 2\cos\theta, -v).$$

Percio' $\mathcal{L}$ e' costituito da quei punti $P = \mathbf{x}(\theta, v)$ tali che

$$\overrightarrow{PO} \cdot \mathbf{N} = -(v\cos\theta, v\sin\theta, 2\theta) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{4+v^2}}(-2\sin\theta, 2\cos\theta, -v)\right] = 0.$$

Cioe', $\mathcal{L}$ e' costituito da quei punti $P = \mathbf{x}(\theta, v)$ tali che

$$\theta \cdot v = 0.$$

Ne consegue che $\mathcal{L}$ e' l'unione dell'asse delle x con l'asse delle z. Sull'asse delle x ci sono due punti che hanno distanza 2 dall'origine, e ce ne sono altrettanti sull'asse delle z.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a) e la (d). ■

Geometria 4, Matematica, IV appello, 26 settembre 2019.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$14x^2 - 8xy + 4xz + 14y^2 + 4yz + 17z^2 - 9 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un ellissoide.
(b) Q e' un paraboloide.
(c) Q e' un ellissoide di rotazione.
(d) Q e' un paraboloide di rotazione.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 14 & 2 \\ 2 & 2 & 17 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 18 e 9, e l'autovalore 18 appare con molteplicita' 2. Percio' un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' l'equazione di Q nella forma $18x'^2 + 18y'^2 + 9z'^2 - 9 = 0$, che equivale a

$$2x'^2 + 2y'^2 + z'^2 = 1.$$

Ne consegue che Q e' un ellissoide di rotazione.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (c). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva piana rappresentata dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) = (\cos^3\theta, \sin^3\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$. Per ogni punto P di C per cui la rappresentazione e' regolare, sia $|\kappa(P)|$ il valore della curvatura di C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*
(a) La curvatura di C assume valore minimo $|\kappa_{\min}| = \frac{2}{3}$.
(b) La curvatura di C assume valore minimo $|\kappa_{\min}| = \frac{4}{3}$.
(c) Se $|\kappa(P)| = |\kappa_{\min}|$, allora la retta normale principale a C in P passa per l'origine.
(d) Se la retta normale principale a C in P passa per l'origine, allora $|\kappa(P)| = |\kappa_{\min}|$.

Svolgimento. Il calcolo mostra che

$$\mathbf{x}'(\theta) = 3\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{x}''(\theta) = (6\cos\theta\sin^2\theta - 3\cos^3\theta, 6\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin^3\theta),$$

$$\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta) = -9\cos^2\theta\sin^2\theta \cdot (0,0,1), \quad \|\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta)\| = 9\cos^2\theta\sin^2\theta, \quad \|\mathbf{x}'(\theta)\| = |3\cos\theta\sin\theta|$$

(in particolare la rappresentazione e' regolare se e solo se $\cos\theta\sin\theta \neq 0$). Quindi:

$$|\kappa(P)| = |\kappa(\theta)| = \frac{\|\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta)\|}{\|\mathbf{x}'(\theta)\|^3} = \frac{1}{3\cos\theta\sin\theta} = \frac{2}{3\sin(2\theta)}.$$

Ne consegue che il valore minimo per la curvatura e'

$$|\kappa_{\min}| = \frac{2}{3}.$$

E che tale valore e' assunto da tutti e soli i punti $P = \mathbf{x}(\theta)$ tali che

$$(*) \qquad \theta = \frac{\pi}{4} + h\frac{\pi}{2}, \quad h \in \mathbf{Z}.$$

D'altra parte, se $P = \mathbf{x}(\theta)$ e' un punto di C, allora la retta normale a C in P passa per l'origine se e solo se il vettore $\overrightarrow{PO}$ e' ortogonale ad $\mathbf{x}'(\theta)$. Cioe' se e solo se

$$(\cos^3\theta, \sin^3\theta) \cdot (-\cos\theta, \sin\theta) = 0 \iff \cos^4\theta = \sin^4\theta \iff \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

E quest'ultima condizione equivale a $(*)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (c) e (d). ■

Esercizio 3. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3}(2\cos t - \sin t - 2t, -\cos t + 2\sin t - 2t, 2\cos t + 2\sin t + t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sia Γ l'indicatrice sferica del versore tangente di C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Γ e' una circonferenza di raggio $r = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ e centro nel punto $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 2, 1)$.
(b) Γ e' una circonferenza di raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e centro nel punto $P = \frac{1}{3\sqrt{2}}(2, 2, 1)$.
(c) Γ e' una circonferenza di raggio $r = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ e centro nel punto $P = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2, 2, -1)$.
(d) Γ e' una circonferenza di raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e centro nel punto $P = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(2, 2, -1)$.

Svolgimento. Il calcolo mostra che $\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{2}$ per ogni t. Percio' una rappresentazione parametrica di Γ e' data dalla funzione

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-2\sin t - \cos t - 2, \sin t + 2\cos t - 2, -2\sin t + 2\cos t + 1).$$

Poiche' Γ e' contenuta nella sfera unitaria S, per capire se e' oppure no una circonferenza sara' sufficiente capire se e' piana oppure no. Se e' piana, tale piano sara' il piano osculatore a Γ in un qualsiasi suo punto. Allora fissiamo un punto di Γ, per esempio $Q = \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Il piano osculatore ρ a Γ in Q ha equazione

$$2x + 2y - z = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Il calcolo mostra che Γ e' contenuta in ρ, percio' Γ e' una circonferenza. Dalla geometria della sfera sappiamo che il centro di tale circonferenza e' quel punto P intersezione del piano ρ con la retta passante per il centro di S, cioe' l'origine $(0, 0, 0)$, e normale al piano ρ. Tenuto conto che tale retta si puo' rappresentare con la funzione

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = 2s \\ z = -s \end{cases}$$

$(s \in \mathbf{R})$, il calcolo mostra che tale punto P si ottiene in corrispondenza del valore $s = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Quindi

$$P = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(2, 2, -1).$$

Il raggio r di Γ, per il Teorema di Piatagora, sara' dato da

$$r = \sqrt{1 - \|\overrightarrow{OP}\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie rappresentata dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \cos t)$, $\theta \in \mathbf{R}$, $0 < t < \pi$. Sia E il luogo dei punti ellittici di S, P il luogo dei punti parabolici, I il luogo dei punti iperbolici. Sia $f : S \to \Sigma$ la rappresentazione sferica di S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'applicazione $f : S \to \Sigma$ e' iniettiva.
(b) La restrizione $f_{|_E} : E \to \Sigma$ di f su E e' iniettiva.
(c) La restrizione $f_{|_P} : P \to \Sigma$ di f su P e' iniettiva.
(d) La restrizione $f_{|_I} : I \to \Sigma$ di f su I e' iniettiva.

Svolgimento. Il calcolo mostra che

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \cdot (-\sin t\cos\theta, -\sin t\sin\theta, -1),$$

e

$$K = K(\theta, t) = \frac{\sin t\cos t}{t(1+\sin^2 t)^2}.$$

Poiche' $\sin t = \sin(\pi - t)$, deduciamo che f non e' iniettiva.

Poi osserviamo che

$$K > 0 \iff 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Se $t, t' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\mathbf{N}(\theta, t) = \mathbf{N}(\theta', t')$, allora, uguagliando la terza componente, segue che

$$\sin^2 t = \sin^2 t'.$$

Quindi $t = t'$, e θ e θ' differiscono per un multiplo di 2π. Percio' $f_{|_E} : E \to \Sigma$ e' iniettiva.

Similmente si vede che sono iniettive anche le restrizioni $f_{|_P} : E \to \Sigma$ e $f_{|_I} : E \to \Sigma$ (per il luogo dei punti parabolici occorre osservare che coincide con il luogo dei punti $P = \mathbf{x}(\theta, t)$ tali che $K(\theta, t) = 0$, in quanto S non presenta punti planari).

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia S la superficie rappresentata dalla funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \cos t)$, $\theta \in \mathbf{R}$, $0 < t < \pi$. Sia C la curva che si ottiene intersecando S con il piano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) In tutti i punti di C la curvatura normale per la superficie S e' $|\kappa_n| = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$.
(b) In tutti i punti di C la curvatura normale per la superficie S e' $|\kappa_n| = 0$.
(c) C e' una linea di curvatura per S.
(d) C e' una linea asintotica per S.

Svolgimento. La condizione $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sui punti di S equivale a dire che $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioe' $t = \frac{\pi}{4}$. Percio' C e' la θ-curva di S rappresentata dalla funzione:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\theta) = \left(\frac{\pi}{4}\cos\theta, \frac{\pi}{4}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

C e' una circonferenza, ed il vettore curvatura di C e':

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\theta) = -\frac{4}{\pi}(\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Poiche'

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \cdot (-\sin t \cos\theta, -\sin t \sin\theta, -1),$$

allora nei punti di C si ha

$$|\kappa_n| = |\mathbf{k}(\theta) \cdot \mathbf{N}\left(\theta, \frac{\pi}{4}\right)| = \frac{4}{\pi\sqrt{3}}.$$

Inoltre il calcolo mostra che per S si ha $F = M = 0$. Ne consegue che C, che e' una linea coordinata, e' una linea di curvatura.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Geometria 4, Matematica, V appello, 29 gennaio 2020.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$2x^2 + 4xy - 2xz - y^2 + 4yz + 2z^2 + 3 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un iperboloide ad una falda.
(b) Q e' un iperboloide a due falde.
(c) Q e' un paraboloide iperbolico.
(d) Q e' una superficie connessa.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 3 e -3, e l'autovalore 3 appare con molteplicita' 2. Percio' un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' l'equazione di Q nella forma $-3x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 + 3 = 0$, cioe' nella forma

$$x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1.$$

Ne consegue che Q e' un iperboloide a due falde, e le due falde inducono una sconnessione per Q.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva di $\mathbf{R}^3$ definita dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t^2, 1-t, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Sia P il punto di C di coordinate $(1, 0, 1)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*
(a) La retta tangente a C in P e' definita dalle equazioni $x + 2y = 1$ e $2x + y - z = 1$.
(b) La retta normale principale a C in P e' rappresentata dalle funzioni $x = 1-8h$, $y = 11h$, $z = 1+9h$, $h \in \mathbf{R}$.
(c) La retta binormale a C in P e' rappresentata dalle funzioni $x = 1+3h$, $y = 3h$, $z = 1-h$, $h \in \mathbf{R}$.
(d) Il piano osculatore a C in P ha equazione $3x + 3y + z - 4 = 0$.

