tvmsscho2012DiFiore

Algebre di matrici

$\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ è un'algebra di matrici se $\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{n\times n}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{L}$) e il prodotto di matrici di $\mathcal{L}$ è ancora una matrice di $\mathcal{L}$ ($A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$).

Vediamo degli esempi di algebre di matrici.

Esempio 1: Algebre di gruppo, matrici circolanti

Sia $G = \{1, 2, \dots, n\}$ un gruppo con elemento identico 1. Si può far corrispondere a G l'insieme di matrici

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ a_{i,j} = a_{ki,kj},\ i, j, k \in G\}.$$

Una prima cosa da osservare è che $\mathcal{L}$ ammette la seguente altra rappresentazione

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ a_{i,j} = a_{1,i^{-1}j},\ i, j \in G\},$$

dalla quale si deduce che una matrice in $\mathcal{L}$ è in particolare univocamente definita dalla sua prima riga, che può essere arbitraria. È evidente quindi che $\mathcal{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{n\times n}$ di dimensione n. Verifichiamo che è chiuso rispetto alla moltiplicazione di matrici. Siano $A, B \in G$ e $i, j, k \in G$. Allora

$$[AB]_{i,j} = \sum_{s\in G} [A]_{i,s}[B]_{s,j} = \sum_{s\in G} [A]_{ki,ks}[B]_{ks,kj} = \sum_{r\in G} [A]_{ki,r}[B]_{r,kj} = [AB]_{ki,kj},$$

il che da' la tesi.

Esercizio. $\mathcal{L}$ è chiuso per inversione ? Cioè, $A \in \mathcal{L}$ non singolare implica $A^{-1} \in \mathcal{L}$?

Vediamo un esempio di algebra di gruppo. Sia G il gruppo ciclico di ordine n, cioè $G = \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \leftrightarrow g^{i-1}$, $i \in G$, dove g è un elemento generatore di G (si noti che $g^n = 1$). Studiamo la struttura dell'algebra di gruppo $\mathcal{L}$ corrispondente.

Per definizione, per l'elemento generico di $A \in \mathcal{L}$ si deve avere

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{1,i^{-1}j} = a_{1,(g^{i-1})^{-1}(g^{j-1})} \\ &= a_{1,g^{n+1-i}g^{j-1}} = \begin{cases} j \geq i:\ a_{1,g^{j-i}} = a_{1,j-i+1} \\ j < i:\ a_{1,g^{n+j-i}} = a_{1,n+j-i+1} \end{cases}. \end{aligned}$$

È evidente che se $j - i$ è costante allora rimane invariato l'elemento (i, j) di A; in altre parole A deve essere una matrice di Toeplitz. Se si investigano più a fondo le uguaglianze ottenute si vede che A è una matrice di Toeplitz definita univocamente dalla sua prima riga e, più precisamente, A ha la seguente struttura:

$$A = \begin{bmatrix} & & & a_{1,k} & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & a_{1,k} \\ a_{1,k} & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & a_{1,k} & & & \end{bmatrix},$$

cioè ha nelle posizioni $(1, k)$, $(2, k+1)$, $\dots$, $(n+1-k, n)$, $(n+2-k, 1)$, $\dots$ $(n, k-1)$ sempre lo stesso elemento $a_{1,k}$. Ad esempio, nel caso $n = 4$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Tali matrici A, dell'algebra di gruppo corrispondente al gruppo ciclico (che in seguito sarà denotata C), sono dette *circolanti*.

Esercizio. Dimostrare che l'algebra di gruppo corrispondente al gruppo ciclico è commutativa, ovvero che due generiche matrici circolanti dello stesso ordine commutano tra loro.

Esercizio. Scrivere la matrice generica dell'algebra di gruppo $\mathcal{L}$ corrispondente al gruppo diedrale G di ordine 6: $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{e, r, r^2, f, fr, fr^2\}$ dove r, f sono tali che $r^3 = f^2 = e$, $rfrf = e$. Osservare che $\mathcal{L}$ non è commutativa.

Esempio 2: Il commutatore di una matrice

Sia X una matrice $n \times n$ a elementi in $\mathbb{C}$. Sia

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}.$$

È semplice mostrare che $\mathcal{L}$ è un'algebra di matrici chiusa per inversione. In generale le matrici di $\mathcal{L}$ non commutano tra loro (si prenda $X = I$).

Esercizio. Sia X la seguente matrice $n \times n$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(gli elementi non scritti si intendono zeri). Sia $C + JC$ l'insieme $\{A + JB : A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} \cap C\}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$.

i) Dimostrare che $C + JC = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}$
ii) Osservare che $C + JC$ non è commutativo
iii) Scrivere la generica matrice dello spazio dei polinomi nella matrice X

Esempio 3: Lo spazio dei polinomi in una matrice

Sia X una matrice $n \times n$ a elementi in $\mathbb{C}$. Dato un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$, con il simbolo $p(X)$ intendiamo la matrice $a_0 I + a_1 X + \ldots + a_k X^k$. Sia

$$\mathcal{L} = \{p(X) : p = \text{polinomi}\}.$$

È semplice mostrare che $\mathcal{L}$ è un'algebra di matrici commutativa la cui dimensione è data dal grado del polinomio minimo di X ed è quindi minore o uguale ad n.

Esercizio. Dimostrare che $\mathcal{L}$ è chiusa per inversione, cioè se $A \in \mathcal{L}$ è non singolare, allora $A^{-1} \in \mathcal{L}$ (suggerimento: utilizzare il teorema di Cailey-Hamilton applicato ad A).

Un'algebra di questo tipo è l'algebra di gruppo C delle matrici circolanti. Dimostriamolo. Sia X la matrice circolante la cui prima riga è il vettore $[0\,1\,0\,\cdots\,0]$. È semplice osservare che la matrice $\sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ è circolante per ogni scelta degli a_k ($\{p(X)\} \subset C$), e che la generica matrice circolante, quella la cui prima riga è il generico vettore $[a_{11}\, a_{12}\, \cdots\, a_{1n}]$, si può scrivere nella forma $\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} X^{k-1}$ ($C \subset \{p(X)\}$).

In altre parole, vale l'uguaglianza $C = \{p(X)\}$.

Esercizio. Studiare l'insieme C_{-1} dei polinomi nella matrice X ottenuta modificando il valore dell'elemento $(n, 1)$ della circolante con prima riga $[0\,1\,0\,\cdots\,0]$ da 1 a -1. C_{-1} è noto come lo spazio delle matrici (-1)-circolanti.

Teorema: relazione tra il commutatore di X e lo spazio dei polinomi in X

Sia X una matrice $n \times n$ a elementi in $\mathbb{C}$. Allora $\{p(X)\} \subset \{A : AX = XA\}$ e $\dim\{p(X)\} \leq n \leq \dim\{A : AX = XA\}$. Inoltre, gli spazi $\{p(X)\}$ e $\{A : AX = XA\}$ coincidono se e solo se $\dim\{p(X)\} = n$ se e solo se $\dim\{A : AX = XA\} = n$, in tal caso X si dice *non derogatoria*.

Ci sono diverse condizioni equivalenti per la non derogatorietà di una matrice X. Ad esempio, una matrice è non derogatoria se e solo se ad ogni suo autovalore corrisponde un solo blocco di Jordan (ovvero, i polinomi minimo e caratteristico di X coincidono). Inoltre, ogni qual volta si ha

$$p(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \deg p \geq n,$$

la matrice X è non derogatoria.

Esempio 4: Le matrici triangolari di Toeplitz

Sia Z la seguente matrice *lower-shift* $n \times n$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed $\mathcal{L}$ lo spazio delle matrici che commutano con Z. Studiamo nei dettagli tale spazio, che ovviamente è anche un'algebra. Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ generica. Allora

$$AZ = \begin{bmatrix} a_{12} & \cdot & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdot & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}, \quad ZA = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \end{bmatrix}.$$

Imponendo l'uguaglianza di AZ con ZA si ottengono le condizioni $a_{12} = a_{13} = \ldots a_{1n} = a_{2n} = \ldots a_{n-1n} = 0$ e $a_{i,j+1} = a_{i-1,j}$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, dalle quali si deduce la struttura di $A \in \mathcal{L}$: A deve essere una matrice triangolare inferiore di Toeplitz del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & & \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Ne segue in particolare che $\dim\{A : AZ = ZA\} = n$ e, quindi, per il Teorema, si ha anche l'identità $\{A : AZ = ZA\} = \{p(Z)\}$. Effettivamente, se si esaminano le potenze di Z ci si accorge che la matrice A in $\ldots$ non è altri che il polinomio $\sum_{k=1}^{n} a_{k1} Z^{k-1}$.

