Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 1,2 e 3.

Esercizio 1. Si consideri la seguente operazione definita sui numeri reali:

$$x \oplus y := x + 2y.$$

Dire se tale operazione possiede un elemento neutro (cioe' se e' vero che esiste un numero e tale che $x \oplus e = e \oplus x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$) , se e' associativa (cioe' se e' vero che per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$ si ha $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$), e se e' commutativa (cioe' se e' vero che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha $x \oplus y = y \oplus x$).

Esercizio 2. Calcolare le componenti del vettore numerico $\mathbf{u} := 3(1, 2, -3, 0) - 2(1, 0, 7, -5) - (0, 0, 0, 1)$.

Esercizio 3. Calcolare le componenti della matrice $A := 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 4. Calcolare i coefficienti del polinomio $p(t) := 3(1 + 2t - 3t^2) - 2(1 + 7t^2 - 5t^3) - t^3$.

Esercizio 5. Stabilire se il sottoinsieme $X := \{(x, y) \, : \, xy \geq 0\}$ di $\mathbf{R}^2$ è oppure no un sottospazio.

Esercizio 6. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$. Stabilire se il vettore $(2, 2, -4)$ appartiene o non ad U.

Esercizio 7. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale. Si considerino i vettori $\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{t} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Provare che $Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}) = Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\})$.

Esercizio 8. Sia V l'insieme di tutte le coppie di numeri reali. Si definisca la somma " $+$ " in V come in $\mathbf{R}^2$, e la moltiplicazione esterna " $\cdot$ " al seguente modo: $a \cdot (x_1, x_2) := (ax_2, ax_1)$. Dire se V, con le operazioni appena definite, è uno spazio vettoriale, oppure no.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale $\neq \{\mathbf{0}\}$. Provare che V e' infinito.

Esercizio 10. Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie (x_1, x_2) tali che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Dire quali delle condizioni richieste ad un sottospazio sono soddisfatte da X. Dedurne che X è, oppure non è, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 11. Provare che $Span((1, 0, 1), (2, 1, 0)) = Span((4, 1, 2), (4, 2, 0))$.

Esercizio 12. Siano U e W sottospazi di uno spazio V. Provare che $U \cup W$ e' ancora un sottospazio di V se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

Esercizio 13. Dire in quanti modi il vettore $(5, 10)$ si puo' esprimere come combinazione lineare dei vettori dell'insieme $S := \{(1, 2), (2, 4)\}$. Rispondere alla stessa domanda con $S := \{(1, 4), (1, 5)\}$, $S := \{(1, 3)\}$, $S := \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

Esercizio 14. Dire se il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ formato dai vettori (x, y, z, t) tali che $x + y + 2z - t = 0$ e' oppure no un sottospazio.

Esercizio 15. Dire se il sottoinsieme dello spazio delle matrici 2×2 formato dalle matrici $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ tali che $x + y + 2z - t = 0$ e' oppure no un sottospazio.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 4,5 e 6.

Esercizio 1. Sia $\mathbf{R}_{>0}$ l'insieme dei numeri reali > 0. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ ed ogni $c \in \mathbf{R}$ poniamo:

$$x \oplus y := x \cdot y, \qquad c \odot x := x^c.$$

Dimostrare che con queste operazioni $\mathbf{R}_{>0}$ e' uno spazio vettoriale.

Esercizio 2. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1), (1,1,1,2), (0,0,0,1), (3,3,3,4)$. Determinare una base di W e calcolare la dimensione di W.

Esercizio 3. Calcolare una base e la dimensione per il sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ definito ponendo $W := Span(11\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$.

Esercizio 4. Al variare del parametro k, calcolare una base e la dimensione per il sottospazio W_k di $\mathbf{R}^3$ definito ponendo $W_k := Span((1,1,1), (1,1,k-2), (0,1,1))$.

Esercizio 5. Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori (x, y, z, t) tali che $x + y + z + t = 0$. Provare che W e' un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e calcolarne una base e la dimensione.

Esercizio 6. Sia W il sottoinsieme dello spazio delle matrici $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ tali che $x + y + z + t = 0$. Provare che W e' un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$ e calcolarne una base e la dimensione.

Esercizio 7. Nello spazio $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 si consideri il sottoinsieme W formato dai polinomi $p(t) \in \mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ tali che $p(2) = 0$. Provare che W e' un sottospazio, determinarne una base, e calcolarne la dimensione.

Esercizio 8. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Provare che il sistema $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e' libero se e solo se e' libero il sistema $\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Esercizio 9. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori di uno spazio vettoriale V. Provare che il sistema $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - 2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e' legato.

Esercizio 10. Siano $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_h$ vettori in uno spazio vettoriale V. Provare che $\mathbf{u}_i$ e' sovrabbondante per il sistema $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_h$ se e solo se esiste una relazione $\mathbf{r} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_h)$ per $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_h$ con $a_i \neq 0$.

Esercizio 11. Siano O, P, Q, R punti nello spazio. Provare che i vettori geometrici $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ sono legati se e solo se O, P, Q, R sono complanari.

Esercizio 12. In uno spazio vettoriale si considerino due sistemi di vettori S e T, entrambi linearmente indipendenti. E' vero che anche $S \cup T$ e' linearmente indipendente ? Rispondere alla stessa domanda per $S \cap T$.

Esercizio 13. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Provare che $U \cap W$ e' un sottospazio di V. Provare che $U \cup W$ potrebbe non essere un sottospazio di V.