Svolgimento. Il versore tangente a C in P e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(1) = (2, -1, 3)$. Percio', la retta tangente a C in P e' la retta passante per P e parallela al vettore $(2, -1, 3)$. La retta che appare in (a) verifica entrambe queste condizioni, quindi l'affermazione (a) e' vera.

Il versore binormale $\mathbf{b}(1)$ a C in P e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = (-6, -6, 2)$. Percio', la retta binormale a C in P e' la retta passante per P e parallela al vettore $(3, 3, -1)$. Questa e' la retta che appare in (c). Quindi l'affermazione (c) e' vera. Invece la (d) e' falsa, perche' il piano osculatore a C in P deve essere ortogonale a $\mathbf{b}(1)$, mentre il piano $3x + 3y + z - 4$ non lo e'.

Infine, il versore normale a C in P e' parallelo al vettore $\mathbf{b}(1) \times \mathbf{t}(1)$, che e' parallelo al vettore $(3, 3, -1) \times (2, -1, 3) = (8, -11, -9)$. Percio', la retta normale a C in P e' la retta passante per P e parallela al vettore $(8, -11, -9)$. Questa e' la retta che appare in (b). Quindi l'affermazione (b) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). ■

Esercizio 3. *Sia C la cubica gobba rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Sia $P_0 = (2, 3, 0)$. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme costituito dai punti P di C tali che la retta congiungente P con P_0 sia la retta tangente a C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{L}$ e' l'insieme vuoto.

(b) $\mathcal{L}$ contiene esattamente un punto.

(c) $\mathcal{L}$ contiene esattamente due punti.

(d) $\mathcal{L}$ contiene esattamente tre punti.

Svolgimento. Sia $P = \mathbf{x}(t)$. Allora la retta tangente a C in P coincide con la retta congiungente P con P_0 se e solo se i vettori $\mathbf{x}'(t)$ e $P - P_0 = (t-2, t^2-3, t^3)$ sono paralleli. Cioe' se e solo se la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ t-2 & t^2-3 & t^3 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. Il calcolo mostra che cio' avviene se e solo se $t = 3$. Percio', $\mathcal{L}$ e' costituito solo dal punto $P = (3, 9, 27)$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie rigata $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}(u)$, avente come base la curva $\mathbf{y}(u) = (\cos u, \sin u, u)$, $u \in \mathbf{R}$, e generatrici parallele al vettore $\mathbf{g}(u) = (0, \cos u, \sin u)$, $u \in \mathbf{R}$. Per ogni $u \in \mathbf{R}$, sia L_u la parte della generatrice $\mathbf{l}(v) = \mathbf{x}(u, v)$ costituita da punti regolari per la rappresentazione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Per ogni $u \in \mathbf{R}$, il piano tangente ad S nei punti di L_u e' costante.

(b) Esiste un $u \in \mathbf{R}$ tale che il piano tangente ad S nei punti di L_u e' costante.

(c) Il piano tangente ad S in $P = \mathbf{x}(\pi/2, 1)$ ha equazione $x - y + 1 = 0$.

(d) La retta normale ad S in $P = \mathbf{x}(\pi/2, 1)$ e' rappresentata dalle equazioni $2x + 2y + 2z = 4 + \pi$ e $x + y + 2z = 3 + \pi$.

Svolgimento. Il versore normale $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$ ad S in $P = \mathbf{x}(u, v)$ e' parallelo al vettore

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\cos u(\sin u - 1) - v, \sin^2 u, -\sin u \cos u).$$

Percio', in generale, quando $\sin u \neq 0$, la direzione di $\mathbf{N}(u, v)$ dipende da v. Questo implica che lungo L_u il piano tangente varia. Invece, quando $\sin u = 0$, allora $\mathbf{N}(u, v) = (1, 0, 0)$, cioe' la direzione normale ad S nei punti di L_u non dipende da v. In tal caso allora il piano tangente rimane costante lungo L_u. Ne consegue che (a) e' falsa, mentre (b) e' vera.

Nel punto $P = \mathbf{x}(\pi/2, 1) = (0, 1, 1 + \pi/2)$ il versore normale $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\pi/2, 1)$ e' parallelo al vettore $(-1, 1, 0)$. Quindi il piano tangente e' il piano $x - y + 1 = 0$, perche' tale piano passa per $P = \mathbf{x}(\pi/2, 1)$, ed e' normale ad $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\pi/2, 1)$. Cio' prova che l'affermazione (c) e' vera. E' vera anche l'affermazione (d), in quanto la retta che appare in (d) passa per $P = (0, 1, 1 + \pi/2)$, ed e' parallela ad $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\pi/2, 1)$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (b), (c) e (d). ■

Esercizio 5. *Sia C la curva ottenuta intersecando la superficie S di equazione $z = 2x^2 + y^2$, con il piano T di equazione $x = y$. Sia P il punto di C di coordinate $P = (1, 1, 3)$. Sia κ la curvatura di C in P, e κ_n la curvatura normale di C in P in S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C e' una curva piana.

(b) C e' una sezione normale di S in P.

(c) $|\kappa| = \frac{3}{19\sqrt{19}}$.

(d) $|\kappa_n| = \frac{1}{19\sqrt{7}}$.

Svolgimento. E' chiaro che C e' una curva piana, e che una sua rappresentazione e' data dalla funzione $\mathbf{y}(t) = (t, t, 3t^2)$, $t \in \mathbf{R}$. Il punto P coincide con $\mathbf{y}(1)$, e si ha $\mathbf{y}'(1) = (1, 1, 6)$, $\mathbf{y}''(1) = (0, 0, 6)$. Percio'

$$|\kappa| = \frac{\|\mathbf{y}'(1) \times \mathbf{y}''(1)\|}{\|\mathbf{y}'(1)\|^3} = \frac{3}{19\sqrt{19}}.$$

Ne consegue che (a) e (c) sono vere.

Invece (b) e (d) sono false. Infatti, rappresentiamo S con la funzione $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 2u^2 + v^2)$. Si ha:

$$I = (1 + 16u^2)du^2 + 16uvdudv + (1 + 4v^2)dv^2, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\nu}(-4u, -2v, 1), \quad II = \frac{1}{\nu}(4du^2 + 2dv^2),$$

dove si e' posto $\nu = \sqrt{1 + 16u^2 + 4v^2}$. Il punto P coincide con $\mathbf{x}(1, 1)$. Quindi il versore normale ad S in P e' parallelo al vettore $(4, 2, -1)$, che non e' parallelo al piano $x = y$. Percio' C non e' una sezione normale ad S in P. Inoltre la retta tangente a C in P e' parallela al vettore $(1, 1, 6)$, che possiamo scrivere

$$(1, 1, 6) = \mathbf{x}_u(1, 1)du + \mathbf{x}_v(1, 1)dv = (1, 0, 4)du + (0, 1, 2)dv$$

con $du = dv = 1$. Ne consegue (con $u = v = du = dv = 1$):

$$|\kappa_n| = \frac{II}{I} = \frac{4du^2 + 2dv^2}{\nu((1 + 16u^2)du^2 + 16uvdudv + (1 + 4v^2)dv^2)} = \frac{\sqrt{3}}{19\sqrt{7}}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (a) e (c). ■

Geometria 4, Matematica, VI appello, 14 febbraio 2020.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$2xz + y^2 - 1 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q e' un paraboloide iperbolico.

(b) Q e' un iperboloide iperbolico.

(c) Q e' un iperboloide ad una falda.

(d) Q e' una superficie compatta.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 1 e -1, e l'autovalore 1 appare con molteplicita' 2. Percio', un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' l'equazione di Q nella forma

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1.$$

Ne consegue che Q e' un iperboloide ad una falda, detto anche iperboloide iperbolico perche' tutti i suoi punti sono iperbolici. Tale superficie non e' compatta, perche' possiede punti aventi distanza dall'origine arbitrariamente grande.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 2. *Il segmento AB, di lunghezza 2, si muove nel piano in modo che i suoi estremi A e B siano vincolati uno sull'asse delle ascisse, l'altro su quello delle ordinate, nel primo quadrante. Sia θ, $0 \le \theta \le \pi/2$, l'angolo nel vertice A del triangolo OAB, dove O denota l'origine degli assi coordinati. Sia $\ell(x, y, \theta) = 0$ l'equazione della retta AB. Sia $\mathbf{x}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ la curva C inviluppo della famiglia di tali rette, definito dalle equazioni $\ell(x, y, \theta) = 0$ e $\ell_\theta(x, y, \theta) = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) La lunghezza $\ell(C)$ di C e' $\ell(C) = 2$.

(b) La lunghezza $\ell(C)$ di C e' $\ell(C) = 3$.

(c) La lunghezza $\ell(C)$ di C e' $\ell(C) = 4$.

(d) La lunghezza $\ell(C)$ di C e' $\ell(C) = \frac{3}{2}$.