Esempio 5: algebre di matrici simultaneamente diagonalizzabili

Sia $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice non singolare. Sia $\mathcal{L}$ lo spazio delle matrici simultaneamente diagonalizzate da M, cioè

$$\mathcal{L} = \{MDM^{-1} : D = \text{matrici diagonali}\}.$$

È evidente che $\mathcal{L}$ è una algebra di matrici commutativa. Tuttavia questo risultato segue anche dall'osservazione che $\mathcal{L}$ può essere rappresentata come l'insieme dei polinomi in una matrice X, è sufficiente scegliere $X = M\tilde{D}M^{-1}$ con $\tilde{D}$ matrice diagonale con elementi diagonali distinti. Non è vero il contrario, cioè non è vero in generale che uno spazio del tipo $\{p(X)\}$ sia esprimibile nella forma $\{MDM^{-1}\}$ per qualche matrice M

non singolare. Ad esempio, non può essere vero per $\{p(Z)\}$, l'insieme delle matrici triangolari inferiori di Toeplitz, perché Z non è una matrice diagonalizzabile.

Nel seguito descriveremo nei dettagli alcuni esempi di algebre $\{MDM^{-1}\}$. In tali esempi, la matrice M è unitaria, $M^H = M^{-1}$, e definisce una trasformata discreta veloce, cioè ogni prodotto matrice-vettore $M \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, è calcolabile effettuando non più di $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche. Questa è una caratteristica di parecchie altre algebre di matrici di tipo $\{MDM^{-1}\}$ che ha fatto si' che tali algebre siano correntemente utilizzate per rendere più efficiente la risoluzione numerica di diversi problemi, non solo di algebra lineare.

L'algebra $C = \{$circolanti$\}$ (C_{-1}, C_β) e la trasformata discreta di Fouries (DFT)

Sia Π_1 la matrice $n \times n$ circolante con prima riga $[0\,1\,0 \cdots 0]$

Sia $\omega \in \mathbb{C}$. Si noti che, se $\mathbf{e} = [1\,1\,1 \cdots 1]^T$, allora $\Pi_1 \mathbf{e} = \mathbf{e} = 1\mathbf{e}$. Inoltre,

$$\Pi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \cdot \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ \cdot \\ \omega^{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \cdot \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix},$$

dove l'ultima uguaglianza vale se $\omega^n = 1$. Più in generale, se $\omega^n = 1$, valgono le seguenti identità vettoriali

$$\Pi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \cdot \\ \omega^{(n-1)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^j \\ \cdot \\ \omega^{(n-1)j} \\ 1 \end{bmatrix} = \omega^j \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \cdot \\ \omega^{(n-1)j} \end{bmatrix}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

o, equivalentemente, la seguente identità matriciale

$$\Pi_1 W = W D_{1\omega^{n-1}},$$

$$D_{1\omega^{n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega^{n-1} \end{bmatrix}, \ W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \omega & & \omega^j & & \omega^{n-1} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdot & \omega^{(n-1)j} & \cdot & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Proposizione. Se $\omega^n = 1$ e se $\omega^j \neq 1$ per $0 < j < n$, allora $W^* W = nI$.

Dimostrazione. Poiché $|\omega| = 1$, $\overline{\omega} = \omega^{-1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} [W^*W]_{ij} &= [\overline{W}W]_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n [\overline{W}]_{ik}[W]_{kj} = \sum_{k=1}^n \overline{\omega}^{(i-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(j-1)} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(j-i)} = \sum_{k=1}^n (\omega^{j-i})^{k-1}. \end{aligned}$$

Quindi $[W^*W]_{ij} = n$ se $i = j$, e $[W^*W]_{ij} = \frac{1-(\omega^{j-i})^n}{1-\omega^{j-i}} = 0$ se $i \neq j$ (si noti che l'ipotesi $\omega^j \neq 1$ per $0 < j < n$ è essenziale per rendere $1 - \omega^{j-i} \neq 0$).

Per il risultato della Proposizione, possiamo dire che la seguente matrice (simmetrica) di Fourier

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} W, \quad W = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1}^n, \ \omega^n = 1, \ \omega^i \neq 1, \ 0 < i < n,$$

è unitaria, i.e. $F^* F = I$.

Esercizio. Provare che $F^2 = J\Pi_1$ dove J è la matrice di permutazione $J\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$ (J è di solito chiamata anti-identica).

L'identità matriciale soddisfatta da Π_1 e da W può essere ovviamente riscritta in termini di F, $\Pi_1 F = FD_{1\omega^{n-1}}$, quindi otteniamo l'uguaglianza

$$\Pi_1 = FD_{1\omega^{n-1}}F^*$$

da cui segue che la matrice di Fourier diagonalizza la matrice Π_1, o, più precisamente, che *le colonne della matrice di Fourier formano un sistema di n autovettori unitariamente ortonormali per la matrice Π_1 con corrispondenti autovalori* $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.

Ma se F diagonalizza Π_1, allora diagonalizza tutti i polinomi in Π_1:

$$\begin{aligned}
\Pi_1^{k-1} &= FD_{1\omega^{n-1}}^{k-1}F^*, \\
\sum_{k=1}^n a_k \Pi_1^{k-1} &= F \sum_{k=1}^n a_k D_{1\omega^{n-1}}^{k-1} F^* \\
&= F \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k & & & \\ & \sum_{k=1}^n a_k \omega^{k-1} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \sum_{k=1}^n a_k \omega^{(n-1)(k-1)} \end{bmatrix} F^* \\
&= Fd(W\mathbf{a})F^* = \sqrt{n}Fd(F\mathbf{a})F^*
\end{aligned}$$

dove con $d(\mathbf{z})$ indichiamo la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Quindi per la matrice circolante la cui prima riga è $\mathbf{a}^T$ abbiamo ottenuto la rappresentazione $C(\mathbf{a}) = \sqrt{n}Fd(F\mathbf{a})F^* = Fd(F^T\mathbf{a})d(F^T\mathbf{e}_1)^{-1}F^*$.

Esercizio. Sia Π_{-1} la matrice (-1)-circolante con prima riga $[0\,1\,0 \cdots 0]$. Procedendo analogamente al caso circolante cercare una matrice M unitaria tale che $C_{-1} = \{MDM^{-1} : D = \text{diagonali}\}$. (Nota: M si ottiene da F moltiplicando le sue righe, dalla prima alla n-esima, rispettivamente per $1, \rho, \ldots, \rho^{n-1}$, dove ρ è una radice principale n-sima di -1).

Più in generale, posto $\Pi_\beta = Z^T + \beta \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1^T$, $\beta \in \mathbb{C}$, e considerato l'insieme C_β dei polinomi in Π_β, trovare M tale che $C_\beta = \{MDM^{-1} : D = \text{diagonali}\}$ con M unitaria se $|\beta| = 1$. (Nota: $M = D_\beta F$ per una opportuna matrice diagonale D_β).

Esercizio. Sia T una matrice di Toeplitz $n \times n$, i.e. $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$, per certi $t_k \in \mathbb{C}$. Mostrare che $T = A + B$ dove A è una matrice circolante e B è una matrice (-1)-circolante.

Proposizione FFT. Dato $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, la complessità del prodotto matrice-vettore $F\mathbf{z}$ è al più $O(n \log_2 n)$. Tale operazione è chiamata trasformata discreta di Fourier (DFT) di $\mathbf{z}$. Come conseguenza, il prodotto matrice-vettore $C(\mathbf{a})\mathbf{z}$ è calcolabile effettuando due DFT (dopo la pre-elaborazione della DFT $F\mathbf{a}$), e, quindi, con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche.