Esercizio 14. Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^3$ definiti ponendo $U := Span((1,-2,1), (-3,0,1))$ e $V := Span((1,1,1), (0,1,2))$. Calcolare una base e la dimensione di $U \cap V$.

Esercizio 15. Si considerino i seguenti vettori $(1,-2,1)$, $(0,1,3)$ linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^3$. Aggiungere a tali vettori un vettore in modo da formare una base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 7,8 e 9.

Esercizio 1. Provare che i vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi $U := Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2))$ e $V := Span((1, 8, 11, 16))$ di $\mathbf{R}^4$. Calcolare $\dim U$, $\dim V$, $\dim(U + V)$ e $\dim(U \cap V)$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

$$U := Span((-5, 1, 1), (1, -2, 1), (-3, 0, 1)), \quad V := Span((1, 1, 1), (-5, -2, 1), (0, 1, 2)).$$

Calcolare la dimensione ed una base di $U \cap V$. Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = U + V$ e se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 4. Sia U il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2, 2)$ costituito dalle matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $a = -c$ e $b = -2a$. Dimostrare che U e' un sottospazio di $\mathcal{M}(2, 2)$, e calcolarne una base. Infine determinare un sottospazio W di $\mathcal{M}(2, 2)$ tale che $\mathcal{M}(2, 2) = U \oplus W$.

Esercizio 5. Provare che due sottospazi di $\mathbf{R}^7$ aventi dimensione 4 hanno in comune qualche vettore non nullo.

Esercizio 6. Calcolare una base per il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori (x, y, z, t) tali che:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 7. Estendere a base di $\mathbf{R}^5$ il sistema di vettori $\mathcal{S} := \{(0, 0, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 2, 0, 1, 0)\}$.

Esercizio 8. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ i vettori calcolati nell'esercizio precedente. Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^5 = Span(\mathcal{S}) \oplus Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 10,11 e 12.

Esercizio 1. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$, ed $\mathbf{e}_j$ il j-esimo vettore canonico di $\mathcal{M}(n,1)$ ($\mathbf{e}_j$ quindi e' il j-esimo vettore canonico di $\mathbf{R}^n$ disposto in colonna). Provare che

$$A \cdot \mathbf{e}_j = A^j$$

cioe' che $A \cdot \mathbf{e}_j$ produce la j-esima colonna di A.

Esercizio 2. Con le notazioni dell'esercizio precedente, sia $\mathbf{e}_i$ l'i-esimo vettore canonico di $\mathcal{M}(m,1)$. Provare che

$$\mathbf{e}_i^T \cdot A \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}$$

(adesso $\mathbf{e}_i^T$ e' l'i-esimo vettore canonico di $\mathbf{R}^m$).

Esercizio 3. Fare un esempio di due matrici A e B 2×2 entrambe non nulle tali che $A \cdot B = \mathbf{0}$.

Esercizio 4. Fare un esempio di una matrice A 2×2 non nulla tale che $A^2 = \mathbf{0}$.

Esercizio 5. Sia $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ una matrice 2×2 diagonale. Provare che se $\lambda = \mu$ allora $A = \lambda \cdot I$.

Esercizio 6. Sia $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ una matrice 2×2 diagonale. Provare che $AB = BA$ per ogni $B \in \mathcal{M}(2,2)$ se e solo se $\lambda = \mu$.

Esercizio 7. Fare un esempio di due matrici A e B equivalenti per righe con spazi delle colonne diversi.

Esercizio 8. Al variare del parametro k calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -5-k & -1 & 5 \\ -9 & -3-k & 11 \\ -5 & -1 & 5-k \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9. Al variare del parametro k calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} k-5 & -2 \\ 3 & k \end{bmatrix}.$$

Esercizio 10. Al variare dei parametri h, k stabilire quando i vettori (k,k,h), (k,h,k), (h,k,k) formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 11. Al variare del parametro k si considerino le seguenti matrici A_k e B_k:

$$A_k = \begin{bmatrix} 3 & k & k+9 & k+6 \\ 2 & k+1 & k+7 & k+5 \\ 1 & k+2 & k+5 & k+4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 3 & k & k+9 & k+6 & k+4 \\ 2 & k+1 & k+7 & k+5 & k+3 \\ 1 & k+2 & k+5 & k+4 & k+2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dire per quali valori di k il rango di A_k coincide con il rango di B_k.

Esercizio 12. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,0,-1)$ e $(0,1,-1)$. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $x + y - z = 0$. Determinare una base per $U \cap V$.

Esercizio 13. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,0,-1)$. Calcolare un sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ tale che $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Esercizio 14. Sia U il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici A tali che $A^T = A$, e sia V il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici A tali che $A^T = -A$. Provare che U e V sono sottospazi di $\mathcal{M}(2,2)$ e che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus V$

Esercizio 15. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(-1,-7,7,7)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare: $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U+V$ e $U \cap V$. Poi determinare sottospazi X, Y e Z di $\mathbf{R}^4$ tali che: $U + V = U \oplus X$, $\mathbf{R}^4 = U \oplus Y$, e $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus Z$. Dire se il sottospazio X può essere determinato in modo tale che $dim(X) = 2$.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 13,14 e 15.

Esercizio 1. Calcolare l'inversa della seguente matrice A, e verificare che il risultato è corretto.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calcolare il rango di A con ciascuno dei seguenti metodi: 1) determinando le relazioni tra le righe, 2) con le operazioni elementari, e 3) con il Teorema degli Orlati.

Esercizio 4. Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ utilizzando sia il metodo dell'aggiunta che l'algoritmo di Gauss-Jordan. Svolgere la verifica.