Svolgimento. L'equazione della retta AB e'

$$\ell(x, y, \theta) = x \sin\theta + y \cos\theta - 2 \sin\theta \cos\theta = 0.$$

Percio' C e' il luogo dei punti (x, y) tali che

$$\begin{cases} x \sin\theta + y \cos\theta - 2 \sin\theta \cos\theta = 0 \\ x \cos\theta - y \sin\theta - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0. \end{cases}$$

Dunque una rappresentazione parametrica di C e' data dalla funzione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) = (2\cos^3\theta, 2\sin^3\theta).$$

Quindi

$$\ell(C) = \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{x}'\|\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 6\cos\theta\sin\theta\, d\theta = 6\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 3.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 3. *Sia C la cubica gobba rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Sia $P_0 = (2, 11/3, 6)$. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme costituito dai punti P di C tali che P_0 appartiene al piano osculatore a C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{P}$ e' contenuto nel piano $11x - 6y - z = -6$.

(b) $\mathcal{P}$ e' contenuto nel piano $11x + 6y - 6z = 8$.

(c) $\mathcal{P}$ e' contenuto nel piano $11x - 6y + z = 6$.

(d) $\mathcal{P}$ e' contenuto nel piano $11x + 3y - 5z = 3$.

Svolgimento. Sia $P = \mathbf{x}(t)$ il generico punto di C. Il versore binormale a C in P e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)$, cioe' al vettore $(3t^3, -3t, 1)$. Per cui l'equazione del piano osculatore a C in P e' $3t^2(x - t) - 3t(y - t^2) + (z - t^3) = 0$, cioe' $3t^2x - 3ty + z = t^3$. Se il punto P_0 soddisfa tale equazione, allora si ha $6t^2 - 11t + 6 = t^3$. Tenuto conto che t e' l'ascissa di P, t^2 l'ordinata, e t^3 la quota, ne consegue che il punto P soddisfa l'equazione $-11x + 6y - z = -6$. Percio' l'affermazione (c) e' vera. Le altre sono false, perche' in $\mathcal{P}$ c'e' il punto $(1, 1, 1)$, che non appartiene agli altri piani.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie definita dall'equazione $z = 4x^2 - 2xy + 4y^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) S non possiede punti ombelicali.

(b) S possiede esattamente due punti ombelicali.

(c) Il punto $P = \left(\frac{1}{10\sqrt{3}}, \frac{1}{10\sqrt{3}}, \frac{1}{50}\right)$ e' un punto ombelicale di S.

(d) Il punto $P = \left(\frac{1}{10\sqrt{3}}, -\frac{1}{10\sqrt{3}}, \frac{1}{30}\right)$ e' un punto ombelicale di S.

Svolgimento. Possiamo rappresentare la superficie con la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = (u, v, 4u^2 - 2uv + 4v^2)$. Il calcolo delle derivate mostra che:

$$E = 1 + (8u - 2v)^2, \quad F = (8u - 2v)(8v - 2u), \quad G = 1 + (8v - 2u)^2, \quad L = 8/\nu, \quad M = -2/\nu, \quad N = 8/\nu,$$

dove $\nu = \sqrt{1 + (8u - 2v)^2 + (8v - 2u)^2}$. Sappiamo che il punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ e' ombelicale per S se e solo se la matrice

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 8 \\ E & F & G \end{bmatrix}$$

ha rango ≤ 1. Cio' equivale a dire che

$$\begin{cases} E - G = 0 \\ 4F + E = 0. \end{cases}$$

Ora $E = G$ se e solo se $u = \pm v$. Inserendo tale condizione nell'equazione $4F + E = 0$, si deduce che $\mathbf{x}(u, v)$ e' un punto ombelicale per S se e solo se

$$u = -v = \pm \frac{1}{10\sqrt{3}}.$$

In conclusione, le affermazioni vere sono (b) e (d). ■

Esercizio 5. *Si considerino i punti* $P = (1, 0, 1)$*,* $Q = (1, 1, 1)$ *ed* $R = (0, 1, 1)$*, ed il piano* α *di equazione* $x + y + z = 0$*. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esiste una sfera passante per P*,* Q *ed* R*, tangente al piano* α*, con curvatura* $K = \frac{4}{27}$*.*

(b) Esistono esattamente due sfere passanti per P*,* Q *ed* R*, e tangenti al piano* α*.*

(c) La sfera $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ *passa per* P*,* Q *ed* R*, ed e' tangente al piano* α*.*

(d) La sfera $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ *passa per* P*,* Q *ed* R*, ed e' tangente al piano* α*.*

Svolgimento. Il luogo dei punti equidistanti da P e Q e' il piano ortogonale al segmento PQ, passante per il suo punto medio $\frac{1}{2}(P + Q) = \frac{1}{2}(2, 1, 2)$. Tale piano ha equazione $y = \frac{1}{2}$. Similmente si vede che il luogo dei punti equidistanti da Q ed R ha equazione $x = \frac{1}{2}$. Percio' ci sono ∞^1 sfere passanti per i tre punti assegnati. Sono tutte e sole le sfere con il centro del tipo $C = C(z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z_0\right)$, $z_0 \in \mathbf{R}$, e raggio $R = R(z_0) = \sqrt{\frac{1}{2} + (z_0 - 1)^2}$. Tra tutte queste sfere, quelle che sono tangenti al piano α sono quelle per cui il centro $C(z_0)$ ha distanza dal piano α pari al raggio $R(z_0)$. Cioe' sono quelle sfere per cui

$$\sqrt{\frac{1}{2} + (z_0 - 1)^2} = \frac{|1 + z_0|}{\sqrt{3}}.$$

Cio' equivale a dire che

$$z_0 = \frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad z_0 = \frac{7}{2}.$$

Percio' ci sono esattamente due sfere passanti per P, Q ed R, e tangenti al piano α. E sono la sfera di centro $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e quella di centro $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e raggio $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). ■

Geometria 4, Matematica, I appello, 22 giugno 2021.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$x^2 + 4xy + y^2 = 2z.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q e' un paraboloide iperbolico.

(b) Q contiene infinite rette.

(c) Q e' una superficie connessa.

(d) Q e' una superficie compatta.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono $3, 0, -1$. Percio', un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' l'equazione della quadrica in

$$3{x'}^2 - {y'}^2 = 2z'.$$

Quindi Q e' un paraboloide iperbolico. Abbiamo visto a lezione che possiede infinite rette (ce ne sono due schiere). Inoltre si tratta di una superficie, in quanto, nelle nuove coordinate, la mappa

$$\mathbf{x} : (u, v) \in \mathbf{R}^2 \to (u, v, (3u^2 - v^2)/2) \in \mathbf{R}^3$$

e' una carta globale per Q. In particolare Q e' omeomorfa ad $\mathbf{R}^2$, percio' e' connessa, ma non e' compatta.

In conclusione, le affermazioni vere sono (a), (b) e (c). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$, $t \in \mathbf{R}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Nel punto $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) \in C$, la retta tangente a C ha la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 7x - y - 3z = 4. \end{cases}$$

(b) Nel punto $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) \in C$, la curvatura e' $\kappa = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{6}}$.

(c) Nel punto $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) \in C$, la torsione e' $\tau = \frac{6}{11}$.

(d) Nel punto generico $\mathbf{x}(t)$ di C, l'equazione del piano osculatore e' $3t^2x - 3(1+2t)y + 3z = t^3$.

Svolgimento. Dalla rappresentazione parametrica di C deduciamo:

$$\mathbf{x}'(t) = (1, t, t + t^2), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 1, 1 + 2t), \quad \mathbf{x}'''(t) = (0, 0, 2).$$

Ne consegue:

$$||\mathbf{x}'(t)|| = \left(1 + 2t^2 + 2t^3 + t^4\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = \left(t^2, -1 - 2t, 1\right),$$

$$||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)|| = \left(2 + 4t + 4t^2 + t^4\right)^{\frac{1}{2}}, \quad [\,\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)\,] = 2.$$

Tenuto conto che $P = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) = \mathbf{x}(t)_{|\,t=1} = \mathbf{x}(1)$, allora la curvatura e la torsione richieste sono:

$$\kappa = \kappa(1) = \left[\frac{||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)||}{||\mathbf{x}'(t)||^3}\right]_{|\,t=1} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{6}},$$

$$\tau = \tau(1) = \left[\frac{[\,\mathbf{x}'(t)\,\mathbf{x}''(t)\,\mathbf{x}'''(t)\,]}{||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)||^2}\right]_{|\,t=1} = \frac{2}{11}.$$

Percio' (b) e' vera e (c) e' falsa.

La retta assegnata passa per il punto P ed e' parallela al vettore $\mathbf{x}'(t)_{|\,t=1} = (1, 1, 2)$, quindi anche (a) e' vera.

Infine, il piano osculatore nel punto $\mathbf{x}(t)$ passa per tale punto, ed e' ortogonale a $\mathbf{b}(t)$, il che e' equivalente a dire che e' ortogonale a $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)$, in quanto

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)}{||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)||}.$$

Percio' l'equazione richiesta e':

$$t^2(x - t) - (1 + 2t)\left(y - \frac{t^2}{2}\right) + 1 \cdot \left(z - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = 0.$$

Tale equazione e' proporzionale a quella indicata nel testo, percio' (d) e' vera.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b), e la (d). ■

Esercizio 3. *Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, sia H_α il piano di equazione $x = \alpha z$. Sia S l'ellissoide di equazione $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$. Sia C_α la curva che si ottiene intersecando S con il piano H_α. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C_α e' una circonferenza se e solo se $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) C_α e' una circonferenza se e solo se $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

(c) Non esiste alcun valore di α per cui C_α sia una circonferenza.