Dimostrazione. Sia n pari. Poiché $\omega^{(i-1)(k-1)}$ è l'(i,k) elemento di W e z_k è il k-esimo elemento di $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
(W\mathbf{z})_i &= \sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} z_k = \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-2)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-1)} z_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2(j-1)+1)} z_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j}.
\end{aligned}$$

Si noti che ω è di fatto una funzione di n, cioè la giusta notazione per ω dovrebbe essere ω_n. Allora $\omega^2 = \omega_n^2$ è tale che $(\omega_n^2)^{n/2} = 1$ e $(\omega_n^2)^i \neq 1$ $0 < i < n/2$; in altre parole $\omega_n^2 = \omega_{n/2}$ (ovvero ω_n^2 è radice $n/2$-esima principale di 1). Quindi, abbiamo le identità

$$(W_n\mathbf{z})_i = \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (?)$$

Ne segue che, per $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$,

$$(W_n\mathbf{z})_i = (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_i + \omega_n^{i-1}(W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix})_i.$$

Inoltre, ponendo $i = \frac{n}{2} + k$, $k = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, in (?), otteniamo

$$\begin{array}{rcl} (W_n\mathbf{z})_{\frac{n}{2}+k} & = & \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{\frac{n}{2}} \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\ & = & \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} - \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\ & = & (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_k - \omega_n^{k-1}(W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix})_k, \ k = 1, \ldots, \frac{n}{2}. \end{array}$$

($\omega_n^{\frac{n}{2}} = -1$; si pensi $\omega = e^{\pm \mathbf{i} 2\pi/n}$). Le precedenti uguaglianze scalari possono essere riscritte in forma compatta:

$$W_n\mathbf{z} = \begin{bmatrix} I & D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \\ I & -D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n/2} & 0 \\ 0 & W_{n/2} \end{bmatrix} Q\mathbf{z},$$

$$D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega_n & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega_n^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (??)$$

Sia c_n denota la complessità del prodotto matrice-vettore $F_n\mathbf{z}$. Allora, per la formula precedente,

$$c_n \leq 2c_{n/2} + rn, \ r \text{ costante},$$

e questo implica $c_n = O(n \log_2 n)$, se n è una potenza di 2.

La dimostrazione dell'ultima affermazione è lasciata al lettore. □

Le algebre di tipo Hartley e le corrispondenti trasformate discrete

Ovviamente, ogni volta che una matrice $n \times n$ M, ben definita per tutti gli n, soddisfa per n pari una identità del tipo

$$M_n = \left[\text{ sparse matrix } \right] \begin{bmatrix} M_{n/2} & 0 \\ 0 & M_{n/2} \end{bmatrix} \left[\text{ permutation matrix } \right],$$

si può dire che il prodotto matrice-vettore $M_n\mathbf{z}$ può essere calcolato con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche, e che l'algebra corrispondente ad M, $\mathcal{L} = \{MDM^{-1}\}$, acquista interesse. Abbiamo visto che l'identità di cui sopra è verificata per M =trasformata di Fourier F, e, quindi, più in generale, per $M = D_\beta F$. Ma, come viene provato in [], è verificata anche per altre matrici M ed, in particolare, se M è una qualsiasi delle otto trasformate discrete di tipo Hartley.

Vediamone qui una. Sia $G = G_n$ la matrice $n \times n$ definita da

$$G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\cos \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2n} + \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2n}), \ i, j = 0, \ldots, n-1.$$

Si osserva che la matrice G è simmetrica, persimmetrica, reale, unitaria, e soddisfa l'identità:

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} R_+ & R_- \\ -R_- J & R_+ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{n/2} & 0 \\ 0 & G_{n/2} \end{bmatrix} Q, \;\; R_\pm = D_c \pm D_s J,$$

(J $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ anti-identica) per opportune matrici diagonali $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ D_c e D_s [].

Ne segue che l'algebra corrispondente, $\gamma = \{GDG : D = \text{diagonali}\}$, è costituita da matrici *di bassa complessità*, ovvero, se $A \in \gamma$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ allora i vettori $A \cdot \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, e $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ sono calcolabili con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche. Ha per questo interesse studiare la struttura delle matrici di γ.

Possiamo innanzitutto osservare che per $n = 2 + 4s$ ciascuna riga di G_n ha almeno un elemento nullo, mentre per tutti gli altri valori di n si ha che $[G]_{1k} \neq 0$, $\forall\, k$. Ciò è come dire le matrici di γ sono – come accade per le β-circolanti – univocamente determinate da una loro riga (e in particolare dalla loro prima riga), ovvero vale la rappresentazione

$$\mathcal{L} = \{Gd(G^T\mathbf{z})d(G^T\mathbf{e}_1)^{-1}G^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\},$$

se e solo se $n \neq 2+4s$, ad esempio se n è una potenza di 2. Per $n = 2+4s$, invece, una combinazione di più righe di $A \in \gamma$ è necessaria per definire univocamente A (ad esempio la somma delle righe prima e ultima di $A \in \gamma$ definiscono A per ogni n, cioè, $\forall\, n$, vale la rappresentazione $\mathcal{L} = \{Gd(G^T\mathbf{z})d(G^T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_n))^{-1}G^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$).

La struttura delle matrici di γ è rivelata più chiaramente dall'identità $\gamma = C^S_{-1} + JC^{SK}_{-1}$, dimostrata in []. Con C^S_{-1} si intende l'algebra delle matrici (-1)-circolanti simmetriche $n \times n$, e con C^{SK}_{-1} si intende lo spazio delle matrici (-1)-circolanti antisimmetriche $n \times n$ (una matrice A è antisimmetrica se $A^T = -A$).

Esercizio. Si provi che lo spazio $C^S_{-1} + JC^{SK}_{-1}$, è una algebra commutativa di matrici . Si provi l'uguaglianza $\gamma = C^S_{-1} + JC^{SK}_{-1}$,.

L'algebra $\tau = \{$matrici $\tau\}$ e la trasformata discreta seno (DST)

L'algebra di matrici τ, studiata nei dettagli in questa sezione, è solo una delle 16 note algebre *trigonometriche* o di *Jacobi* []. Allo stesso modo, la trasformata seno, che diagonalizza τ, è solo una delle 16 note trasformate discrete trigonometriche, di tipo seno e di tipo coseno. Si noti che tutte tali 16 trasformate hanno complessità $O(n \log_2 n)$ (anche se, in genere, non soddisfano esattamente una uguaglianza del tipo ...).

Si consideri la matrice $n \times n$

$$Z + Z^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e si ponga $J_1 = I$, e $J_2 = Z + Z^T$. Si noti che $\mathbf{e}_1^T J_1 = \mathbf{e}_1^T$, $\mathbf{e}_1^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$. Inoltre, poiché

$$(Z + Z^T)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I,$$

abbiamo $\mathbf{e}_1^T((Z + Z^T)^2 - I) = [0\,0\,1\,0 \cdots 0] = \mathbf{e}_3^T$. Si ponga $J_3 = (Z + Z^T)^2 - I = J_2(Z + Z^T) - J_1$; allora $\mathbf{e}_1^T J_3 = \mathbf{e}_3^T$.

Più in generale, si ponga $J_{i+1} = J_i(Z + Z^T) - J_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. La matrice J_{i+1} è un polinomio in $Z + Z^T$ di grado i con la proprietà $\mathbf{e}_1^T J_{i+1} = \mathbf{e}_{i+1}^T$.

Per dimostrare tale proprietà delle J_k, supponiamo di sapere che $\mathbf{e}_1^T J_j = \mathbf{e}_j^T$, $j = 1, \dots, i$ (ed effettivamente lo sappiamo per $i = 1, 2$); allora da ciò segue subito che

$$\mathbf{e}_1^T J_{i+1} = \mathbf{e}_1^T (J_i(Z + Z^T) - J_{i-1}) = (\mathbf{e}_i^T (Z + Z^T)) - \mathbf{e}_{i-1}^T = (\mathbf{e}_{i-1}^T + \mathbf{e}_{i+1}^T) - \mathbf{e}_{i-1}^T = \mathbf{e}_{i+1}^T.$$

Poiché le matrici $J_1, J_2, \dots, J_n$ sono linearmente indipendenti, possiamo dire che esse generano l'insieme $\{p(Z + Z^T)\}$ di tutti i polinomi nella matrice $Z + Z^T$. Chiamiamo τ tale insieme.

Dati $a_k \in \mathbb{C}$ è definita univocamente la matrice di τ la cui prima riga è $\mathbf{a}^T = [a_1 \cdots a_n]$. Essa è $\tau(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n a_k J_k$.

Troviamo una rappresentazione utile di τ e, in particolare, di $\tau(\mathbf{a})$. Innanzitutto si osservi che valgono le seguenti uguaglianze vettoriali:

$$\begin{bmatrix} & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\frac{j\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2j\pi}{n+1} \\ \cdot \\ \sin\frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix} = 2\cos\frac{j\pi}{n+1} \begin{bmatrix} \sin\frac{j\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2j\pi}{n+1} \\ \cdot \\ \sin\frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix}, \; j = 1, \dots, n.$$

Tali n uguaglianze possono essere riscritte come una unica uguaglianza matriciale $(Z + Z^T)S = SD$ dove S è la matrice

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\frac{ij\pi}{n+1}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

e D è la matrice diagonale con elementi diagonali $D_{jj} = 2\cos\frac{j\pi}{n+1}$.