Esercizio 5. Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ utilizzando sia il metodo dell'aggiunta che l'algoritmo di Gauss-Jordan. Svolgere la verifica.

Esercizio 6. Sia A una matrice $n \times n$. Provare che $\det(cA) = c^n \det(A)$.

Esercizio 7. Dedurre dall'esercizio precedente che se n e' dispari e $A = -A^T$ allora $\det(A) = 0$.

Esercizio 8. Sia A una matrice quadrata con componenti intere. Provare che $\det(A)$ e' un intero.

Esercizio 9. Sia A una matrice con componenti intere, invertibile. Provare che anche A^{-1} ha componenti tutte intere se e solo se $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Esercizio 10. Risolvere il seguente sistema lineare di Cramer utilzzando le operazioni elementari, e poi utilzzando la regola di Cramer:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 6 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 11. Al variare del parametro k detrminare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}_k)$ del seguente sistema lineare

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + y - kz = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 12. Al variare del parametro k detrminare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}_k)$ del seguente sistema lineare

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2kx + (k+2)y + (k+4)z = k + 5 \\ kx + (k+1)y + 2z = 3 \\ kx + y + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 13. Fare un esempio di sistema lineare nelle incognite x, y, z, t di rango 2 tale che z, t non siano variabili libere.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 16 e 17.

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,1,-1,0)$, $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana: $\begin{cases} 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per U, V, e $U+V$.
c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.
d) Determinare sottospazi X, Y, Z e W di $\mathbf{R}^4$ tali che: $\mathbf{R}^4 = U \oplus X$, $U+V = U \oplus Y$, $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus Z$, e $\mathbf{R}^4 = (U \cap V) \oplus W$.
e) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = Span((1,-2,-1,h),(h,-2,-1,1))$. Calcolare la dimensione di W_h, e determinare i valori di h per cui si ha $W_h \subseteq V$, $W_h = V$, e $W_h \neq V$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 61.

Esercizio 2. Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x,y,z,t:

$$\begin{cases} x-y+z+(\lambda^2-2)t=\lambda \\ -x+y-z+\lambda^2 t=\lambda+2 \\ x-y+(\lambda+2)z=1 \\ x-y+z-t=-1. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_λ e della matrice completa B_λ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.
b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente ridotto a scala, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.
c) Dire per quali valori di λ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer.
d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.
e) Dire per quali valori di λ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 62.

Esercizio 3. Si considerino le basi di $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} := \{(2,1),(5,3)\}$ e $\mathcal{C} := \{(-1,3),(-1,2)\}$. Calcolare la matrice del cambiamento delle coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Al variare del parametro $p \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x+y=1 \\ x+py=p+1. \end{cases}$$

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 4.

Esercizio 5. Calcolare le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,-1,2),(1,1,0),(0,0,2)\}$ di $\mathbf{R}^3$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 2.

Esercizio 6. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ generato dai polinomi $p(t) = 2+6t+t^2+t^3$, $q(t) = 4+12t+2t^2+t^3$, $r(t) = 6+18t+3t^2+2t^3$. Calcolare una base di U, e determinare un sottospazio W di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ tale che $\mathbf{R}[t]_{\leq 3} = U \oplus W$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 72.

Esercizio 7. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

$$U := Span((-5,1,1),(1,-2,1),(-3,0,1)) \quad e \quad V := Span((1,1,1),(-5,-2,1),(0,1,2)).$$

Calcolare la dimensione, una base ed una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 75.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 18, 19 e 20.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base di uno spazio V, $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$ la base ottenuta scambiando $\mathbf{b}_1$ con $\mathbf{b}_2$, ed $f : V \to V$ un operatore lineare. Che differenza c'e' tra $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$?

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{b}_1 := \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}_2 := \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 := \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare tale che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare l'espressione esplicita di f in termini delle coordinate canoniche. Calcolare il vettore $f(7, 1, -2)$.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathcal{B} := \{e_1 + e_3,\ e_2 - e_4\}$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(e_1 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2 - e_4) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 2e_4$. Calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Esercizio 4. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo $g(1, 0) = (1, 0, -1, 1)$ e $g(0, 1) = (0, 1, -1, 2)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(x, y, z) = (x+y, x-z)$. Calcolare $(g \circ f)(1, 2, 3)$. Calcolare la matrice di $g \circ f$ rispetto alle basi canoniche.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 7.

Esercizio 5. L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni: $f(1, 2, 2) = (0, 10, 0)$, $f(1, -1, 0) = (-12, -5, -36)$, $f(1, 1, 1) = (-6, 5, -18)$. Qual è la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$?

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 15.

Esercizio 6. Il vettore $\mathbf{u}$ ha coordinate $(1, 1)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(4, 1), (3, 1)\}$. Calcolare le coordinate $[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}}$ di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{C} := \{(7, 1), (6, 1)\}$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 6.

Esercizio 7. Si considerino le basi di $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} := \{(2, 1), (5, 3)\}$ e $\mathcal{C} := \{(-1, 3), (-1, 2)\}$. Calcolare la matrice del cambiamento delle coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 4.

Esercizio 8. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 3)$, e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che trasforma il vettore $(1, 0, 0)$ in $(4, -2, 0)$, il vettore $(0, 1, 2)$ in $(10, -5, -2)$, ed il vettore $(0, 1, 3)$ in $(10, -5, -3)$. Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. Infine rappresentare f in termini delle coordinate canoniche.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 62.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo:

$$f(x, y, z) = (-4x + 4y + z, -9x + 9y + z, -4x + 4y + z).$$

Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e con $\mathcal{B}$ la base formata dai vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f)$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 67.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione tale che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$. Rappresentare l'applicazione f in termini delle coordinate canoniche.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 70.