Svolgimento. La curva C_α si ottiene intersecando il piano H_α con il cilindro di equazione $\frac{y^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \alpha^2\right) z^2 = 1$ ottenuto sostituendo $x = \alpha z$ nell'equazione di S:

$$C_\alpha := \begin{cases} \frac{y^2}{2} + \left(\frac{1}{3} + \alpha^2\right) z^2 = 1 \\ x = \alpha z. \end{cases}$$

Percio', possiamo rappresentare il generico punto $\mathbf{x}_\alpha$ di C_α sotto la forma:

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(\theta) = \left(\alpha\sqrt{\frac{3}{1 + 3\alpha^2}}\sin\theta,\ \sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{\frac{3}{1 + 3\alpha^2}}\sin\theta\right).$$

La curva C_α e' una circonferenza se e solo se la sua curvatura $\kappa = \kappa(\theta)$ e' costante, cioe' indipendente da θ. Poiche'

$$\kappa = \frac{||\mathbf{x}'_\alpha \times \mathbf{x}''_\alpha||}{||\mathbf{x}'_\alpha||^3},$$

$$||\mathbf{x}'_\alpha \times \mathbf{x}''_\alpha||^2 = \frac{6(1+\alpha^2)}{1+3\alpha^2}$$

e

$$||\mathbf{x}'_\alpha||^2 = 2 + \frac{1-3\alpha^2}{1+3\alpha^2}\cos^2\theta,$$

ne consegue che C_α e' una circonferenza se e solo se il coefficiente di $\cos^2\theta$ e' nullo, cioe' se e solo se $1 - 3\alpha^2 = 0$ [1].

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie $z = x^2 - y^3$, e sia C la curva che si ottiene intersecando S con il piano di equazione $x + y = 0$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Esistono esattamente due punti di C tali che, in tali punti, C sia una sezione normale ad S.

(b) La curvatura normale $|\kappa_n|$ di C in $O = (0,0,0)$ e' $|\kappa_n| = 1$.

(c) La curvatura normale $|\kappa_n|$ di C in $P = (1,-1,2)$ e' $|\kappa_n| = \frac{8}{27\sqrt{14}}$.

(d) La curvatura $|\kappa|$ di C in $P = (1,-1,2)$ e' $|\kappa| = \frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^3)$. Il calcolo mostra che:

$$I = (1+4u^2)du^2 - 12uv^2 du dv + (1+9v^4)dv^2, \quad II = \frac{2}{(1+4u^2+9v^4)^{\frac{1}{2}}}\left(du^2 - 3v dv^2\right),$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{(1+4u^2+9v^4)^{\frac{1}{2}}}(-2u, 3v^2, 1).$$

D'altra parte, possiamo rappresentare la sezione C con la funzione:

$$\mathbf{y}(t) = (t, -t, t^2 + t^3), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Se $P = \mathbf{y}(t)$ e' un punto di C, allora C e' una sezione normale ad S in P se e solo se il piano $x + y = 0$ contiene la retta normale ad S in P, cioe' se e solo se il vettore $\mathbf{N}(P)$ e' parallelo al piano $x+y=0$, cioe' se e solo se

$$-2t + 3t^2 = 0.$$

Percio' sono esattamente due i punti di C per cui C e' una sezione normale, e sono i punti che si ottengono in corrispondenza di $t = 0$, cioe' $(0,0,0)$, e $t = \frac{2}{3}$, cioe' $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9} + \frac{8}{27}\right)$.

Nel punto $O = (0,0,0) = \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0,0)$, lungo la direzione tangente (du, dv), la curvatura normale e':

$$k_n = \frac{II}{I}(du, dv) = \frac{2du^2}{du^2 + dv^2}.$$

Tenuto conto che la retta tangente a C in O e' parallela al vettore $\mathbf{y}'(t) = (1, -1, 2t + 3t^2)$ valutato per $t = 0$, e che $\mathbf{y}'(0) = (1,-1,0) = 1 \cdot \mathbf{x}_u(0,0) + (-1) \cdot \mathbf{x}_v(0,0)$ (infatti $\mathbf{x}_u(0,0) = (1,0,0)$ e $\mathbf{x}_v(0,0) =$

[1] In alternativa si puo' ragionare cosi'. La curva C_α deve essere simmetrica rispetto all'origine degli assi $(0,0,0)$. Percio' C_α sara' una circonferenza se e solo se il suo generico punto $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(\theta)$ ha distanza costante dall'origine. Imponendo questa condizione, si ottiene il valore cercato di α.

$(0,1,0))$, allora, per calcolare la curvatura normale di C in O, nella formula precedente possiamo sostituire $(du,dv)=(1,-1)$. Ne consegue che la curvatura normale di C in O e' 1.

Similmente, nel punto $P=(1,-1,2)=\mathbf{y}(1)=\mathbf{x}(1,-1)$, lungo la direzione tangente (du,dv), la curvatura normale e':

$$k_n=\frac{II}{I}(du,dv)=\frac{2}{\sqrt{14}}\left(\frac{du^2+3dv^2}{5du^2-12dudv+10dv^2}\right).$$

La retta tangente a C in P e' parallela al vettore $\mathbf{y}'(t)=(1,-1,2t+3t^2)$ valutato per $t=1$. Per tale vettore si ha $\mathbf{y}'(1)=(1,-1,5)=1\cdot\mathbf{x}_u(1,-1)+(-1)\cdot\mathbf{x}_v(1,-1)$ (infatti $\mathbf{x}_u(1,-1)=(1,0,2)$ e $\mathbf{x}_v(1,-1)=(0,1,-3)$). Percio', per calcolare la curvatura normale di C in P, nella formula precedente possiamo sostituire $(du,dv)=(1,-1)$. Ne consegue che la curvatura normale di C in P e' $\frac{8}{27\sqrt{14}}$.

Infine, per calcolare la curvatura scalare di C in P, ricorriamo alla formula

$$\kappa=\frac{||\mathbf{y}'(1)\times\mathbf{y}''(1)||}{||\mathbf{y}'(1)||^3}=\frac{||(1,-1,5)\times(0,0,8)||}{||(1,-1,5)||^3}=\frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

In conclusione, tutte le affermazioni sono vere. ■

Esercizio 5. *Sia C una curva sghemba, con curvatura e torsione mai nulle. Sia S la superficie circoscritta a C. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'immagine sferica di S e' l'indicatrice del versore normale di C.

(b) L'immagine sferica di S e' l'indicatrice del versore binormale di C.

(c) Le rette tangenti a C sono linee di curvatura per S.

(d) Le evolventi di C sono linee di curvatura per S.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S sotto la forma:

$$\mathbf{x}(v,s)=\mathbf{y}(s)+v\mathbf{t}(s),$$

dove con $\mathbf{y}=\mathbf{y}(s)$ denotiamo una rappresentazione naturale di C.

Calcolando le derivate, otteniamo:

$$\mathbf{x}_v=\mathbf{t},\quad \mathbf{x}_s=\mathbf{t}+v\kappa\mathbf{n},\quad \mathbf{x}_v\times\mathbf{x}_s=v\kappa\mathbf{b},\quad \mathbf{x}_{vv}=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}_{vs}=\kappa\mathbf{n},\quad \mathbf{x}_{ss}=-v\kappa^2\mathbf{t}+(\kappa+v\dot{\kappa})\mathbf{n}+v\kappa\tau\mathbf{b},$$

dove $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ denota il triedro di Frenet di C, e κ e τ denotano la curvatura e la torsione di C. Ne consegue:

$$\mathbf{N}=\mathbf{b},\quad E=1,\quad F=1,\quad G=1+v^2\kappa^2,\quad L=0,\quad M=0,\quad N=v\kappa\tau.$$

E' chiaro allora che l'immagine sferica di S e' l'indicatrice del versore binormale di C.

Inoltre, ricordiamo che, in generale, l'equazione delle direzioni principali e':

$$(EM-LF)dv^2+(EN-LG)dvds+(FN-MG)ds^2=0.$$

Nel nostro caso, tale equazione si riduce a:

$$v\kappa\tau(dvds+ds^2)=0.$$

Percio', tenuto conto che $v\kappa\tau\neq 0$, le linee di curvatura, punto per punto, soddisfano la condizione $ds=0$, che corrisponde alle generatrici di S, cioe' le rette tangenti a C, oppure la condizione $dv+ds=0$, che corrisponde alle evolventi di C. Infatti, tali curve si possono rappresentare sotto la forma $\mathbf{z}(s)=\mathbf{x}(c-s,s)=\mathbf{y}(s)+(c-s)\mathbf{t}(s)$ ($c=$ costante), e

$$\frac{d\mathbf{z}}{ds}=(c-s)\kappa\mathbf{n}=-\frac{c-s}{v}(\mathbf{x}_v-\mathbf{x}_s).$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b), la (c), e la (d). ■

Geometria 4, Matematica, II appello, 23 luglio 2021.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$x^2 + xy + y^2 = z.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un paraboloide ellittico.
(b) Q contiene infinite rette.
(c) Q contiene almeno una retta.
(d) Q e' un sottospazio compatto di $\mathbf{R}^3$.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$. Percio', un opportuno cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$, portera' l'equazione della quadrica in

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = z'.$$

Quindi Q e' un paraboloide ellittico.
Poiche' Q possiede punti con quota arbitrariamente grande, e' chiaro che Q non e' compatta.
Inoltre Q non contiene rette. Questo dipende dal fatto generale che una superficie con tutti punti ellittici, e Q lo e', non puo' avere rette. Un argomento diretto e' il seguente. Supponiamo, per assurdo, che ℓ sia una retta contenuta in Q, con equazioni parametriche:

$$\ell : \begin{cases} x' = x_0' + ah \\ y' = y_0' + bh \\ z' = z_0' + ch. \end{cases}$$

Qui (x_0', y_0', z_0') denota un punto fissato di ℓ, $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ un vettore parallelo ad ℓ, ed $h \in \mathbf{R}$ il parametro. Sostituendo nell'equazione di Q, nelle nuove coordinate, otteniamo:

$$\frac{1}{2}(x_0' + ah)^2 + \frac{3}{2}(y_0' + bh)^2 - (z_0' + ch) = 0 \quad \text{per ogni} \quad h \in \mathbf{R}.$$

Possiamo riguardare l'espressione precedente come un polinomio in h di secondo grado, con coefficiente direttore dato da

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2.$$

Poiche' il polinomio e' identicamente nullo, allora e' nullo. Percio', deve essere $a = b = 0$. Ma allora l'espressione precedente diviene:

$$\frac{1}{2}{x_0'}^2 + \frac{3}{2}{y_0'}^2 - (z_0' + ch) = -ch = 0 \quad \text{per ogni} \quad h \in \mathbf{R}.$$

Quindi anche c deve essere nullo, e cio' e' in contrasto col fatto che (a, b, c) e' una direzione.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2 - 2t + 3,\, t^3 - 2t^2 + t,\, 2t^3 - 6t + 2\right), \quad t < 1.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Nel punto $P = (3, 0, 2) \in C$, la retta tangente a C ha la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x + 8y + z = 5 \\ x - 4y - z = 1. \end{cases}$$

(b) Nel punto $P = (3, 0, 2) \in C$, il piano osculatore a C ha equazione $4x - 2y - z = 10$.