Si noti che la matrice S, chiamata matrice seno, è reale, simmetrica e unitaria (provare a dimostrarlo).

Quindi, le colonne della matrice seno S formano un sistema di autovettori unitariamente ortonormali per la matrice $Z + Z^T$. In altre parole, la matrice unitaria S diagonalizza $Z + Z^T$ e, ovviamente, diagonalizza ogni polinomio in $Z + Z^T$, i.e. ogni matrice τ. Riassumendo, si ha che

$Z + Z^T = SDS, \quad (Z + Z^T)^k = SD^kS,$
$\tau = \{p(Z + Z^T)\} = \{\sum_{k=1}^n z_k (Z + Z^T)^{k-1} : z_k \in \mathbb{C}\} = \{\sum_{k=1}^n a_k J_k : a_k \in \mathbb{C}\} = \{Sd(\mathbf{v})S : \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n\}.$

In particolare, è evidente che la matrice di τ con prima riga $\mathbf{a}^T$ è

$$\tau(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n a_k J_k = Sd(S^T\mathbf{a})d(S^T\mathbf{e}_1)^{-1}S^{-1}.$$

Quest'ultima formula e il risultato riportato nel seguente esercizio, implicano che prodotti matrice-vettore coinvolgenti matrici τ e la risoluzione di sistemi con matrici dei coefficienti τ hanno complessità al più $O(n \log_2 n)$.

Esercizio. Sia $F_{2(n+1)}$ la matrice di Fourier di ordine $2(n+1)$. Allora la matrice seno S soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{i}\big(I - F_{2(n+1)}^2\big)F_{2(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & S & \mathbf{0} & -SJ \\ 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -JS & \mathbf{0} & JSJ \end{bmatrix}$$

(si noti che $F_{2(n+1)}^2$ è una matrice di permutazione). Come conseguenza, una trasformata seno può essere calcolata effettuando una trasformata discreta di Fourier.

Concludiamo lo studio dell'algebra τ con una osservazione utile per capire rapidamente la struttura delle matrici di τ. Il Teorema ... suggerisce la seguente ulteriore rappresentazione dello spazio τ:

$$\tau = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ A(Z+Z^T) = (Z+Z^T)A\}.$$

Il fatto che ogni matrice di τ deve commutare con $Z+Z^T$ è equivalente a richiedere che valgono le seguenti n^2 condizioni di *somma in croce*:

$$a_{i,j-1} + a_{i,j+1} = a_{i-1,j} + a_{i+1,j}, \ \ i,j = 1,\dots,n$$

dove abbiamo posto $a_{0,j} = a_{n+1,j} = a_{i,0} = a_{i,n+1} = 0$, $i,j = 1,\dots,n$. Possiamo usare tali condizioni per scrivere la generica matrice di τ la cui prima riga è $[a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$. Per esempio, per $n=4$, possiamo dire che

$$\tau(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1+a_3 & a_2+a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2+a_4 & a_1+a_3 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \ J_1 = I, \ J_2 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0 \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0 \end{bmatrix}, \ J_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix}, \ J_2 - J_4 = \begin{bmatrix} 0&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\-1&0&1&0 \end{bmatrix},$$

e così via.

Per esercizio, proviamo ora che per n pari la matrice J_2 è invertibile, e calcoliamo l'inversa.

Sappiamo che se J_2 è invertibile, allora $J_2^{-1} \in \tau$ (dal fatto che J_2 commuta con $Z+Z^T$ segue che anche J_2^{-1} commuta con $Z+Z^T$!). Quindi $J_2^{-1} = \tau(\mathbf{z})$ per qualche $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Si noti che l'identità matriciale $\tau(\mathbf{z})J_2 = I$ è equivalente all'identità vettoriale $\mathbf{z}^T J_2 = \mathbf{e}_1^T$. Così, per esempio, per $n=4$ abbiamo la condizione

$$[z_1\ z_2\ z_3\ z_4] \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0 \end{bmatrix} = [1\ 0\ 0\ 0],$$

che implica $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = -1$, e, quindi,

$$J_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\-1&0&1&0 \end{bmatrix} = J_3 - J_4.$$

La dimostrazione per $n = 6, 8, \dots$ è lasciata al lettore.

Esercizio. Sia T una matrice di Toeplitz simmetrica $n\times n$, i.e. $T = (t_{|i-j|})_{i,j=1}^n$, per certi $t_k \in \mathbb{C}$. Mostrare che $T = A + B$ dove A è una matrice τ di ordine n e

$$B = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&R&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \ R \in \tau, \ R \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)}.$$

Esercizio. Scrivere l'inversa della matrice di τ la cui prima riga è $[4\,1\,0\,0\,\cdots\,0]$.

Moltiplicare una matrice l.t.T. per un vettore

Si consideri una generica matrice di Toeplitz T 4×4 ed un vettore $\mathbf{v}$ 4×1. Allora T può essere vista come la sottomatrice in alto a sinistra di una matrice circolante C 8×8, e per il vettore $T\mathbf{v}$ vale la seguente rappresentazione:

$$T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 \\ 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_4 = \left\{ C \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}_4$$

dove col simbolo $\{\mathbf{z}\}_4$ si intende il vettore 4×1 le cui componenti sono le prime quattro componenti del vettore $\mathbf{z}$.

Se T è $n \times n$ e $\mathbf{v}$ è $n \times 1$, allora l'osservazione vale ancora:

$$T\mathbf{v} = \left\{ C \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}_n, \; C = C(\begin{bmatrix} t_0 \\ t_{-1} \\ \cdot \\ t_{-n+1} \\ 0 \\ t_{n-1} \\ \cdot \\ t_1 \end{bmatrix}) = \sqrt{2n} F_{2n} d(F_{2n} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_{-1} \\ \cdot \\ t_{-n+1} \\ 0 \\ t_{n-1} \\ \cdot \\ t_1 \end{bmatrix}) F_{2n}^H.$$

Da questa formula si deduce immediatamente una procedura di costo $O(n \log_2 n)$ per il calcolo del prodotto di un matrice di Toeplitz $n \times n$ per un vettore. Tale procedura ha come sotto-procedura l'algoritmo FFT considerato in ....

Nella prossima sezione vedremo che la risoluzione di un sistema lineare triangolare di Toeplitz di n equazioni può ricondursi al calcolo di $O(\log n)$ prodotti matrice-vettore dove la matrice è sempre triangolare di Toeplitz ed è di dimensione variabile, che si dimezza ogni volta. Ne segue che è opportuno avere a disposizione un metodo che effettui tali prodotti il più efficientemente possibile. Un metodo abbastanza efficiente si ottiene ponendo $t_{-i} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, nella procedura sopra illustrata.

Un algoritmo per la risoluzione di sistemi triangolari di Toeplitz

In questa sezione si illustrerà un algoritmo di costo $O(n \log_2 n)$ per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, essendo A una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $n \times n$ con n potenza di 2 e $[A]_{11} = 1$.

Lemmi preliminari

Dato un vettore $\mathbf{v} = [v_0 \; v_1 \; \mathbf{v}_2 \; \cdots]^T$, $v_i \in \mathbb{C}$ (in breve $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$), sia $L(\mathbf{v})$ la matrice semi-infinita triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $\mathbf{v}$, i.e.

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k Z^k, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Lemma 1. Siano $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Allora $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b}) = L(\mathbf{c})$ se e soltanto se $L(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Dimostrazione. Se $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b}) = L(\mathbf{c})$, allora la prima colonna della matrice $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b})$ deve essere uguale alla prima colonna della matrice $L(\mathbf{c})$, e queste sono rispettivamente i vettori $L(\mathbf{a})\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Viceversa, supponiamo che $L(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Consideriamo la matrice $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b})$. Questa, in quanto prodotto di matrici triangolari inferiori di Toeplitz, è una matrice triangolare inferiore di Toeplitz, e, per ipotesi, la sua prima colonna, $L(\mathbf{a})\mathbf{b}$, coincide con il vettore $\mathbf{c}$, che è la prima colonna della matrice triangolare inferiore di Toeplitz $L(\mathbf{c})$. La tesi segue dal fatto che le matrici triangolari di Toeplitz sono univocamente definite dalla loro prima colonna. □

Dato un vettore $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, v_2\, \cdot]^T \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sia E la matrice semi-infinita di 0 e 1 che manda $\mathbf{v}$ nel vettore $E\mathbf{v} = [v_0\, 0\, v_1\, 0\, v_2\, 0\, \cdots]^T$:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

In altre parole, l'azione di E su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire uno zero tra due successive componenti di $\mathbf{v}$. Si osserva facilmente che

$$E^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad E^s = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \mathbf{0} & & & \\ 0 & 1 & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}_{2^s-1},$$

cioè l'azione di E^s su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire $2^s - 1$ zeri tra due successive componenti di $\mathbf{v}$.