Esercizio 11. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare omogeneo

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x + y - z - t = 0 \\ z + t = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Sia $\mathbf{R}^2 \to U$ la rappresentazione parametrica di U ottenuta dal sistema (1), e sia $\mathcal{B}$ la base di U corrispondente alla base canonica di $\mathbf{R}^2$. Provare che l'applicazione inversa $U \to \mathbf{R}^2$ e' l'applicazione delle coordinate di U rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 21, 22 e 23.

Esercizio 1. Calcolare il polinomio caratteristico di un operatore del tipo $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, con

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Esercizio 2. Calcolare il polinomio caratteristico dell' operatore $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, con

$$f(x, y, z, t) = (-x, -y, z, t).$$

Esercizio 3. Dire se le seguenti matrici sono simili oppure no:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4. Il polinomio caratteristico di un operatore f, calcolato utilizzando le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, e' il seguente:

$$p_f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Che relazione c'e' tra il coefficiente a_0 e la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$?

Esercizio 5. Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 5, 3)$, e sia f l'operatore di $\mathbf{R}^3$ che al vettore di coordinate (x_1', x_2', x_3') rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa il vettore di coordinate $(x_1' + x_3', x_2', x_1' + x_2')$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 77.

Esercizio 6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare il polinomio caratteristico di f utilizzando prima la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e poi la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, e verificare che il polinomio non cambia.

Esercizio 7. L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni:

$$f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = (1, 0, 0) \quad \text{ed} \quad f(1, 0, 2) = (0, 1, 0).$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 79.

Esercizio 8. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo

$$f(x, y, z) := (6x - 2y - 4z, 8x - 4y - 4z, 8x - 2y - 6z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, ed una base per $Im(f)$. Infine calcolare il polinomio caratteristico di f.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 80.

Esercizio 9. L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo rappresentato dall'equazione $x - y + 5z = 0$ e soddisfa la condizione $f(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$. Infine dire se esiste un operatore $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $Ker(f) = Ker(g)$ e tale che $g(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 81.

Esercizio 10. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,3,2),(0,2,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$. Calcolare una base del nucleo di f, una base dell'immagine, ed il polinomio caratteristico.

Esercizio 11. Sia A una matrice $n \times n$. Provare che A e' diagonalizzabile (cioe' esiste una matrice invertibile P tale che $D := P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale) se e solo se l'operatore $f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \to A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e' diagonalizzabile (cioe' esiste una base $\mathcal{A}$ tale che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale).

Esercizio 12. Sia A una matrice invertibile. Provare che $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, cioe' che

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

Esercizio 13. Sia $\mathcal{V}_{O,\pi}$ lo spazio dei vettori geometrici applicati nel punto O giacenti nel piano π. Sia $f : \mathcal{V}_{O,\pi} \to \mathcal{V}_{O,\pi}$ l'operatore di rotazione di angolo 30^0 in senso antiorario. Dire se f ammette oppure no autovettori.

Esercizio 14. Sia $\mathcal{V}_{O,\pi}$ lo spazio dei vettori geometrici applicati nel punto O giacenti nel piano π, ed $f : \mathcal{V}_{O,\pi} \to \mathcal{V}_{O,\pi}$ l'operatore di riflessione di asse la retta r. Dire se f ammette oppure no autovettori.

Esercizio 15. Sia $\mathcal{V}_{O,\pi}$ lo spazio dei vettori geometrici applicati nel punto O giacenti nel piano π, ed $f : \mathcal{V}_{O,\pi} \to \mathcal{V}_{O,\pi}$ l'operatore di proiezione ortogonale sulla retta r. Dire se f ammette oppure no autovettori.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 24, 25 e 26.

Esercizio 1. Provare che una matrice simmetrica $G \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}(2,2)$ e' diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.

Suggerimento. Calcolare il polinomio caratteristico, che e' un polinomio di secondo grado, ed esaminarne il segno del discriminante.

Esercizio 2. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

a) se f possiede $\dim(V)$ autovalori distinti allora e' diagonalizzabile;

b) se f e' diagonalizzabile allora possiede $\dim(V)$ autovalori distinti;

c) se f e' diagonalizzabile allora V e' la somma diretta dei suoi autospazi;

d) se V e' la somma diretta dei suoi autospazi allora f e' diagonalizzabile;

e) se V e' la somma dei suoi autospazi allora f e' diagonalizzabile.

Esercizio 3. Siano λ e μ autovalori distinti di un operatore f. Sia $\mathbf{u}$ un autovettore relativo a λ, e $\mathbf{v}$ un autovettore relativo a μ. Provare che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti.

Suggerimento. Sia $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *una relazione. Applicando* f *si ottiene* $a\lambda\mathbf{u} + b\mu\mathbf{v} = \mathbf{0}$. *Sommando a questa la relazione precedente moltiplicata per* $-\lambda$ *si ottiene ...*

Esercizio 4. Sia $p(t) = t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ un polinomio di grado 4. Provare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico uguale a $p(t)$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo

$$f(x, y, z) = (2x, -5y, 9z).$$

Provare che f e' diagonalizzabile, trovare una base $\mathcal{A}$ di autovettori per f, ed una matrice invertibile P tale che $PM_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)P^{-1}$ coincida con $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ ($\mathcal{E}$ denota la base canonica).