(c) Nel punto $Q = (6, -4, 6) \in C$, il piano osculatore a C ha equazione $4x + 2y - z = 10$.

(d) La curva C e' piana.

Svolgimento. Dalla rappresentazione parametrica di C deduciamo:

$$\mathbf{x}'(t) = (2t - 2, 3t^2 - 4t + 1, 6t^2 - 6), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 6t - 4, 12t), \quad \mathbf{x}'''(t) = (0, 6, 12).$$

Il calcolo mostra che

$$[\mathbf{x}'(t)\, \mathbf{x}''(t)\, \mathbf{x}'''(t)] = 0$$

per ogni t. Percio' la torsione di C e' nulla, e la curva e' piana.

Ora osserviamo che $P = (3, 0, 2) = \mathbf{x}(0)$, mentre $Q = (6, -4, 6) = \mathbf{x}(-1)$.

La retta tangente a C in P e' parallela al vettore $\mathbf{x}'(0) = (-2, 1, -6)$, e passa per P. E queste condizioni sono verificate dalla retta del testo.

Il piano osculatore a C in P e' quel piano passante per P, ortogonale a

$$\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = (-2, 1, -6) \times (1, -2, 0) = (-12, -6, 3).$$

Percio' il piano osculatore a C in P ha equazione $4x + 2y - z = 10$. Tra l'altro, essendo C piana, questo e' il piano contenente C, e quindi e' anche il piano osculatore a C in Q, cosa che si puo' controllare con un calcolo diretto analogo al precedente.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (c), e la (d). ■

Esercizio 3. *Sia C l'evoluta piana dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Sia $|\kappa|$ la curvatura di C nel punto $P = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $|\kappa| = \frac{8\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}$.

(b) $|\kappa| = \frac{9\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}$.

(c) $|\kappa| = \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

(d) $|\kappa| = \frac{9\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$.

Svolgimento. Cominciamo con il calcolare una rappresentazione parametrica per C.

Sappiamo che l'evoluta piana e' l'inviluppo delle rette normali dell'ellisse assegnata. Tale ellisse ammette la rappresentazione parametrica:

$$\mathbf{x} = \left(\sqrt{2}\cos t,\, \sin t\right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Poiche'

$$\mathbf{x}'(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t,\, \cos t\right),$$

allora la retta normale all'ellisse ha equazione $-\sqrt{2}\sin t\left(x - \sqrt{2}\cos t\right) + \cos t\,(y - \sin t) = 0$, cioe' ha equazione

$$\left(\sqrt{2}\sin t\right)x + (-\cos t)\,y = \cos t \cdot \sin t.$$

Derivando rispetto a t, e mettendo a sistema, otteniamo che il punto generico (x, y) di C soddisfa le equazioni:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}\sin t\right)x + (-\cos t)\,y = \cos t \cdot \sin t \\ \left(\sqrt{2}\cos t\right)x + (\sin t)\,y = \cos^2 t - \sin^2 t. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, otteniamo la rappresentazione parametrica $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ di C, cioe':

$$\mathbf{y}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^3 t,\, -\sin^3 t\right).$$

Ora il punto assegnato P si ottiene da $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ in corrispondenza del valore $t = \frac{\pi}{4}$ (a meno di multipli di 2π). Percio' si tratta di calcolare la curvatura di C in corrispondenza di $t = \frac{\pi}{4}$. A tale proposito, il calcolo mostra che:

$$\mathbf{y}'(t) = -3\cos t \cdot \sin t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\, \sin t\right), \quad \mathbf{y}'(t) \times \mathbf{y}''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3\cos t \cdot \sin t\right)^2 \mathbf{e}_3.$$

Percio' nel punto P abbiamo:

$$||\mathbf{y}'(t)||_{|t=\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

e

$$||\mathbf{y}'(t) \times \mathbf{y}''(t)||_{|t=\frac{\pi}{4}} = \frac{9}{8}\sqrt{2}.$$

Ne consegue che

$$|\kappa| = \frac{9}{8}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{9}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 4. *Sia S la superficie $z = x^2 + y^2$, e sia $C \subset S$ il luogo costituito dai punti X di S tali che la retta $\ell_{X,P}$, che congiunge X con il punto fisso $P = (1, 1, 0)$, sia tangente ad S in X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C e' una curva contenuta in un piano passante per P.

(b) Il valore massimo $K_{\max, C}$ assunto dalla curvatura di Gauss di S nei punti di C e' $K_{\max, C} = 4$.

(c) Il valore minimo $K_{\min, C}$ assunto dalla curvatura di Gauss di S nei punti di C e' $K_{\min, C} = \left(\frac{2}{33}\right)^2$.

(d) Esiste almeno un punto X di C tale che C sia una sezione normale di S in X.

Svolgimento. Possiamo rappresentare S con la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Il calcolo mostra che:

$$I = (1 + 4u^2)du^2 + 8uvdudv + (1 + v^2)dv^2, \quad II = \frac{2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}}\left(du^2 + dv^2\right),$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}}(-2u, -2v, 1), \quad K = \left(\frac{2}{1 + 4u^2 + 4v^2}\right)^2.$$

Il luogo C e' costituito da quei punti $X = (u, v, u^2 + v^2)$ tali che il vettore $\overrightarrow{PX} = (u-1, v-1, u^2+v^2)$ sia ortogonale ad $\mathbf{N}$, cioe' da quei punti $X = (u, v, u^2 + v^2)$ tali che

$$(u-1, v-1, u^2+v^2) \cdot (-2u, -2v-1) = 0.$$

Cio' equivale a dire che $u^2+v^2-2u-2v = 0$. Quindi, C si ottiene intersecando S con il piano $2x+2y = z$:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Nel piano u, v, il luogo C corrisponde alla circonferenza

$$(u-1)^2 + (v-1)^2 = 2.$$

In particolare, non ci sono altri piani contenenti C, altrimenti C sarebbe contenuto in una retta, ed allora avrebbe un numero finito di punti (si confronti con lo svolgimento del primo esercizio), invece C e' infinito. Poiche' il piano $2x + 2y - z = 0$ non contiene P, segue che l'affermazione (a) e' falsa.

Inoltre, dall'equazione precedente, possiamo ricavare una rappresentazione parametrica di C:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta) = \left(1 + \sqrt{2}\cos\theta,\ 1 + \sqrt{2}\sin\theta,\ 2\left(2 + \sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta\right)\right), \quad \theta \in \mathbf{R}.$$

Percio', nei punti di C, il valore della curvatura di Gauss di S e':

$$K = K(\theta) = \left(\frac{2}{17 + 8\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)}\right)^2 = \left(\frac{2}{17 + 16\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\right)^2.$$

Quindi (b) e (c) sono vere.

Infine, se, in qualche punto, C fosse una sezione normale, allora in tale punto il versore normale $\mathbf{N}$ di S sarebbe parallelo al piano $2x + 2y - z = 0$, cioe'

$$-4u - 4v - 1 = 0.$$

Ma allora esisterebbe un qualche $\theta \in \mathbf{R}$ tale che

$$-4(1 + \sqrt{2}\cos\theta) - 4(1 + \sqrt{2}\sin\theta) - 1 = 0,$$

cioe' tale che

$$9 + 8\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

che e' impossibile.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (c). ■

Esercizio 5. *Sia S l'iperboloide di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Sia ℓ la retta di S di equazioni $x - z = 0$, $y + 1 = 0$. Sia $\{\ell_t\}$, $t \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, la schiera di rette di S a cui appartiene ℓ. Per ogni $\ell_t \neq \ell$, sia $P_t \in \ell$ il piede in ℓ della comune perpendicolare ad ℓ_t ed ℓ (cioe' della retta ortogonale ed incidente entrambe le rette ℓ_t ed ℓ). Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Al tendere di ℓ_t ad ℓ, il punto P_t tende al punto $P = (1, 0, 0)$.

(b) Al tendere di ℓ_t ad ℓ, il punto P_t tende al punto $P = (1, -1, 1)$.

(c) Per ogni punto $Q \in \ell$, l'equazione del piano tangente ad S in Q e' una combinazione lineare delle equazioni di ℓ.

(d) Per ogni punto $Q = (q_x, q_y, q_z) \in \ell$, l'equazione del piano tangente ad S in Q e' la combinazione lineare delle equazioni di ℓ con coefficienti q_x e q_y.