Lemma 2. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con $u_0 = v_0 = 1$. Allora $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$, e, più in generale, per ogni $s \in \mathbb{N}$ si ha $L(E^s\mathbf{u})E^s\mathbf{v} = E^sL(\mathbf{u})\mathbf{v}$.

Dimostrazione. Scrivendo i vettori $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v}$ e $EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$ si osserva che sono uguali. Moltiplicando a sinistra per E l'identità $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$ ed utilizzando tale stessa identità con i vettori $E\mathbf{u}$ ed $E\mathbf{v}$ al posto, rispettivamente, di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, si osserva che vale anche l'identità $L(E^2\mathbf{u})E^2\mathbf{v} = E^2L(\mathbf{u})\mathbf{v}$. ... □

L'algoritmo

Sia A una matrice l.t.T. $n \times n$ con $[A]_{11} = 1$. Si vuole risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$. L'algoritmo seguente sfrutta l'osservazione che A^{-1} è ancora una matrice l.t.T. $n \times n$ (vedi ...).

1 Si calcola la prima colonna della matrire l.t.T. A^{-1}, ovvero si risolve il sistema lineare particolare $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ utilizzando l'algoritmo ... di costo $O(n \log_2 n)$ illustrato nella sezione seguente, basato sulla ripetuta applicazione dei Lemmi 1 e 2.

2 Si calcola il prodotto matrice-vettore $A^{-1}\mathbf{f}$ tramite l'algoritmo ..., visto in ..., e, quindi, effettuando non più di $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche.

Importante: È possibile definire un algoritmo analogo ma di costo $O(n \log_3 n)$ (conveniente quando n è uguale a una potenza di 3) riformulando i Lemmi 1 e 2 di cui sopra nel caso in cui E è definita come la matrice di 0 e 1 la cui azione su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire due zeri tra due componenti successive di $\mathbf{v}$. A tal fine è importante ricordare che è possibile definire un algoritmo FFT di costo $O(n \log_3 n)$ per il calcolo della DFT di un vettore (conveniente quando n è uguale a una potenza di 3).

Il calcolo della prima colonna dell'inversa di una matrice l.t.T.

Per semplicità illustriamo l'algoritmo per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ nel caso $n = 8$. Indicheremo, a volte, cos'è che cambia nel caso generale $n = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$; comunque tale caso è facilmente deducibile da quello considerato. L'algoritmo si divide in due parti. Nella prima parte si introducono e si calcolano matrici triangolari inferiori di Toeplitz che moltiplicate, una dopo l'altra, a sinistra per la matrice A, hanno l'effetto di trasformarla nella matrice identica. Nella seconda parte si moltiplicano tali matrici, di nuovo una dopo l'altra, per il vettore $\mathbf{e}_1$. Come si vedrà, non si fa altro che applicare una specie di eliminazione di Gauss, ma, invece di annullare elementi, si annullano diagonali. Il costo finale $O(n \log_2 n)$ dell'algoritmo deriva dal fatto che ad ogni passo della prima parte si annullano metà delle diagonali rimaste non nulle, e dal fatto che la seconda parte è semplificabile sfruttando il fatto che il vettore $\mathbf{e}_1$ ha solo una componente non nulla.

Per prima cosa osserviamo che la matrice A 8×8 può essere vista come la sottomatrice in alto a sinistra di una matrice $L(\mathbf{a})$ semi-infinita triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $[1\, a_1\, a_2\, \cdot\, a_7\, a_8\, \cdot]^T$.

Passo 1. Trovare $\hat{\mathbf{a}}$ tale che

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathit{0} \\ a_1^{(1)} \\ \mathit{0} \\ a_2^{(1)} \\ \mathit{0} \\ a_3^{(1)} \\ \mathit{0} \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)}$$

per certi $a_i^{(1)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(1)}$. Il calcolo degli $a_i^{(1)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}$, il prodotto di una matrice t.i.T. 8×8 $(2^s \times 2^s)$ per un vettore; vedremo che $\hat{\mathbf{a}}$ è disponibile a costo zero.

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con una nulla.

Passo 2. Trovare $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&& \\ a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&&&& \\ 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&&& \\ a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&& \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&& \\ a_3^{(1)} & 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 && \\ 0 & a_3^{(1)} & 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathit{0} \\ 0 \\ a_1^{(2)} \\ 0 \\ \mathit{0} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$$

per certi $a_i^{(2)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(2)}$. Il calcolo degli $a_i^{(2)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$, il prodotto di una matrice t.i.T. 4×4 $(2^{s-1} \times 2^{s-1})$ per un vettore.

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E\mathbf{a}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con tre nulle.

Nota. Per il Lemma 2, se $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ allora $L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$. Vedremo che $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ è disponibile a costo zero.

Passo 3. Trovare $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$ tale che

$$L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E^3\mathbf{a}^{(3)}$$

per certi $a_i^{(3)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(3)}$. Il calcolo degli $a_i^{(3)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$, il prodotto di una matrice t.i.T. 2×2 per un vettore (No! nessuna componente di $a^{(3)}$ va calcolata!).

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con sette nulle.

Nota. Per il Lemma 2, se $L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)}$ allora $L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E^3\mathbf{a}^{(3)}$. Vedremo che $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$ tale che $L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)}$ è disponibile a costo zero.

Se $n = 2^s > 8$, allora continua. Altrimenti è completata la prima parte dell'Algoritmo.

Riassumendo, abbiamo provato che

$$L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)})$$

dove, osserviamo, le sotto matrici 8×8 in alto a sinistra di $L(\mathbf{a})$ e $L(E^3\mathbf{a}^{(3)})$ sono, rispettivamente, la matrice triangolare inferiore di Toeplitz data inizialmente A e la matrice identica I,

$$L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ a_7 & \cdot & a_1 & 1 & & & \\ a_8 & a_7 & \cdot & a_1 & 1 & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}, \quad L(E^3\mathbf{a}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ 0 & & \cdot & 0 & 1 & & \\ a_1^{(3)} & 0 & \cdot & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix},$$

e le operazioni che abbiamo dovuto fare finora sono state: 8×8 l.t.T. $\cdot$ vettore + 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore (se A è $n \times n$ con $n = 2^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: $2^s \times 2^s$ l.t.T. $\cdot$ vettore $+ \ldots +$ 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore).

Veniamo ora al nostro scopo, calcolare la prima colonna di A^{-1}, e illustriamo quindi la seconda parte dell'algoritmo. Consideriamo il seguente sistema lineare semi-infinito:

$$L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v}$$

dove $\mathbf{v}$ è un generico vettore semi-infinito di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (se A è $n \times n$ con $n = 2^s$ al posto di 2 in $\ldots$ ci sarebbe $s-1$).

Tale sistema può essere riscritto come segue

$$\begin{bmatrix} A & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ z_8 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

cioè evidenziando la parte superiore del sistema, di sole 8 equazioni.

Nota: prima di procedere, si noti che $\{\mathbf{z}\}_8$ è tale che

$$A\{\mathbf{z}\}_8 = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_0, v_1 \in \mathbb{C}.$$

Quindi la scelta $v_0 = 1$ e $v_1 = 0$, renderebbe $\{\mathbf{z}\}_8$ uguale al vettore da noi cercato, $A^{-1}\mathbf{e}_1$.