Esercizio 6. Preparare un esercizio per il quale si chiede di diagonalizzare una matrice A 2×2, non diagonale, con polinomio caratteristico $p(t) = t^2 - 5t + 6$.

Esercizio 7. Siano A e B matrici $n \times n$, ed A sia invertibile. Provare che AB e BA hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Suggerimento: provare che AB *e* BA *sono simili.*

Esercizio 8. Sia A una matrice 2×2, e sia $p_A(t) = t^2 + \alpha t + \beta$ il suo polinomio caratteristico. Provare che $A^2 + \alpha A + \beta I = \mathbf{0}$.

Esercizio 9. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $e_1 - 2e_2$, $e_1 + e_3$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(e_1 - 2e_2) = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $f(e_1 + e_3) = 6e_1 - 4e_2 + 4e_3$. Posto $\mathcal{B} = \{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$, calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Rappresentare f in termini delle coordinate x, y rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare una base per il nucleo di f.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 5.

Esercizio 10. Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 7.

Esercizio 11. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da $e_1 + e_3$, $e_2 - e_4$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(e_1 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2 - e_4) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 2e_4$. Determinare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$. Determinare una base di autovettori per f.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 7.

Esercizio 12. Stabilire se l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (2x + y, 2y + z, 2z)$, è diagonalizzabile oppure no.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 7.

Esercizio 13. Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 7.

Esercizio 14. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente come base $\mathcal{B} := \{e_1 + e_2 + e_3,\, e_1 + e_2 - e_4\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di V definito ponendo $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_3 + e_4$ e $f(e_1 + e_2 - e_4) = 2(e_3 + e_4)$. Calcolare una base di V costituita da autovettori per f.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 8.

Esercizio 15. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito ponendo: $f(3, 1, 0) = (3, 5, 0)$, $f(2, 1, 0) = (2, 4, 0)$, $f(0, 0, 1) = (0, -1, 1)$. Stabilire se f è, oppure no, diagonalizzabile.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 9.

Esercizio 16. Quali sono i valori del parametro k per cui la seguente matrice A_k non è diagonalizzabile?

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & k-3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 14.

Esercizio 17. Sia V lo spazio delle matrici 2×2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione che ad ogni matrice $M \in V$ associa

$$f(M) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot M.$$

Provare che f è lineare. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dire se f è, oppure no, diagonalizzabile.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 14.

Esercizio 18. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo

$$f(x, y, z) := (6x - 2y - 4z, 8x - 4y - 4z, 8x - 2y - 6z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di f. Infine determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 80.

Esercizio 19. Dire per quali valori del parametro k la matrice

$$A(k) := \begin{bmatrix} 3k + 7 & -k - 3 \\ 9k + 27 & -3k - 11 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Per lo svolgimento vedere le dispense EserciziSvolti a pag. 80.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 27, 28 e 29.

Esercizio 1. Determinare la forma canonica di Jordan ed una base a stringhe per l'operatore

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3x_1 + x_2, -3x_2, 4x_3 + x_4, 4x_4 + x_5, 4x_5).$$

Suggerimento. L'esercizio e' molto facile: riflettere su come si presenta la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.

Esercizio 2. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_A(t) = t^4$. Calcolare la forma canonica di Jordan di A senza calcolare una base a stringhe.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare una matrice invertibile P tale che la matrice $J = P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale a blocchi di Jordan.

Esercizio 4. Un operatore f non e' diagonalizzabile ed ha polinomio caratteristico $p(t) = -t(t-2)^2$. Qual e' la sua forma canonica di Jordan?

Esercizio 5. Determinare la forma canonica di Jordan ed una base a stringhe per l'operatore

$$f(x, y, z) = (0, 5x, 2x).$$

Esercizio 6. Quali sono le possibili forme canoniche di Jordan per una matrice 4×4, non diagonalizzabile, avente polinomio caratteristico $p(t) = t^2(t-2)^2$?

Esercizio 7. Una matrice nilpotente A 6×6 ha rango 2 ed indice di nilpotenza 2. Qual e' la forma canonica di Jordan di A?

Esercizio 8. Determinare la forma canonica di Jordan ed una base a stringhe per i seguenti operatori:

$f(x, y, z) = (y, 3x + z, -3y)$;

$f(x, y, z) = (2x - y - z, 3x - 2y - z, 4x - 2y - 2z)$;

$f(x, y, z) = (-2x + 2y + z, -3x + 3y + z, -2x + y + 2z)$;

$f(x, y, z) = (-2x + y + z, -2y + z, -2z)$;

$f(x, y, z) = (-x - z, x + z, 2x + y + z)$;

$f(x, y, z) = (-2x - y + 3z, -2y + z, z)$.

$f(x, y, z) = (-4x + 12y + 4z, -4x + 10y + 3z, 4x - 8y - 2z)$.

Verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

Esercizio 9. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{b}_1 = (1, 3, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo $f(\mathbf{b}_1) = 8\mathbf{b}_1 - 15\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$, $f(\mathbf{b}_2) = 6\mathbf{b}_1 - 11\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$, $f(\mathbf{b}_3) = 2\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

a) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

b) Calcolare la forma canonica di f.

c) Calcolare una base a stringhe per f.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 30 e 31.

Esercizio 1. Siano A e B matrici quadrate $n \times n$, tali che $A^2 = A$ e $B^2 = B$. Provare che A e' simile a B se e solo se A e B hanno lo stesso rango.

Esercizio 2. Siano A e B matrici simili. Provare che per ogni $h \in \mathbf{N}$, A^h e B^h hanno lo stesso rango.