Svolgimento. Le equazioni di ℓ_t, $t = [(\lambda, \mu)] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, sono:

$$\begin{cases} \lambda(x-z) = \mu(1-y) \\ \mu(x+z) = \lambda(1+y). \end{cases}$$

Infatti, da queste equazioni si ottengono quelle di ℓ per $t = [(1,0)]$ (cioe' ponendo $\lambda = 1$ e $\mu = 0$). Osserviamo che ℓ_t e' parallela al vettore

$$(-\lambda^2 + \mu^2,\ -2\lambda\mu,\ -\lambda^2 - \mu^2).$$

Percio' la comune perpendicolare ad ℓ_t ed ℓ, chiamiamola m_t, e' parallela al vettore

$$(-\lambda^2 + \mu^2,\ -2\lambda\mu,\ -\lambda^2 - \mu^2) \times (-1, 0, -1) = (2\lambda\mu,\ 2\mu^2,\ -2\lambda\mu).$$

Allora m_t e' la retta passante per il punto $P_t = (p, -1, p)$ di ℓ, con $p \in \mathbf{R}$ da determinare, e parallela al vettore $(\lambda,\ \mu,\ -\lambda)$ (poiche' $\ell_t \neq \ell$, allora $\mu \neq 0$, e possiamo semplificare il vettore calcolato). Cioe' m_t ammette una rappresentazione parametrica della forma:

$$\begin{cases} x = p + \lambda q \\ y = -1 + \mu q \\ z = p - \lambda q, \end{cases}$$

con $q \in \mathbf{R}$. Il punto P_t e' determinato dalla condizione che m_t intersechi ℓ_t, cioe' dalla condizione che il punto $(p + \lambda q,\ -1 + \mu q,\ p - \lambda q)$ soddisfi le equazioni di ℓ_t:

$$\begin{cases} \lambda(p + \lambda q) + \mu(-1 + \mu q) - \lambda(p - \lambda q) = \mu \\ \mu(p + \lambda q) - \lambda(-1 + \mu q) + \mu(p - \lambda q) = \lambda. \end{cases}$$

Interpretiamo le equazioni precedenti come un sistema lineare di Cramer nelle incognite p e q. Il calcolo prova che

$$p = \frac{\lambda\mu}{2\lambda^2 + \mu^2},$$

e percio'

$$P_t = \left(\frac{\lambda\mu}{2\lambda^2 + \mu^2},\ -1,\ \frac{\lambda\mu}{2\lambda^2 + \mu^2} \right).$$

Deduciamo che al tendere di ℓ_t ad ℓ, cioe' al tendere di $t = [(\lambda, \mu)]$ a $[(1,0)]$, il punto P_t tende al punto $P = (0, -1, 0)$, e quindi (a) e (b) sono false.

Invece (c) e (d) sono vere. Infatti, consideriamo il generico punto Q di ℓ:

$$Q = (q_x, q_y, q_z) = (p, -1, p), \quad p \in \mathbf{R}.$$

L'equazione del piano tangente ad S in Q e':

$$f_x(Q)(x - q_x) + f_y(Q)(y - q_y) + f_z(Q)(z - q_z) = 2q_x(x - q_x) + 2q_y(y - q_y) - 2q_z(z - q_z) = 0,$$

dove con f denotiamo l'equazione di S, cioe' $f = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Semplificando, l'equazione diviene:

$$px - y - pz - 1 = 0.$$

E

$$px - y - pz - 1 = p(x - z) - (y + 1) = q_x(x - z) + q_y(y + 1).$$

In conclusione, le affermazioni vere sono la (c), e la (d). ■

Geometria 4, Matematica, III appello, 2 settembre 2021.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$5x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 4yz + 2z^2 - 2x + 4y + 4z + 1 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) Q si riduce ad una retta.

(b) Q e' un cilindro.

(c) Q e' un paraboloide ellittico.

(d) Q e' una superficie con punti tutti ellittici.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 6, 3, 0. Gli autospazi corrispondenti sono generati dai vettori $(-2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$. Posto

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

il cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = M \cdot \mathbf{x}'$, porta l'equazione della quadrica in

$$6x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{6}x' + 2\sqrt{3}y' + 1 = 0.$$

Finalmente, con la traslazione $x' = x'' - \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z' = z''$, si riesce a rappresentare Q con l'equazione:

$$6x''^2 + 3y''^2 = 1.$$

Riconosciamo dunque che Q e' un cilindro, con base un'ellisse. In particolare, Q e' una superficie rigata, percio' non puo' avere punti ellittici.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sqrt{2}\sin t - 2\cos t,\, \cos t + \sqrt{2}\sin t + t,\, \cos t + \sqrt{2}\sin t - t\right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) C e' un'elica di asse $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

(b) C e' un'elica di asse $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

(c) L'indicatrice sferica della tangente di C e' una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{3}{4}}$ e centro nel punto $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

(d) L'indicatrice sferica della tangente di C e' una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{5}{6}}$ e centro nel punto $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Svolgimento. Il calcolo mostra che:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2\sin t + \sqrt{2}\cos t,\; -\sin t + \sqrt{2}\cos t + 1,\; -\sin t + \sqrt{2}\cos t - 1\right),$$

da cui

$$||\mathbf{x}'(t)|| = 2\sqrt{2}.$$

Percio'

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathbf{x}'(t).$$

Quindi

$$\mathbf{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathbf{x}'(t) \cdot (1,1,1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t.$$

Percio' (a) non e' vera. Similmente si vede che anche (b) e' falsa.

Dalle equazioni di $\mathbf{t}(t)$ osserviamo che l'indicatrice e' contenuta nel piano $y - z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Percio' l'indicatrice e' una circonferenza, il cui centro e' l'intersezione di tale piano con la retta ad esso ortogonale, passante per il centro $O = (0,0,0)$ della sfera: e' il punto $P = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. Dal Teorema di Pitagora, ricaviamo il raggio r di tale circonferenza. Infatti tale raggio e' un cateto del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il raggio della sfera unitaria, e l'altro cateto e' dato dal vettore $\overrightarrow{OP}$:

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ∎

Esercizio 3. *Sia C la cubica gobba rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Si consideri il punto $P_0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme costituito dai punti P di C tali che P_0 appartiene al piano normale a C in P. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $\mathcal{P}$ e' vuoto.

(b) $\mathcal{P}$ e' infinito.

(c) $\mathcal{P}$ e' contenuto in un piano.

(d) $\mathcal{P}$ e' costituito esattamente da due punti.

Svolgimento. L'equazione del piano normale a C nel generico punto $P = \mathbf{x}(t)$ di C e':

$$x + 2ty + 3t^2 z = t + 2t^3 + 3t^5.$$

Il punto assegnato P_0 appartiene a tale piano se e solo se

$$2t^3 + 3t^5 = 0.$$

Tenuto conto che $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, ne consegue che

$$\mathcal{P} = C \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 2z + 3yz = 0\} = \{(0,0,0)\}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ∎

Esercizio 4. *Sia* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta, \phi) : U \to \mathbf{R}^3$ *la rappresentazione parametrica della sfera unitaria* S*, definita ponendo* $\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$*, con* U *dato dal rettangolo* $0 < \theta < 2\pi$*,* $0 < \phi < \pi$*. Sia* $\Gamma \subset U$ *una curva, e* $C = \mathbf{x}(\Gamma) \subset S$ *la sua immagine sulla sfera. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) In punti corrispondenti, l'angolo che Γ *forma con la retta orizzontale* $\phi = \phi_0$ *di* U*, coincide con l'angolo che* C *forma con il parallelo* $\phi = \phi_0$ *di* S*, per ogni* $0 < \phi_0 < \pi$*.*

(b) In punti corrispondenti, l'angolo che Γ *forma con le retta orizzontale* $\phi = \frac{\pi}{2}$ *di* U*, coincide con l'angolo che* C *forma con il parallelo* $\phi = \frac{\pi}{2}$ *di* S*.*

(c) In punti corrispondenti, l'angolo che Γ *forma con le retta orizzontale* $\phi = \frac{\pi}{3}$ *di* U*, coincide con l'angolo che* C *forma con il parallelo* $\phi = \frac{\pi}{3}$ *di* S*.*

(d) In punti corrispondenti, l'angolo che Γ *forma con le retta orizzontale* $\phi = \frac{\pi}{4}$ *di* U*, coincide con l'angolo che* C *forma con il parallelo* $\phi = \frac{\pi}{4}$ *di* S*.*

Svolgimento. Sia
$$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases}$$
una rappresentazione di Γ. Sia α l'angolo che C forma con il parallelo $\phi = \phi_0$. Tenuto conto che
$$I = \sin^2\phi\, d\theta^2 + d\phi^2,$$
allora
$$\cos\alpha = \frac{\theta'(t)\sin\phi_0}{\sqrt{\theta'^2(t)\sin^2\phi_0 + \phi'^2(t)}}.$$
Invece, se β e' l'angolo che Γ forma con la retta $\phi = \phi_0$, allora
$$\cos\beta = \frac{\theta'(t)}{\sqrt{\theta'^2(t) + \phi'^2(t)}}.$$

Percio', l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 5. *Sia* $S \subset \mathbf{R}^3$ *una superficie. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Se S *e' una sfera, allora in tutti i punti di* S *si ha* $K = H^2$*.*

(b) Se in tutti i punti di S *si ha* $K = H^2$*, allora* S *e' una sfera.*

(c) Se S *e' una sfera, allora per ogni punto* P *di* S *e per ogni vettore tangente* $d\mathbf{x} \in T^*_{S,P}$*, si ha* $\det[d\mathbf{N}\ \mathbf{N}\ d\mathbf{x}] = 0$.