Usando l'uguaglianza ... si dimostra immediatamente che il sistema $L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} I_8 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(E^3\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})E^2\mathbf{v}$$

Per il Lemma 2 il secondo membro di quest'ultima uguaglianza può essere riscritto più convenientemente:

$$L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})E^2\mathbf{v} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E^2L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}.$$

Quindi, vale la seguente identità:

$$\begin{bmatrix} I_8 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}$$

Le matrici coinvolte nella rappresentazione a secondo membro sono triangolari inferiori e le sottomatrici quadrate di E in alto a sinistra, 8×8, 4×4, hanno il lato destro nullo, ad esempio

$$\{E\}_8 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Queste due osservazioni ci permettono di ottenere una efficiente rappresentazione di $\{\mathbf{z}\}_8$:

$$\{\mathbf{z}\}_8 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_8\{\mathbf{v}\}_8 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_{8,4}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_4\{E\}_{4,2}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_2\{\mathbf{v}\}_2.$$

Usando tale formula, il vettore $\{\mathbf{z}\}_8$ può essere calcolato effettuando 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore + 8×8 l.t.T. $\cdot$ vettore (se A è $n\times n$ con $n=2^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore $+\ldots+$ $2^s\times 2^s$ l.t.T.$\cdot$ vettore), ovvero allo stesso costo dell'*eliminazione Gaussiana*, la prima parte dell'algoritmo.

In conclusione, se $cj2^j$ è un limite superiore per il costo dell'operazione $2^j\times 2^j$ l.t.T. $\cdot$ vettore, allora il costo dell'algoritmo illustrato, nel caso di A $n\times n$ con $n=2^s$, è $c\sum_{j=2}^{s} j2^j = O(s2^s) = O(n\log_2 n)$.

Ci resta da provare che, effettivamente, si ha $\hat{\mathbf{a}}$ tale che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$ a costo zero. A tal fine è sufficiente osservare con un calcolo diretto che

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \\ a_4 \\ -a_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a_2 - a_1^2 \\ 0 \\ 2a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Osservazioni finali

Dato il vettore $\mathbf{a}$ il problema del calcolo di un vettore $\hat{\mathbf{a}}$ tale che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$, per qualche $\mathbf{a}^{(1)}$, è in realtà un problema di aritmetica polinomiale. Infatti, per il Lemma 1, l'identità $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$ è equivalente all'uguaglianza $L(\mathbf{a})L(\hat{\mathbf{a}}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})$, i.e.

$$(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z^k)(\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{a}_k Z^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(1)} Z^{2k}.$$

Quindi il problema di aritmetica polinomiale in questione è il seguente:

Dato il polinomio $a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, trovare un polinomio $\hat{a}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{a}_k z^k$ tale che

$$\hat{a}(z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z^2 + a_2^{(1)}z^4 + \ldots =: a^{(1)}(z)$$

per certi $a_i^{(1)}$.

Tale problema è un caso particolare di un problema più generale: trasformare un polinomio *pieno* $a(z)$ in un polinomio *sparso* $a^{(1)}(z) = \sum a_k^{(1)} z^{rk}$. È possibile scrivere esplicitamente un polinomio $\hat{a}(z)$ che realizza questa trasformazione, infatti vale il seguente teorema.

Teorema. Dato $a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, posto $\hat{a}(z) = a(zt)a(zt^2)\cdots a(zt^{r-1})$ dove t è una radice r-esima principale dell'unità ($t\in\mathbb{C}$, $t^r=1$, $t^i\neq 1$ per $0<i<r$), si ha che

$$\hat{a}(z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z^r + a_2^{(1)}z^{2r} + \ldots =: a^{(1)}(z)$$

per certi $a_i^{(1)}$. Inoltre, se i coefficienti di a sono reali allora anche i coefficienti di $\hat{a}$ sono reali.

Dimostrazione. ...

Vediamo due Corollari del Teorema.

Per $r=2$ si ha $\hat{a}(z) = a(-z)$, cioè ritroviamo il risultato .... È evidente che $a(-z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z^2 + a_2^{(1)}z^4 + \ldots$ (cita [Graeffe]). In tal caso i coefficienti di $\hat{a}$ sono disponibili a costo zero, occorre calcolare solo gli $a_i^{(1)}$.

Per $r = 3$ si ha $\hat{a}(z) = a(zt)a(zt^2)$, $t = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$. Il Teorema afferma che $a(z)a(zt)a(zt^2) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}z^3 + a_2^{(1)}z^6 + \ldots$,

$$L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E\mathbf{a}^{(1)}), \quad E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

e che i coefficienti di $\hat{a}(z) = a(zt)a(zt^2)$ sono reali se lo sono quelli di a. Stavolta i coefficienti di $\hat{a}$ non sono disponibili a costo zero. Per ottenere una formula che ci permetta di calcolarli osserviamo che l'identità $\hat{a}(z) = a(zt)a(zt^2)$ è equivalente all'identità $L(\hat{\mathbf{a}}) = L(\mathbf{c})L(\mathbf{d})$, $c_k = a_k t^k$, $d_k = a_k t^{2k}$, e da ciò segue che

$$\hat{\mathbf{a}} = L(\mathbf{c})\mathbf{d} = \Re[L(\mathbf{c})]\Re[\mathbf{d}] - \Im[L(\mathbf{c})]\Im[\mathbf{d}]$$

dove l'ultima uguaglianza è valida se i coefficienti di a sono reali.

Una applicazione: il calcolo dei numeri di Bernoulli

I polinomi e numeri di Bernoulli

Le condizioni

$$B(x+1) - B(x) = nx^{n-1}, \quad \int_0^1 B(x)\,dx = 0, \quad B(x) \text{ polinomio}$$

definiscono univocamente la funzione $B(x)$. Essa è un particolare polinomio monico di grado n chiamato *n-esimo polinomio di Bernoulli* e indicato con il simbolo $B_n(x)$. È semplice calcolare i primi polinomi di Bernoulli:

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3(x) = x(x - \frac{1}{2})(x-1),\ \ldots\ .$$

Per convenzione $B_0(x) = 1$.

Si dimostra che i polinomi di Bernoulli definiscono i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di diverse funzioni; ad esempio, per ciò che segue, è opportuno ricordare che vale la seguente l'identità:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Inoltre, i polinomi di Bernoulli soddisfano diverse identità. Due delle più importanti sono quelle concernenti il valore della loro derivata e le loro proprietà di simmetria/antisimmetria rispetto all'asse $x = \frac{1}{2}$:

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

In particolare, come conseguenza di quest'ultima identità e della loro definizione, si vede facilmente che tutti i polinomi di Bernoulli di grado dispari eccetto il primo si annullano in zero. Al contrario, il valore in zero dei polinomi di Bernoulli di grado pari è, oltre che diverso da zero, particolarmente significativo. In particolare, vale la seguente formula di Eulero

$$\zeta(2j) = \frac{|B_{2j}(0)|(2\pi)^{2j}}{2(2j)!}, \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s},$$

che mette in stretta relazione i valori $B_{2j}(0)$ con i valori della funzione Zeta di Riemann ζ nei numeri interi positivi pari $2j$. Ad esempio, da questa relazione e dal fatto che $\zeta(2j) \to 1$ se $j \to +\infty$, si deduce che

$|B_{2j}(0)|$ ha più o meno lo stesso valore di $2(2j)!/(2\pi)^{2j}$ per grandi valori di j. Un'altra formula importante coinvolgente i valori $B_{2j}(0)$ è quella di Eulero-Maclaurin, utile per il calcolo di somme: se f è una funzione sufficientemente regolare in $[m,n]$, $m,n \in \mathbb{Z}$, allora

$$\sum_{r=m}^{n} f(r) = \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \int_m^n f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}(0)}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m)] + u_{k+1},$$

ove $u_{k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\int_m^n f^{(2k+1)}(x)\overline{B}_{2k+1}(x)\,dx = -\frac{1}{(2k)!}\int_m^n f^{(2k)}(x)\overline{B}_{2k}(x)\,dx = \frac{1}{(2k+2)!}\int_m^n f^{(2k+2)}(x)[B_{2k+2}(0) - \overline{B}_{2k+2}(x)]\,dx$ e $\overline{B}_n$ è l'estensione periodica su $\mathbb{R}$ di $B_n|_{[0,1)}$. Ricordiamo che la formula di Eulero-Maclaurin conduce anche a una rappresentazione importante dell'errore commesso dalla formula dei trapezi $\mathcal{I}_h = h[\frac{1}{2}g(a) + \sum_{r=1}^{n-1} g(a+rh) + \frac{1}{2}g(b)]$, $h = \frac{b-a}{n}$, nell'approssimazione di un integrale $\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\,dx$. Tale rappresentazione, valida per g sufficientemente regolare in $[a,b]$, si ottiene ponendo $m=0$ e $f(t) = g(a+th)$ in ...:

$$\mathcal{I}_h = \mathcal{I} + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{2j}B_{2j}(0)}{(2j)!}[g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] + r_{k+1}, \quad r_{k+1} = \frac{g^{(2k+2)}(\xi)h^{2k+2}(b-a)B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!},$$

$\xi \in (a,b)$. Tale rappresentazione dell'errore, in termini di potenze pari di h, giustifica l'efficienza del metodo di estrapolazione di Romberg per la stima di integrali, quando tale metodo è applicato in combinazione con la formula dei trapezi. È evidente infatti da ... che $\tilde{\mathcal{I}}_{h/2} := (2^2\mathcal{I}_{h/2} - \mathcal{I}_h)/(2^2-1)$ approssima $\mathcal{I}$ con un errore dell'ordine di $O(h^4)$ mentre l'errore di $\mathcal{I}_h$ e $\mathcal{I}_{h/2}$, nell'approssimazione di $\mathcal{I}$, è dell'ordine di $O(h^2)$.