Esercizio 3. Siano A e B matrici $n \times n$, nilpotenti. Provare che A e B sono simili se e solo se A^h e B^h hanno lo stesso rango per ogni $h \in \mathbf{N}$. E' necessario supporre che siano nilpotenti?

Esercizio 4. Un operatore f ha polinomio caratteristico $p_f(t) = (t-3)^4(t-1)^2(t^2-4)$. Sapendo che gli autovettori di f generano uno spazio di dimensione 5, determinare tutte le possibili forme canoniche per f.

Esercizio 5. Un operatore f ha polinomio caratteristico $p_f(t) = [(t-2)(t-5)(t-4)]^3$. Sapendo che gli autovettori di f generano uno spazio di dimensione 4, determinare tutte le possibili forme canoniche per f.

Esercizio 6. Quali sono le possibili forme canoniche per una matrice non diagonalizzabile, avente come polinomio caratteristico $p(t) = t^2(t-2)^2$?

Esercizio 7. La matrice A ha un unico autovalore λ. Sapendo che A è 10×10, che $rk(A - \lambda I) = 5$ e che $rk(A - \lambda I)^4 = 2$, determinarne la forma canonica di Jordan J_A, il polinomio caratteristico $p_A(t)$, ed il polinomio minimo $m_A(t)$.

Esercizio 8. Lo spettro di una data matrice A è costituito da un solo autovalore λ. Sapendo che A è 10×10, che $rk(A - \lambda I) = 6$, che $rk(A - \lambda I)^2 = 3$, e che $rk(A - \lambda I)^3 = 2$, determinare la forma canonica di A, il suo polinomio caratteristico, ed il suo polinomio minimo.

Esercizio 9. Di una matrice A si sa che non è diagonalizzabile, e che il suo polinomio caratteristico è $p_A(t) = -t(t-2)^2(t+2)^2$. Calcolare tutte le possibilità per il polinomio minimo di A, e per la forma canonica.

Esercizio 10. Di una matrice A, $n \times n$, si sa che ha rango 3, che non è diagonalizzabile, e che soddisfa l'equazione $A^3 = 4A^2$. Calcolare tutte le possibilità per il polinomio minimo di A, per il polinomio caratteristico e per la forma canonica.

Esercizio 11. Un operatore lineare f, definito su uno spazio V di dimensione 10, ha lo spettro costituito da un unico autovalore λ. Sapendo che $f - \lambda id_V$ ha indice di nilpotenza 4, che il rango di $f - \lambda id_V$ è 6, e che il rango di $(f - \lambda id_V)^2$ è 3, calcolare la forma canonica di f, il polinomio caratteristico, ed il polinomio minimo.

Esercizio 12. Lo spettro di una data matrice A è costituito da un solo autovalore λ. Sapendo che A è 11×11, che $rk(A - \lambda I) = 6$, che $rk(A - \lambda I)^2 = 3$, che $rk(A - \lambda I)^3 = 2$, e che $rk(A - \lambda I)^4 = 1$, determinare la forma canonica di A, il suo polinomio caratteristico, ed il suo polinomio minimo.

Esercizio 13. Determinare la forma canonica di una matrice A, 10×10, che ha polinomio minimo $m_A(t) = (t - \lambda)^5$, ed e' tale che $rk(A - \lambda I) = 5$.

Esercizio 14. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Provare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $A^{n+2} - A^{n+1} = 2A^n$.

Suggerimento: usare il Teorema di Cayley-Hamilton.

Esercizio 15. Di una matrice A, 21×21, si sa che e' nilpotente con indice 5, e che $rk(A) = 12$, $rk(A^2) = 6$, $rk(A^3) = 4$ e $rk(A^4) = 2$. Calcolare la forma canonica di A, il polinomio caratteristico, ed il polinomio minimo.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 32, 33 e 34.

Esercizio 1. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 0 \\ \dot{x}_5 = 3x_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \\ x_3(0) = 1 \\ x_4(0) = -1 \\ x_5(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = 5x_3 \\ \dot{x}_4 = -4x_4 + x_5 \\ \dot{x}_5 = -4x_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = -1 \\ x_3(0) = 1 \\ x_4(0) = -1 \\ x_5(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6. Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = -\frac{1}{9} \\ x_2(0) = \frac{1}{3} \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 7. Utilizzando la Trasformata di Laplace risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -2. \end{cases}$$

Esercizio 8. Utilizzando la Trasformata di Laplace risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9. Utilizzando la Trasformata di Laplace risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 10. Utilizzando sia l'esponenziale di una matrice sia la Trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 11. Decomporre in fratti semplici la funzione razionale

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+4)^2}.$$

Esercizio 12. Calcolare l'esponenziale della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} t$$

Esercizio 13. La matrice dei coefficienti A dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ha ordine n ed ha autovalori reali tutti ≤ 0. Sia $\mathbf{y}(t)$ una soluzione dell'equazione. Calcolare

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathbf{y}(t)}{t^n}.$$

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 35, 36 e 37.

Esercizio 1. Sia $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo $q(x,y) := x^2 + 6xy + y^2$. Calcolare $\phi((1,2),(-1,4))$, dove ϕ e' la forma bilineare simmetrica ottenuta polarizzando q.

Esercizio 2. La matrice di Gram della forma bilineare simmetrica $\phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,0,2),(0,1,0),(1,0,3)\}$ e':

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scrivere l'espressione esplicita di ϕ e di q rispetto alla base $\mathcal{B}$, rispetto alla base canonica, e rispetto alla base $\mathcal{C} := \{(1,0,3),(0,1,0),(1,0,2)\}$. Infine calcolare $\phi((1,2,5),(-1,4,1))$ in almeno tre modi diversi.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile P tale che la matrice P^TGP sia diagonale.