(d) Se per ogni punto P *di* S *e per ogni vettore tangente* $d\mathbf{x} \in T^*_{S,P}$*, si ha* $\det[d\mathbf{N}\ \mathbf{N}\ d\mathbf{x}] = 0$*, allora* S *e' una sfera.*

Svolgimento. Sia P un punto di S, e siano κ_1 e κ_2 le curvature principali di S in P. Allora la condizione $K = H^2$ equivale a dire che
$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2.$$
Cioe' che
$$(\kappa_1 - \kappa_2)^2 = 0.$$
Percio', se $K = H^2$ in tutti i punti di S, allora tutti i punti di S sono punti ombelicali, e viceversa. Ne consegue che (a) e' vera, mentre non lo e' (b). Il piano, infatti, ha tutti i punti ombelicali parabolici.

Veniamo alle altre affermazioni. Innanzitutto osserviamo che, poiche' $\mathbf{N}$ non e' nullo, ed e' ortogonale sia a $d\mathbf{N}$ che a $d\mathbf{x}$, la condizione $\det[d\mathbf{N}\ \mathbf{N}\ d\mathbf{x}] = 0$ equivale a dire che i vettori $d\mathbf{N}$ e $d\mathbf{x}$ sono linearmente dipendenti. Per la formula di Rodrigues, cio' e' equivalente a dire che $d\mathbf{x}$ e' una direzione principale. Percio', dire che *per ogni punto* P *di* S *e per ogni vettore tangente* $d\mathbf{x} \in T^*_{S,P}$*, si ha* $\det[d\mathbf{N}\ \mathbf{N}\ d\mathbf{x}] = 0$, e' equivalente a dire che tutti i punti di S sono ombelicali. Percio', come prima, (c) e' vera, e (d) e' falsa.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), e la (c). ■

Geometria 4, Matematica, IV appello, 21 settembre 2021.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 12x + 12y + 12z + 36 = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' vuota.
(b) Q si riduce ad un punto.
(c) Q e' una retta.
(d) Q e' un ellissoide.

Svolgimento. La traslazione

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \\ z = z' - 3 \end{cases}$$

porta l'equazione di Q nell'equazione

$$3x'^2 + 6y' + 2z'^2 = 0.$$

Percio' Q consiste solo del punto $(x, y, z) = (-2, -1, -3)$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

Esercizio 2. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 - t^2 - 5,\, 3t^2 + 1,\, 2t^3 - 16\right), \quad t > 0.$$

Sia P il punto di C corrispondente a $t = 2$, e Q il punto di C di coordinate $(-5, 4, -14)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) La retta tangente a C in P e' l'intersezione del piano $6x-2y-z+32 = 0$ con il piano $3x-2y+29 = 0$.
(b) Il piano normale a C in P ha equazione $2x + 3y + 6z - 37 = 0$.
(c) Il piano osculatore a C in P ha equazione $6x + 2y - 3z - 20 = 0$.
(d) Il piano osculatore a C in Q ha equazione $6x + y - 3z - 16 = 0$.

Svolgimento. Il punto P ha coordinate $P = (-1, 13, 0)$. D'altra parte abbiamo

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2 - 2t,\, 6t,\, 6t^2), \quad \mathbf{x}''(t) = (6t - 2,\, 6,\, 12t), \quad \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = 6t^2 \cdot (6,\, 2,\, -3).$$

Quindi, la retta tangente a C in P e' la retta passante per P e parallela al vettore $\mathbf{x}'(2) = (8, 12, 24)$. La retta assegnata nel testo verifica queste condizioni, percio' (a) e' vera. Il piano normale e' il piano per P ortogonale alla retta tangente, cioe' a $\mathbf{x}'(2)$. Quindi ha equazione:

$$8(x + 1) + 12(y - 13) + 24z = 0.$$

Tale equazione e' proporzionale a quella del testo, percio' anche (b) e' vera. Il piano osculatore, invece, e' il piano per P ortogonale a $\mathbf{b}$, che e' parallelo a $\mathbf{x}'(2) \times \mathbf{x}''(2)$. Percio' il piano osculatore a C in P ha equazione:

$$6(x + 1) + 2(y - 13) - 3z = 0.$$

Ne consegue che anche (c) e' vera.

Infine, osserviamo che, poiche' $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = 6t^2 \cdot (6,\, 2,\, -3)$, allora $\mathbf{b}$ e' costante, dunque C e' una curva piana (ma non e' una retta). E il piano osculatore a C nei suoi punti e' proprio il piano contenente C, e quindi non dipende dal punto. Percio' (d) e' falsa a priori.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b), e la (c). ■

Esercizio 3. *Al variare dei parametri $a, b, c \in \mathbf{R}$, con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, sia C la cubica rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (at,\, bt^2,\, ct^3 + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C e' un'elica se e solo se $2b^2 = 3c\left(\sqrt{4 + a^2} - 2\right)$.

(b) C e' un'elica se e solo se $2b^2 = 3c\left(\sqrt{9 + a^2} - 3\right)$.

(c) Se C e' un'elica, allora $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$.

(d) Se C e' un'elica, allora $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{1+\sqrt{4+a^2}}{a}$.

Svolgimento. Il calcolo mostra che

$$\mathbf{x}'(t) = (a, 2bt, 3ct^2 + 1), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 2b, 6ct), \quad \mathbf{x}'''(t) = (0, 0, 6c).$$

Percio':

$$[\mathbf{x}'(t)\, \mathbf{x}''(t)\, \mathbf{x}'''(t)] = 12abc, \quad \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = (6bct^2 - 2b, -6act, 2ab).$$

Dalle formule per la curvatura e la torsione, possiamo dire che in generale

$$\frac{\tau}{\kappa} = [\mathbf{x}'(t)\, \mathbf{x}''(t)\, \mathbf{x}'''(t)] \left(\frac{||\mathbf{x}'(t)||}{||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)||} \right)^3.$$

Ricordiamo anche che C e' un'elica se e solo se il rapporto $\frac{\tau}{\kappa}$ e' costante. Quindi, nel nostro caso, poiche' $[\mathbf{x}'(t)\, \mathbf{x}''(t)\, \mathbf{x}'''(t)]$ e' costante, possiamo dire che C e' un'elica se e solo se esiste una costante γ tale che

$$\frac{||\mathbf{x}'(t)||^2}{||\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)||^2} = \gamma,$$

per ogni t. Cioe' se e solo se, per ogni t, si ha

$$\gamma = \frac{a^2 + 1 + (6c + 4b^2)t^2 + 9c^2t^4}{4b^2(a^2 + 1) + (36a^2c^2 - 24b^2c)t^2 + 36b^2c^2t^4}.$$

Il che equivale a dire che

$$a^2 + 1 + (6c + 4b^2)t^2 + 9c^2t^4 = \gamma \left[4b^2(a^2 + 1) + (36a^2c^2 - 24b^2c)t^2 + 36b^2c^2t^4\right]$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$. Per il principio di identita' dei polinomi, deduciamo che $\gamma = \frac{1}{4b^2}$, e l'uguaglianza precedente e' equivalente a

$$4b^4 + 12b^2c - 9a^2c^2 = 0.$$

Risolvendo si ottiene

$$2b^2 = 3c\left(\sqrt{1 + a^2} - 1\right).$$

Percio' (a) e (b) sono false.

Inoltre, tenuto conto che $\gamma = \frac{1}{4b^2}$, allora

$$\frac{\tau}{\kappa} = 12abc\frac{1}{8b^3} = \frac{3ac}{2b^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}.$$

Quindi (c) e' vera e (d) e' falsa.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (c). ■

Esercizio 4. *Sia S la regione dell'ellissoide $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, definita dalla condizione $z > 0$. Sia $\mathcal{O}$ l'insieme costituito dai punti ombelicali di S. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'insieme $\mathcal{O}$ e' vuoto.

(b) L'insieme $\mathcal{O}$ e' costituito da esattamente un punto.

(c) L'insieme $\mathcal{O}$ e' costituito da esattamente due punti.

(d) L'insieme $\mathcal{O}$ e' costituito da infiniti punti.

Svolgimento. Poiche' l'ellissoide assegnato si ottiene per rotazione dell'ellisse $E : x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ del piano x, z, intorno all'asse z, e' chiaro che il polo nord $(0, 0, 2)$ e' un ombelico. Infatti, le sezioni normali in tal punto coincidono con l'ellisse E che ruota intorno all'asse delle z. Il calcolo che segue provera' che e' anche l'unico ombelico di S.[2] La superficie S puo' essere parametrizzata al seguente modo:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, 2\sqrt{1 - u^2 - v^2}\right), \quad u^2 + v^2 < 1.$$

Posto

$$f(u, v) = 2\sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

il calcolo mostra che

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\nu}(-f_u, -f_v, 1), \quad \nu := \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2},$$

$$L = \frac{1}{\nu} f_{uu}, \quad M = \frac{1}{\nu} f_{uv}, \quad N = \frac{1}{\nu} f_{vv}.$$

Quindi i punti ombelicali sono identificati dalla condizione

$$\mathrm{rk} \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v & 1 + f_v^2 \\ f_{uu} & f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix} \leq 1.$$

Per il Teorema degli Orlati, cio' equivale a dire che:

$$\det \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_{uu} & f_{uv} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & 1 + f_v^2 \\ f_{uu} & f_{vv} \end{bmatrix} = 0.$$

D'altra parte, il calcolo esplicito delle derivate di f mostra che:

$$\det \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_{uu} & f_{uv} \end{bmatrix} = \frac{48}{f^3} uv, \quad \det \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & 1 + f_v^2 \\ f_{uu} & f_{vv} \end{bmatrix} = \frac{48}{f^3}(v^2 - u^2).$$

Percio' il punto $\mathbf{x}(u, v)$ e' un ombelico se e solo se $u = v = 0$. Cioe', in S, c'e' solo un ombelico, ed e' il punto $(0, 0, 2)$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■

[2] Per simmetria, anche il polo sud $(0, 0, -2)$ e' un ombelico per l'ellissoide, e i due poli sono gli unici ombelichi. Infatti, utilizzando le altre carte di Monge con cui si puo' ricoprire l'ellissoide, lo stesso calcolo che stiamo per svolgere prova che non ci sono altri punti ombelicali. Questa proprieta' vale per tutti gli ellissoidi di rotazione (ad eccezione della sfera, i cui punti, come sappiamo, sono tutti ombelicali). Invece, nel caso dell'ellissoide "sghembo", ci sono esattamente quattro punti ombelicali, dislocati nel piano di simmetria dell'ellisse con assi il minore ed il maggiore dell'ellissoide. La dimostrazione e' un po' piu' complicata.

