Rome-Moscow school of Matrix Methods and Applied Linear Algebra
Rome, Sept 19 - Oct 3, 2010, Moscow, Oct 10 - Oct 24, 2010 Carmine Di Fiore

In questi appunti si introducono e si studiano le matrici circolanti, τ e Toeplitz, le algebre di Hessenberg e le decomposizioni di dislocamento, gli spazi di classe $\mathbb{V}$ e le migliori approssimazioni nel senso dei minimi quadrati in tali spazi. Come conseguenza dei risultati presentati, la scelta delle matrici coinvolte nelle decomposizioni di dislocamento, la scelta dei precondizionatori nella risoluzione di sistemi lineari e la scelta delle approssimazioni dell'Hessiano nei metodi di minimizzazione quasi-Newton, diventa possibile in classi più ampie di algebre di matrici di bassa complessità.

La matrice di Fourier, le matrici circolanti, e le trasformate discrete veloci

Si consideri la seguente matrice $n \times n$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $\omega \in \mathbb{C}$. Si noti che

$$P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \; P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ \\ \omega^{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix},$$

dove l'ultima uguaglianza vale se $\omega^n = 1$. Più in generale, se $\omega^n = 1$, valgono le seguenti identità vettoriali

$$P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \\ \omega^{(n-1)j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^j \\ \\ \omega^{(n-1)j} \\ 1 \end{bmatrix} = \omega^j \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^j \\ \\ \omega^{(n-1)j} \end{bmatrix}, \; j = 0, 1, \dots, n-1,$$

o, equivalentemente, la seguente identità matriciale

$$P_1 W = W D_{1\omega^{n-1}},$$

$$D_{1\omega^{n-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega & \\ & & \\ & & \omega^{n-1} \end{bmatrix}, \; W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^j & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1)j} & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Proposizione. Se $\omega^n = 1$ e se $\omega^j \neq 1$ per $0 < j < n$, allora $W^* W = nI$.

dimostrazione: poiché $|\omega| = 1$, $\overline{\omega} = \omega^{-1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} [W^*W]_{ij} &= [\overline{W}W]_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n [\overline{W}]_{ik}[W]_{kj} = \sum_{k=1}^n \overline{\omega}^{(i-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(j-1)} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \omega^{(k-1)(j-i)} = \sum_{k=1}^n (\omega^{j-i})^{k-1}. \end{aligned}$$

Quindi $[W^*W]_{ij} = n$ se $i = j$, e $[W^*W]_{ij} = \frac{1-(\omega^{j-i})^n}{1-\omega^{j-i}} = 0$ se $i \neq j$ (si noti che l'ipotesi $\omega^j \neq 1$ per $0 < j < n$ è essenziale per rendere $1 - \omega^{j-i} \neq 0$).

Per il risultato della Proposizione, possiamo dire che la seguente matrice (simmetrica) di Fourier

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} W$$

è unitaria, i.e. $F^*F = I$.

Esercizio. Provare che $F^2 = JP_1$ dove J è la matrice di permutazione $J\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$ (J è di solito chiamata anti-identica).

L'identità matriciale soddisfatta da P_1 e da W può essere ovviamente riscritta in termini di F, $P_1 F = F D_{1\omega^{n-1}}$, quindi otteniamo l'uguaglianza

$$P_1 = F D_{1\omega^{n-1}} F^*$$

da cui segue che la matrice di Fourier diagonalizza la matrice P_1, o, più precisamente, che *le colonne della matrice di Fourier formano un sistema di n autovettori unitariamente ortonormali per la matrice P_1 con corrispondenti autovalori $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.*

Ma se F diagonalizza P_1, allora diagonalizza tutti i polinomi in P_1:

$$\begin{aligned}
P_1^{k-1} &= F D_{1\omega^{n-1}}^{k-1} F^*, \\
\textstyle\sum_{k=1}^n a_k P_1^{k-1} &= F \textstyle\sum_{k=1}^n a_k D_{1\omega^{n-1}}^{k-1} F^* \\
&= F \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k & & \\ & \sum_{k=1}^n a_k \omega^{k-1} & \\ & & \sum_{k=1}^n a_k \omega^{(n-1)(k-1)} \end{bmatrix} F^* \\
&= F d(W\mathbf{a}) F^* = \sqrt{n} F d(F\mathbf{a}) F^*
\end{aligned}$$

dove con $d(\mathbf{z})$ indichiamo la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Scriviamo le matrici P_1^{k-1}, $k = 1, \ldots, n$, e la matrice $\sum_{k=1}^n a_k P_1^{k-1}$ nel caso $n = 4$:

$$P_1^0 = I,\ P_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1^4 = P_1^3 P_1 = P_1^T P_1 = I = P_1^0,$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k P_1^{k-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{bmatrix} = \sqrt{4} F d(F\mathbf{a}) F^*,\ F = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix},$$

$$\omega^4 = 1,\ \omega^j \neq 1,\ 0 < j < 4\ (\omega = e^{\pm \mathbf{i} 2\pi/4}).$$