Esercizio 4. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$ associata alla forma quadratica

$$q(x,y,z) := x^2 + 4xy - 4xz + 2y^2 - 8yz + 4z^2.$$

Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e $\mathcal{B}$ la base formata dai vettori $(1,1,1),(1,0,0),(1,-1,0)$. Verififcare che le matrici di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ e $G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ sono congruenti. Poi calcolare rango, indice, segnatura ed una base ortogonale per ϕ.

Esercizio 5. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$ definita ponendo

$$\phi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) := x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_1y_3 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - 4x_2y_3 + 2x_3y_1 - 4x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

Calcolare rango, indice e segnatura di ϕ, ed una base ortogonale per ϕ.

Esercizio 6. Sia $\phi : \mathbf{R}[t]_{\leq 3} \times \mathbf{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbf{R}$ la funzione definita ponendo

$$\phi(p(t),q(t)) := \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Provare che ϕ e' una forma bilineare simmetrica. Poi calcolarne la matrice di Gram rispetto alla base canonica $1,t,t^2,t^3$, l'espressione esplicita di ϕ e di q, rango, indice e segnatura, ed una base ortogonale.

Esercizio 7. Sia A una matrice $m \times n$. Provare che A^TA e AA^T sono quadrate e simmetriche.

Esercizio 8. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera.

(1) Se A e B sono matrici congruenti allora sono simili.

(2) Se A e B sono matrici simili e simmetriche allora sono congruenti.

Esercizio 9. Dimostrare che due matrici quadrate diagonali dello stesso ordine tali che le loro diagonali differiscano solo per l'ordine con cui appaiono le componenti, sono sia simili che congruenti.

Esercizio 10. Una matrice A si dice *antisimmetrica* se $A^T = -A$. Provare che ogni matrice quadrata M si puo' scrivere in unico modo come la somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

Suggerimento: si osservi che $M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Esercizio 11. Sia $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita ponendo

$$\phi((a,b),(c,d)) := \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Dire se ϕ e' oppure no una forma bilineare simmetrica.

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 38, 39 e 40.

Esercizio 1. Provare che comunque si assegnino numeri reali x, y, z non tutti nulli si ha:

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 2yz + 3z^2 > 0.$$

Suggerimento: osservare che $q(x, y, z)$ e' una forma quadratica ...

Esercizio 2. Calcolare l'angolo compreso tra i vettori $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$.

Esercizio 3. Dire se le seguenti matrici sono congruenti oppure no:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^2$ munito del prodotto punto calcolare $\|(1, 1)\|$, e la proiezione ortogonale di $(1, -3)$ sul vettore $(1, 1)$.

Esercizio 5. Sia $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo $q(x, y) := x^2+2xy+2y^2$, e sia ϕ la forma bilineare simmetrica ottenuta polarizzando q. Provare che $(\mathbf{R}^2, \phi)$ e' uno spazio euclideo, e calcolarne una base ortonormale. In tale spazio calcolare $\|(1, 1)\|$, e la proiezione ortogonale di $(1, -3)$ sul vettore $(1, 1)$.

Esercizio 6. Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 3z^2.$$

Provare che tale spazio e' euclideo, calcolarne una base ortonormale, e calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{e}_1$ su $\mathbf{e}_2$. Inoltre esprimere il generico vettore (x, y, z) come somma $(x, y, z) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ di un vettore $\mathbf{a}$ parallelo a $(0, 1, 0)$ e di uno $\mathbf{b}$ ortogonale a $(0, 1, 0)$.

Esercizio 7. Si denoti con $p_{(1,-2)}(\mathbf{v})$ la proiezione ortogonale del generico vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^2$ su $(1, -2)$. Provare che l'applicazione $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2 \to p_{(1,-2)}(\mathbf{v}) \in \mathbf{R}^2$ e' lineare, calcolarne la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_{(1,-2)})$ rispetto alla base canonica, e provare che tale operatore e' diagonalizzabile. Dare una interpretazione geometrica degli autovettori.

Esercizio 8. Provare che una matrice G e' simmetrica e definita positiva se e solo se esiste una matrice invertibile P tale che $G = P^T P$.

Suggerimento: se $G > 0$ allora G e' congruente alla matrice I ...

Esercizio 9. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$ definita ponendo

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := x_1y_1 + 3x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2 + 6x_2y_3 + 2x_3y_1 + 6x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

Calcolare rango, indice e segnatura di ϕ, ed una base ortonormale per ϕ.

Esercizio 10. Sia (V, ϕ) uno spazio pseudoeuclideo di dimensione 2, rango 2 ed indice 1. Provare che in tale spazio esiste almeno un vettore non nullo $\mathbf{u}$ tale che $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$. Puo' un vettore siffatto appartenere ad una base ortogonale di (V, ϕ)?

Suggerimento: se $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ e' una base ortonormale allora $q(\mathbf{b}_1) = 1$ e $q(\mathbf{b}_2) = -1$, per cui $q(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ e' uguale a ...

Esercizio 11. Sia (V, ϕ) uno spazio pseudoeuclideo di dimensione 2, rango 2 ed indice 1. Provare che esiste una base $\mathcal{B}$ tale che

$$G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suggerimento: se $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ e' una base ortonormale allora $\{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\}$ ...