Esercizio 5. *Sia T l'ellissoide di equazione $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) Il valore massimo assunto dalla curvatura di Gauss su T e' $K_{\max}=4$.

(b) Il valore minimo assunto dalla curvatura di Gauss su T e' $K_{\min}=\frac{1}{4}$.

(c) Esistono solo due punti di T per cui la curvatura di Gauss e' massima.

(d) Esistono solo due punti di T per cui la curvatura di Gauss e' minima.

Svolgimento. Utilizzando il calcolo svolto in precedenza nella carta $z>0$, otteniamo

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}=\frac{4(1-u^2-v^2)^{-2}}{[1+4(1-u^2-v^2)^{-1}(u^2+v^2)]^2}.$$

Tenuto conto che $x=u$, $y=v$, e che $z^2=4(1-x^2-y^2)$, otteniamo:

$$K=\frac{1}{4\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{16}\right)^2}.$$

Per simmetria e continuita', questa formula vale su tutto T. Ora osserviamo che:

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{16}\geq\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

E

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{16}=\frac{1}{4}\qquad\Longleftrightarrow\qquad x=y=0.$$

Percio' $K_{\max}=4$, e tale valore viene assunto soltanto dai due poli. Invece:

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{16}\leq x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1.$$

E

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{16}=1\qquad\Longleftrightarrow\qquad z=0.$$

Percio' $K_{\min}=\frac{1}{4}$, e tale valore viene assunto da tutti e soli i punti dell'equatore $z=0$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (a), la (b), e la (c). ■

Geometria 4, Matematica, V appello, 27 gennaio 2022.

Svolgimento.

Esercizio 1. *Sia Q la quadrica di $\mathbf{R}^3$ rappresentata dall'equazione*

$$x^2 + 2xy + 2xz - z = 0.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.
(a) Q e' un iperboloide iperbolico.
(b) Q e' un paraboloide iperbolico.
(c) Q e' una superficie compatta.
(d) Q contiene infinite rette.

Svolgimento. La matrice di Gram della parte omogenea di secondo grado dell'equazione di Q e':

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono 2, -1 e 0. Gli autospazi corrispondenti sono generati, rispettivamente, dai vettori $(2,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(0,1,-1)$. Posto

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

il cambiamento ortonormale delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ porta l'equazione di Q nella forma

$$2x'^2 - y'^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \right) = 0.$$

Dalla classificazione delle quadriche, sappiamo allora che Q e' un paraboloide iperbolico. Percio' contiene infinite rette, e quindi non puo' essere compatta.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (d). ■

Esercizio 2. *Sia C l'evoluta piana della parabola $y^2 = 16x$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) C soddisfa l'equazione $y^2 = \frac{1}{27}(x-8)^3$.
(b) C soddisfa l'equazione $y^2 = \frac{2}{27}(x-8)^3$.
(c) C soddisfa l'equazione $y^2 = \frac{4}{27}(x-8)^3$.
(d) C soddisfa l'equazione $y^2 = \frac{5}{27}(x-8)^3$.

Svolgimento. La parabola assegnata si puo' rappresentare con la funzione:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2}{16}, t \right).$$

Percio' la famiglia delle rette normali alla parabola e':

$$\frac{t}{8}\left(x - \frac{t^2}{16}\right) + (y - t) = 0.$$

L'evoluta piana della parabola e' l'inviluppo di tale famiglia. L'equazione dell'inviluppo si ottiene eliminando il parametro t nel sistema:

$$\begin{cases} \frac{t}{8}x + y = \frac{t^3}{128} + t \\ \frac{x}{8} = \frac{3t^2}{128} + 1. \end{cases}$$

Poiche' $x = \frac{3t^2}{16} + 8$, allora $y = \frac{-t^3}{64}$, da cui si evince $y^2 = \frac{1}{27}(x-8)^3$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 3. *Sia C la curva rappresentata dalla funzione $\mathbf{x}(t) = (2t + t^2,\, t + t^2,\, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Sia π_t il piano osculatore a C nel punto $\mathbf{x}(t)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) L'equazione di π_t e' $(3t + 3t^3)x - (6t + 3t^2)y + z = t^3$.

(b) L'intersezione $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$ coincide con il punto $(\frac{8}{3},\, \frac{5}{3},\, 0)$.

(c) L'intersezione $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$ coincide con il punto $(\frac{8}{21},\, \frac{1}{7},\, 0)$.

(d) L'intersezione $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$ e' contenuta nel piano passante per i punti $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(1)$ e $\mathbf{x}(2)$.

Svolgimento. L'equazione del piano osculatore e'

$$b_1(x - (2t + t^2)) + b_2(y - (t + t^2)) + b_3(z - t^3) = 0,$$

dove $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ denota il versore binormale. Poiche' il versore binormale e' parallelo al vettore $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)$, e

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = (6t + 6t^2,\, -12t - 6t^2,\, 2),$$

allora l'equazione di π_t e':

$$(6t + 6t^2)(x - (2t + t^2)) + (-12t - 6t^2)(y - (t + t^2)) + 2(z - t^3) = 0,$$

cioe'

$$(3t + 3t^2)x - (6t + 3t^2)y + z = t^3.$$

Per calcolare l'intersezione $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$, si tratta di risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 6x - 9y + z = 1 \\ 18x - 24y + z = 8. \end{cases}$$

Ne consegue che

$$\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2 = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) \right\}.$$

Infine, il piano passante per per i punti $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(1)$ e $\mathbf{x}(2)$ ha equazione:

$$5x - 8y + z = 0.$$

E tale equazione e' soddisfatta dal punto $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$.

In conclusione, le affermazioni vere sono la (b) e la (d). ■

Esercizio 4. *Sia S la quadrica di equazione $x^2+y^2-z^2+1=0$. Si considerino i suoi punti $P_1=(1,0,\sqrt{2})$, $P_2=(-1,0,\sqrt{2})$, $P_3=(1,1,\sqrt{3})$, $P_4=(-1,-1,\sqrt{3})$. Per ciascuno di tali punti P_i, sia $K(P_i)$ il valore della curvatura di Gauss di S in P_i. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

(a) $K(P_1)=\frac{1}{9}$.
(b) $K(P_2)=-\frac{1}{9}$.
(c) $K(P_3)=\frac{1}{81}$.
(d) $K(P_4)=-\frac{1}{81}$.

Svolgimento. La superficie S e' un iperboloide ellittico, percio' e' chiaro che (b) e (d) sono false. Per rispondere alle altre due affermazioni, purtroppo occorre calcolare la curvatura di S. Osserviamo che i punti in questione si trovano nella regione $z>0$, percio' possiamo rappresentare S intorno a tali punti con la carta:

$$(u,v)\in\mathbf{R}^2\to\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v)=(u,v,\sqrt{x^2+y^2+1})\in\mathbf{R}^3.$$

Posto

$$f=f(u,v)=\sqrt{x^2+y^2+1},$$

sappiamo che (confrontare con lo svolgimento delgli esercizi 4 e 5 pp. 90 e 91):

$$K=K(u,v)=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}.$$

Nel nostro caso, si ha:

$$f_u=\frac{u}{f},\quad f_v=\frac{v}{f},\quad f_{uu}=\frac{f^2-u^2}{f^3},\quad f_{uv}=-\frac{uv}{f^3},\quad f_{vv}=\frac{f^2-v^2}{f^3}.$$

Sostituendo in K otteniamo:

$$K=\frac{1}{f^2+u^2+v^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

(nell'ultima uguaglianza si tiene conto del fatto che, su S, si ha $u=x$, $v=y$, e $f^2=z^2$). E' chiaro ora che

$$K(P_1)=\frac{1}{9},\quad\text{e che}\quad K(P_3)=\frac{1}{25}.$$

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (a). ■

Esercizio 5. *Sia S la superficie rappresentata dalla funzione*

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\theta)=(t\cos\theta,\,t\sin\theta,\,(t+1)^3),$$

con $-2<t<0$, e $0<\theta<2\pi$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

(a) S non ha punti planari.
(b) S possiede infiniti punti planari.
(c) In ogni punto P di S, si ha $K(P)\geq 0$.
(d) In ogni punto P di S, si ha $K(P)\leq 0$.

Svolgimento. Il calcolo delle derivate mostra che:

$$L=\frac{6(t+1)}{\sqrt{1+9(t+1)^4}},\quad M=0,\quad N=\frac{3t(t+1)^2}{\sqrt{1+9(t+1)^4}}.$$

Poiche' un punto e' planare se e solo se $L=M=N=0$ in tal punto, ne consegue che tutti i punti di S della forma $\mathbf{x}=\mathbf{x}(-1,\theta)$ sono planari. Inoltre, il segno della curvatura e' dettato dal segno del determinante $LN-M^2$. Nel nostro caso

$$LN-M^2=\frac{18t(t+1)^3}{1+9(t+1)^4}.$$

Tale numero e' negativo per $t=-\frac{1}{2}$, e positivo per $t=-\frac{3}{2}$.

In conclusione, l'unica affermazione vera e' la (b). ■