Per questi e tanti altri motivi (si veda []) i valori $B_{2j}(0)$ hanno un nome: i numeri di Bernoulli (Kowa Seki).

I numeri di Bernoulli risolvono sistemi triangolari di Toeplitz

Dall'identità ... della precedente sezione segue che i numeri di Bernoulli soddisfano la seguente uguaglianza:

$$\frac{t}{e^t-1} = -\frac{1}{2}t + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}t^{2k}.$$

Moltiplicando quest'ultima per $e^t - 1$, sviluppando e^t in potenze di t, ed imponendo che i coefficienti di t^i, $i = 2,3,4,\ldots$, del secondo membro siano uguali a zero, si ottengono le equazioni:

$$-\frac{1}{2}j + \sum_{k=0}^{[\frac{j-1}{2}]} \binom{j}{2k} B_{2k}(0) = 0, \quad j = 2,3,4,\ldots \ . \qquad (\ldots)$$

Ora, scegliendo j pari o j dispari, si ottengono due sistemi lineari triangolari inferiori che definiscono univocamente i numeri di Bernoulli. Esaminiamo qui nei dettagli solo la scelta j pari. La scelta j dispari, comunque, porta ad analoghi risultati e osservazioni (si veda []).

Dunque, mettendo insieme le equazioni ... per j pari, si ottiene il seguente sistema lineare triangolare inferiore:

$$\begin{bmatrix} \binom{2}{0} & & & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{2} & & & \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & & \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Da questo possiamo ricavare i primi numeri di Bernoulli:

$$1,\ ,\frac{1}{6},\ -\frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ -\frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ -\frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},\ -\frac{47021}{6630}.$$

Vogliamo dare una forma analitica alla matrice dei coefficienti W di tale sistema lineare. Per farlo è sufficiente osservare che tale matrice è una sottomatrice della matrice di Tartaglia, la quale ammette una forma analitica,

$$X = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \\ \binom{\mathit{1}}{\mathit{0}} & \binom{1}{1} \\ \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{\mathit{3}}{\mathit{0}} & \binom{3}{1} & \binom{\mathit{3}}{\mathit{2}} & \binom{3}{3} \\ \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{0}} & \binom{4}{1} & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{\mathit{5}}{\mathit{0}} & \binom{5}{1} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{2}} & \binom{5}{3} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{4}} & \binom{5}{5} \\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{0}} & \binom{6}{1} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} & \binom{6}{3} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Y^k,\ \ Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(l'ultima uguaglianza vale perchè $[X]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!}[Y^{i-j}]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!} j \cdots (i-2)(i-1) = \binom{i-1}{j-1}$, $1 \le j \le i \le n$), fare un po' di conti, e concludere che

$$W = Z^T \phi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} \phi^k, \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & 0 \\ & 12 & 0 \\ & & 30 & 0 \\ & & & 56 & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque riscrivere il sistema lineare come segue:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} \phi^k \mathbf{b} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/5 \\ 1/7 \\ \cdot \end{bmatrix}. \qquad (quasi-pari)$$

Ora mostriamo che tale sistema è equivalente a un sistema lineare triangolare inferiore di Toeplitz. Il nostro scopo è sostituire ϕ, una matrice sulla cui sottodiagonale ci sono elementi tutti diversi tra loro, con una matrice sulla cui sottodiagonale ci sono elementi tutti uguali tra loro.

Sia $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, $d_i \neq 0$. Se si scrive la matrice $D\phi D^{-1}$ ci si accorge che si può imporre che essa sia uguale a una matrice del tipo xZ, è infatti sufficiente porre $d_k = x^{k-1} d_1/(2k-2)!$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Sia dunque

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ & \frac{x}{2!} \\ & & \frac{x^2}{4!} \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

(si è scelto $d_1 = 1$). Allora da (quasi-pari) segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} D\phi^k D^{-1} D\mathbf{b} = D\mathbf{q}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} (D\phi D^{-1})^k D\mathbf{b} = D\mathbf{q}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k D\mathbf{b} = D\mathbf{q}.$$

Riassumendo, sia $\mathbf{z}$ il vettore $D\mathbf{b}$. Allora il vettore $\{\mathbf{b}\}_n$ (ovvero, i primi n numeri di Bernoulli) può essere ottenuto:

1 calcolando le prime n componenti della soluzione del seguente sistema lineare triangolare inferiore di Toeplitz:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k \right) \mathbf{z} = D\mathbf{q} \qquad (pari)$$

(ovvero, $\{\mathbf{z}\}_n$ tale che $\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k \}_n \{\mathbf{z}\}_n = \{D\mathbf{q}\}_n$);

2 risolvendo il sistema lineare $\{D\}_n\{\mathbf{b}\}_n = \{\mathbf{z}\}_n$ nel campo razionale.

Osserviamo che il calcolo in 1 può essere effettuato con l'algoritmo descritto nella sezione precedente ad un costo $O(n \log_2 n)$ e che tale algoritmo può essere reso stabile numericamente mediante una scelta opportuna del parametro x. Ad esempio, osservando che $z_n = \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} B_{2n-2}(0)$, la scelta $x = (2\pi)^2$ renderebbe la successione z_n, $n \in \mathbb{N}$, limitata; infatti in tal caso $|z_n| \to 2$ se $n \to +\infty$, per la formula di Eulero. Effettuato il calcolo in 1 si ottengono n numeri macchina che costituiscono una ottima approssimazione in $\mathbb{R}$ delle quantità $x^s B_{2s}(0)/(2s)!$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Poi, nella fase 2, da questi numeri macchina occorre ricavare i numeri *razionali* di Bernoulli $B_{2s}(0)$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Il sitema lineare triangolare inferiore di Toeplitz-Ramanujan risolto dai numeri di Bernoulli

In [] Ramanujan scrive esplicitamente 11 equazioni soddisfatte dai primi 11 numeri di Bernoulli. Esse sono le prime di un numero infinito di equazioni soddisfatte dagli infiniti numeri di Bernoulli. Riscrivendo tali equazioni secondo le nostre notazioni e definizioni, si ottiene il seguente sistema lineare triangolare inferiore:

$$\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&&& \\
0 & 1 &&&&&&&&&& \\
0 & 0 & 1 &&&&&&&&& \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 &&&&&&&& \\
0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 &&&&&&& \\
0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 1 &&&&&& \\
\frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{143}{4} & 0 & 0 & 1 &&&&& \\
0 & 4 & 0 & 0 & \frac{286}{3} & 0 & 0 & 1 &&&& \\
0 & 0 & \frac{204}{5} & 0 & 0 & 221 & 0 & 0 & 1 &&& \\
\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{1938}{7} & 0 & 0 & \frac{3230}{7} & 0 & 0 & 1 && \\
0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{7106}{5} & 0 & 0 & \frac{3553}{4} & 0 & 0 & 1 & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ B_8(0) \\ B_{10}(0) \\ B_{12}(0) \\ B_{14}(0) \\ B_{16}(0) \\ B_{18}(0) \\ B_{20}(0) \\ B_{22}(0) \\ . \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{42} \\ \frac{1}{45} \\ -\frac{1}{132} \\ \frac{4}{455} \\ \frac{1}{120} \\ -\frac{1}{306} \\ \frac{3}{665} \\ \frac{1}{231} \\ -\frac{1}{552} \\ . \end{bmatrix}$$

Si noti che usando le utime tre equazioni di tale sistema e la conoscenza dei numeri di Bernoulli $B_2(0), \ldots, B_{16}(0)$, si ottengono i seguenti ulteriori numeri di Bernoulli:

$$B_{18}(0) = \frac{43867}{798}, \quad B_{20}(0) = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22}(0) = \frac{854513}{138}.$$

Sia R la matrice semi-infinita dei coefficienti del sistema di Ramanujan di cui sopra. Ricordando la definizione della matrice semi-infinita lower-shift Z e del vettore semi-infinito $\mathbf{b} = [B_0(0)\, B_2(0)\, B_4(0)\, \ldots]^T$, osserviamo che il sistema si può riscrivere come $RZ^T\mathbf{b} = \mathbf{f}$, dove con $\mathbf{f}$ abbiamo indicato ovviamente il vettore sulla destra dei temini noti. Apparentemente sembra che gli elementi non nulli di R e di $\mathbf{f}$ non abbiano nulla a che fare tra loro, cioè sembra impossibile indovinare, solamente osservando le 11 equazioni di cui sopra, la dodicesima equazione del sistema di Ramanujan. Si può solo indovinare che gli elementi diversi da zero della matrice R sono nella stessa posizione dove sono gli elementi diversi da zero di una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $\tilde{R}$ del tipo $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k Z^{3k}$.