Esercizio 12. Provare che in uno spazio euclideo si ha

$$|\ \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\ | \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Suggerimento: poiche' $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$ allora per la diseguaglianza triangolare ...

Esercizi di riepilogo sugli argomenti svolti nelle Lezioni 41, 42 e 43.

Esercizio 1. Si considerino le matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dire se A e B sono congruenti e se sono simili. Rispondere alla stessa domanda per le coppie di matrici B, C e A, C.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U)$ della proiezione ortogonale p_U su U rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Infine dire qual e' lo spettro di p_U, e determinare una base ortonormale di autovettori di p_U.

Esercizio 3. Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma bilineare simmetrica:

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

Calcolare il rango, l'indice e la segnatura di $(\mathbf{R}^3, \phi)$, ed una base ortogonale. Dire se esistono nuove coordinate in $\mathbf{R}^3$ per cui:

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2x_1'y_1' + 4x_1'y_3' + 4x_3'y_1' + 5x_3'y_3'.$$

Esercizio 4. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Calcolare una base ortonormale $\mathcal{B}_1$ di U ed una base ortonormale $\mathcal{B}_2$ di $U^\perp$. Provare che $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$. Calcolare le matrici rappresentative $M := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U)$ ed $N := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p_U)$ dell'operatore di proiezione ortogonale p_U su U, dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Verificare che M ed N sono simmetriche e che $M^2 = M$ e $N^2 = N$.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dal sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Calcolare una base ortonormale per U, ed una per $U^\perp$. Decomporre il vettore il generico vettore $\mathbf{v} := (x, y, z)$ in una componente $p_U(\mathbf{v})$ parallela ad U ed in una $p_{U^\perp}(\mathbf{v})$ parallela ad $U^\perp$.

Esercizio 6. Si considerino le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Giustificando le risposte, dire se è vero oppure no che: 1) A e B sono congruenti; 2) B e C sono congruenti; 3) A e C sono congruenti; 4) A e B sono simili; 5) B e C sono simili; 6) A e C sono simili.

Esercizio 7. Completare la seguente matrice a matrice ortogonale: $\begin{bmatrix} 1/3 & * & * \\ 2/3 & * & * \\ -2/3 & * & * \end{bmatrix}$.

Esercizio 8. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x + y + z = 0$. Calcolare una base ortogonale per U, ed una per $U^\perp$. Decomporre il vettore $\mathbf{x} := (1, 0, 0)$ in una componente $p_U(\mathbf{x})$ parallela ad U ed in una $p_{U^\perp}(\mathbf{x})$ parallela ad $U^\perp$.

Esercizio 9. Sia $(\mathbf{R}^2, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica $q(x, y) = 5x^2 + 22xy + 25y^2$. Provare che tale spazio è euclideo, calcolarne una base ortonormale, e calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1)$ su $(1, 0)$.

Esercizio 10. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,2,-1)$. Calcolare una base ortonormale per U, ed una per $U^\perp$. Decomporre il generico vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ in una componente $p_U(\mathbf{x})$ parallela ad U ed in una $p_{U^\perp}(\mathbf{x})$ parallela ad $U^\perp$. Dire qual è la forma canonica di Jordan dell'operatore di proiezione ortogonale $p_U : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to p_U(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^3$.

Esercizio 11. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori in uno spazio euclideo V. Provare che

1) $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \cos \widehat{\mathbf{uv}}$ (Regola del coseno, o anche Teorema di Pitagora generalizzato);

2) $\|\mathbf{v}+\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \cos \widehat{\mathbf{uv}}$;

3) se $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ allora $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$ (Teorema di Pitagora);

4) $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}+\mathbf{u}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2\right)$ (Proprieta' del Parallelogramma).

Per lo svolgimento vedere l'Esempio 36 del Capitolo 7.

Esercizio 12. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori non nulli di uno spazio euclideo. Provare che $\|\mathbf{v}+\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$ se e solo se i due vettori sono paralleli e concordi.

Suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente e ricordare che $\cos \widehat{\mathbf{uv}} \in \{-1, 1\}$ *se e solo se i due vettori sono paralleli (Osservazione 2 del Capitolo 7).*

Esercizio 13. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori in uno spazio euclideo V. Esprimere $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$ in termini di coordinate ortonormali. Provare che $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Esercizio 14. Siano A e P matrici quadrate dello stesso ordine, con P ortogonale. Provare che se $P^{-1}AP$ e' simmetrica allora anche A lo e'.

Esercizio 15. Determinare una base ortonormale per $U := Span(\{(0,1,1),(1,-2,3)\})$ in $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 16. Sia λ un autovalore reale di una matrice ortogonale P. Provare che $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Suggerimento: se $P\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *allora* $(P\mathbf{x})^T(P\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}^T\mathbf{x}$*; d'altra parte* $(P\mathbf{x})^T(P\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P^T P \mathbf{x} = \ \ldots$

Esercizio 17. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,0,0)$ sul sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana $x + 2y + z = 0$.

Esercizio 18. Provare che la definizione di sottospazio complemento ortogonale si puo' dare in uno spazio pseudoeuclideo qualsiasi. Fare un esempio che mostri che in generale puo' accadere $U \cap U^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.

Esercizio 19. Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dalle equazioni $x+y+z=0, x-y-z=0$. Calcolare una base per $U^\perp$.

Esercizio 20. Dire se e' vero oppure no che *se in uno spazio pseudoeuclideo* (V, ϕ) *c'e' un vettore* $\mathbf{v}$ *non nullo tale che* $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ *allora lo spazio e' degenere (cioe' il rango non e' massimo).*