Si noti che, per n generico, abbiamo le identità $\mathbf{e}_1^T P_1^{k-1} = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \ldots, n$, e $P_1^n = I$ (provarle!). Ne segue che lo spazio $C = \{p(P_1)\}$ di tutti ipolinomi in P_1 è generato dalle matrici $J_k = P_1^{k-1}$; il particolare polinomio $\sum_{k=1}^n a_k J_k$ verrà indicato con il simbolo $C(\mathbf{a})$. Si osserva che $C(\mathbf{a})$ è la matrice di C la cui prima riga è $\mathbf{a}^T$:

$$C(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n a_k J_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & & & a_{n-1} \\ & & & & \\ a_3 & & & & a_2 \\ a_2 & a_3 & & a_n & a_1 \end{bmatrix} = F d(F^T \mathbf{a}) d(F^T \mathbf{e}_1)^{-1} F^{-1}.$$

C è noto come lo spazio delle matrici circolanti.

Esercizio. (i) Si ripeta tutto, partendo dalla matrice $n \times n$

$$P_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

e arrivando alla matrice (-1)-circolante la cui prima riga è $\mathbf{a}^T$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$:

$$C_{-1}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ -a_n & a_1 & & & a_{n-1} \\ & & & & \\ -a_3 & & & & a_2 \\ -a_2 & -a_3 & & -a_n & a_1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Sia T una matrice di Toeplitz $n \times n$, i.e. $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$, per certi $t_k \in \mathbb{C}$. Mostrare che T può essere riscritta come la somma di una circolante e di una (-1)-circolante, cioè, $T = C(\mathbf{a}) + C_{-1}(\mathbf{b})$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Perché le matrici circolanti possono essere interessanti nelle applicazioni dell'algebra lineare? La principale ragione è nel fatto che il prodotto matrice-vettore $C(\mathbf{a})\mathbf{z}$ può essere calcolato con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche (mentre, di solito, un prodotto matrice-vettore richiede n^2 moltiplicazioni).

Proposizione FFT. Dato $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, la complessità del prodotto matrice-vettore $F\mathbf{z}$ è al più $O(n \log_2 n)$. Tale operazione è chiamata trasformata discreta di Fourier (DFT) di $\mathbf{z}$. Come conseguenza, il prodotto matrice-vettore $C(\mathbf{a})\mathbf{z}$ è calcolabile effettuando due DFT (dopo la pre-elaborazione della DFT $F\mathbf{a}$).

dimostrazione: poiché $\omega^{(i-1)(k-1)}$ è l'(i,k) elemento di W e z_k è il k-esimo elemento di $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned} (W\mathbf{z})_i &= \textstyle\sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} z_k = \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-2)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-1)} z_{2j} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2(j-1)+1)} z_{2j} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j}. \end{aligned}$$

Si noti che ω è di fatto una funzione di n, cioè la giusta notazione per ω dovrebbe essere ω_n. Allora $\omega^2 = \omega_n^2$ è tale che $(\omega_n^2)^{n/2} = 1$ e $(\omega_n^2)^i \neq 1$ $0 < i < n/2$; in altre parole $\omega_n^2 = \omega_{n/2}$. Quindi, abbiamo le identità

$$(W_n\mathbf{z})_i = \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j}, \ i = 1, 2, \dots, n. \quad (?)$$

Ne segue che, per $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$,

$$(W_n\mathbf{z})_i = (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_i + \omega_n^{i-1}(W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \\ z_n \end{bmatrix})_i.$$

Inoltre, ponendo $i = \frac{n}{2} + k$, $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$, in (?), otteniamo

$$\begin{aligned} (W_n\mathbf{z})_{\frac{n}{2}+k} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{\frac{n}{2}} \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} - \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\ &= (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_k - \omega_n^{k-1}(W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \\ z_n \end{bmatrix})_k, \ k = 1, \dots, \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

($\omega_n^{\frac{n}{2}} = -1$; si pensi $\omega = e^{\pm \mathbf{i} 2\pi/n}$). Le precedenti uguaglianze scalari possono essere riscritte in forma compatta:

$$W_n\mathbf{z} = \begin{bmatrix} I & D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \\ I & -D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n/2} & 0 \\ 0 & W_{n/2} \end{bmatrix} Q\mathbf{z},$$

$$D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega_n & \\ & & \\ & & \omega_n^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (??)$$

Se c_n denota la complessità del prodotto matrice-vettore $F_n\mathbf{z}$, allora, per la formula precedente,

$$c_n \leq 2c_{n/2} + rn, \ r \text{ costante.}$$

Ma questo implica $c_n = O(n \log_2 n)$. La dimostrazione dell'ultima affermazione è lasciata al lettore.