In realtà, è facile accorgersi che *deve valere* la seguente identità matriciale

$$R\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\tilde{R}, \quad \Lambda = Z^T D Z = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{x^2}{4!} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{x^3}{6!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

dove D è definita in ... e

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{3k}}{(6k+2)!(2k+1)} Z^{3k} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ u & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & u & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ v & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & v & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & & & \\ w & 0 & 0 & v & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & w & 0 & 0 & v & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \\ u &= \frac{2x^3}{8!3}, \quad v = \frac{2x^6}{14!5}, \quad ,w = \frac{2x^9}{20!7}. \end{aligned}$$

infatti la sottomatrice 11×11 in alto a sinistra di $R\Lambda^{-1}$ è uguale alla sottomatrice 11×11 in alto a sinistra di $\Lambda^{-1}\tilde{R}$.

Supponendo che questa congettura sia esatta, si hanno le seguenti equivalenze:

$$\begin{array}{l} RZ^T\mathbf{b} = \mathbf{f} \;\text{ iff} \\ R\Lambda^{-1}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f} \;\text{ iff} \\ \Lambda^{-1}\tilde{R}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f} \;\text{ iff} \\ \tilde{R}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \tilde{R}Z^T D\mathbf{b} = \Lambda\mathbf{f}. \end{array}$$

Quindi, il vettore $\Lambda Z^T\mathbf{b}$ è soluzione di un sistema triangolare inferiore di Toeplitz *sparso*, ovvero che alterna due diagonali nulle alle diagonali non nulle, che chiamiamo di Toeplitz-Ramanujan.

Se rappresentiamo la prima colonna di una matrice A triangolare inferiore di Toeplitz in orizzontale, la prima fase degli algoritmi di costo $O(n\log_2 n)$ (raccontato in ...) oppure $O(n\log_3 n)$ [] per la risoluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ovvero la fase in cui si trasforma A nella matrice identica, può essere rappresentata schematicamente attraverso i seguenti passi:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \cdot & \rightarrow \\ 1 & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \cdot & \rightarrow \\ 1 & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\ \cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdot \end{array} \qquad (O(n\log_2 n))$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccc}
1 & * & \cdot & \rightarrow \\
1 & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
\cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdot & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$(O(n \log_3 n))$

(quattro passi se $n = 16$ oppure tre passi se $n = 27$). Per calcolare i numeri di Bernoulli possiamo quindi utilizzare tali algoritmi perché sappiamo che i numeri di Bernoulli, a meno di fattori noti, risolvono i sistemi triangolari di Toeplitz ..., ... e il sistema triangolare di Toeplitz-Ramanujan ... trovato in questa Sezione. È evidente che applicando il secondo algoritmo al sistema di Toeplitz-Ramanujan si risparmia il primo passo della sua prima fase.

CONCLUSIONI

Riassumendo, abbiamo studiato più o meno approfonditamente, le algebre di matrici triangolari di Toeplitz, le circolanti e (-1)-circolanti, e le algebre tau e gamma come, rispettivamente, esempi di algebre di tipo Jacobi [ ] e di tipo Hartley [ ]. In particolare si è visto che, per ognuna di queste algebre $\mathcal{L}$, valgono le seguenti affermazioni:

1 $\forall\ A \in \mathcal{L}$, lo spettro di A, $\lambda(A)$, è calcolabile dagli elementi di A con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche

2 $\forall\ A \in \mathcal{L}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, il prodotto matrice-vettore $A \cdot \mathbf{b}$ è calcolabile con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche

3 $\forall\ A \in \mathcal{L}$ invertibile, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, il vettore $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è calcolabile con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche

In altre parole, i principali problemi dell'algebra lineare numerica associati ad una matrice $n \times n$ A, ovvero la risoluzione di un sistema lineare con A come matrice dei coefficienti, il prodotto di A per un vettore, e il calcolo degli autovalori di A, sono facilmente risolvibili quando A è una matrice di una delle algebre $\mathcal{L}$ sopra elencate. Per questo motivo tali spazi $\mathcal{L}$ sono esempi di algebre di matrici di bassa complessità computazionale (low complexity matrix algebras).

Ma, come vedremo meglio in seguito, ciò che è più interessante, è che tali problemi possono essere risolti efficientemente anche quando la matrice A è solo *vicina strutturalmente* ad algebre di bassa complessità computazionale.

Ad esempio, se si sapesse che per una matrice A $n \times n$ strutturata, ovvero definita per ogni n, vale una uguaglianza del tipo

$$A = \sum_{i=1}^{\alpha} M_i N_i, \quad M_i \in \mathcal{L},\ N_i \in \mathcal{L}',$$

con $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}'$ entrambe algebre di bassa complessità computazionale, e α indipendente da n, allora si avrebbe immediatamente un algoritmo di costo $O(n \log_2 n)$ per il calcolo di $A \cdot \mathbf{b}$.

Oppure, se per una matrice A $n \times n$ definita positiva strutturata si potesse trovare un'algebra di bassa complessità computazionale $\mathcal{L}$ e $M \in \mathcal{L}$ definita positiva tali che gli autovalori di $M^{-1}A$ (che sono positivi!) sono raggruppati su 1, ovvero il numero

$$\alpha = \#\{\lambda \in \lambda(M^{-1}A) :\ |\lambda - 1| > \varepsilon\}$$

degli *outliers* di $M^{-1}A$ è indipendente da n, allora $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sarebbe calcolabile effettuando pochi passi del metodo del Gradiente Coniugato applicato al sistema $(E^{-1}AE^{-T})(E^T\mathbf{x}) = E^{-1}\mathbf{b}$, $EE^T = M$, e le operazioni in più per passo, date dalla risoluzione di un sistema del tipo $M\mathbf{z} = \mathbf{h}_k$, non rallenterebbero il metodo perché sarebbero di costo $O(n \log_2 n)$ e quindi in generale inferiore o al più uguale al costo del prodotto matrice-vettore $A \cdot \mathbf{u}_k$.

Ancora, se ad una matrice A $n \times n$ non negativa, irriducibile e stocastica per colonne, che sia dotata di qualche struttura, tale che $1 > |\lambda(A)|$ per tutti i rimanenti $n-1$ autovalori $\lambda(A)$ di A (si pensi alla matrice di Google), si potesse associare una algebra di bassa complessità computazionale $\mathcal{L}$ e $M \in \mathcal{L}$ non negativa stocastica per colonne tali che

$$|\lambda(A)| \leq \alpha = \max\{|\lambda(M)| : \lambda(M) < 1\} < 1$$

allora si potrebbe pensare di modificare A in modo che α sia minimo e, di conseguenza, la velocità del metodo delle potenze nel calcolo dell'autovettore dominante di A sia massima.

Per maggiori dettagli si vedano, rispettivamente, ..., ... e ... [].

In realtà vedremo anche che le algebre di matrici di bassa complessità $\mathcal{L}$, tra le quali possiamo annoverare, oltre quelle menzionate, anche le algebre di tipo Haar e Householder [], grazie alle loro proprietà 1,2,3, possono risultare estremamente utili nell'ideare algoritmi efficienti per la risoluzione di problemi non lineari di grandi dimensioni, come il calcolo del minimo delle funzioni errore associate a reti per l'apprendimento oppure alla ricostruzione di immagini con rumore [], [].