Ovviamente, ogni volta che una matrice $n \times n$ U, ben definita per tutti gli n, soddisfa per n pari una identità del tipo

$$U_n = \begin{bmatrix} \text{sparse matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n/2} & 0 \\ 0 & U_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{permutation matrix} \end{bmatrix},$$

si può dire che il prodotto matrice-vettore $U_n\mathbf{z}$ può essere calcolato con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche. L'identità di cui sopra è verificata per almeno 10 matrici U, la trasformata di Fourier e la sua versione (-1), e le otto trasformate di tipo Hartley. Si noti, comunque, che ci sono anche altre 16 trasformate discrete di complessità $O(n \log_2 n)$, di tipo seno e di tipo coseno. Vedi [],[].

Esercizio G. Si provi che la matrice $n \times n$ $G = G_n$ definita da

$$G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\cos\frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2n} + \sin\frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2n}), \; i,j = 0,\dots,n-1,$$

è simmetrica, persimmetrica, reale, unitaria, e soddisfa l'identità:

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} R_+ & R_- \\ -R_-J & R_+J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{n/2} & 0 \\ 0 & G_{n/2} \end{bmatrix} Q, \; R_\pm = D_c \pm D_s J,$$

(J $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ anti-identica) per opportune matrici diagonali $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ D_c e D_s. Si provi, inoltre, che ciascuna riga di G_n ha almeno un elemento nullo quando $n = 2 + 4s$ (ciò è come dire, vedremo, che lo spazio $\{Gd(\mathbf{z})G : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ non è uno spazio-h per tali valori di n); e che, invece, per tutti gli altri n, $[G_n]_{1k} \neq 0 \; \forall \, k$ (i.e., per tutti gli altri n, lo spazio $\{Gd(\mathbf{z})G : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ è uno spazio-1).

Esercizio. Si provi che lo spazio $C_{-1}^S + JC_{-1}^{SK}$, C_{-1}^S (-1)-circolanti simmetriche $n \times n$, C_{-1}^{SK} (-1)-circolanti antisimmetriche $n \times n$, è una algebra commutativa di matrici (una matrice A è antisimmetrica se if $A^T = -A$).

La matrice seno e l'algebra (commutativa) delle matrici tau

Si consideri la matrice $n \times n$

$$P_0 + P_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e si ponga $J_1 = I$, e $J_2 = P_0 + P_0^T$. Si noti che $\mathbf{e}_1^T J_1 = \mathbf{e}_1^T$, $\mathbf{e}_1^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$. Inoltre, poiché

$$(P_0 + P_0^T)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I,$$

abbiamo $\mathbf{e}_1^T((P_0 + P_0^T)^2 - I) = [0\,0\,1\,0 \cdots 0] = \mathbf{e}_3^T$. Si ponga $J_3 = (P_0 + P_0^T)^2 - I = J_2(P_0 + P_0^T) - J_1$; allora $\mathbf{e}_1^T J_3 = \mathbf{e}_3^T$.

Più in generale, si ponga $J_{i+1} = J_i(P_0 + P_0^T) - J_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$. La matrice J_{i+1} è un polinomio in $P_0 + P_0^T$ di grado i con la proprietà $\mathbf{e}_1^T J_{i+1} = \mathbf{e}_{i+1}^T$.

dimostrazione: supponiamo di sapere che $\mathbf{e}_1^T J_j = \mathbf{e}_j^T$, $j = 1, \dots, i$ (ed effettivamente lo sappiamo per $i = 1, 2$); allora

$$\mathbf{e}_1^T J_{i+1} = \mathbf{e}_1^T(J_i(P_0 + P_0^T) - J_{i-1}) = (\mathbf{e}_i^T(P_0 + P_0^T)) - \mathbf{e}_{i-1}^T = (\mathbf{e}_{i-1}^T + \mathbf{e}_{i+1}^T) - \mathbf{e}_{i-1}^T = \mathbf{e}_{i+1}^T.$$

Poiché $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sono linearmente indipendenti, possiamo dire che esse generano l'insieme $\{p(P_0 + P_0^T)\}$ di tutti i polinomi nella matrice $P_0 + P_0^T$ (si usi il teorema di Cailey-Hamilton). Chiamiamo τ tale insieme. Si noti che le matrici di τ sono definite una volta che la loro prima riga è nota; con il simbolo $\tau(\mathbf{a})$ denotiamo la matrice di τ la cui prima riga è $\mathbf{a}^T$, i.e. la matrice $\sum_k a_k J_k$.

Troviamo una rappresentazione utile di τ e, in particolare, di $\tau(\mathbf{a})$. Innanzitutto si osservi che valgono le seguenti uguaglianze vettoriali:

$$\begin{bmatrix} & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\frac{j\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2j\pi}{n+1} \\ \\ \sin\frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix} = 2\cos\frac{j\pi}{n+1} \begin{bmatrix} \sin\frac{j\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2j\pi}{n+1} \\ \\ \sin\frac{nj\pi}{n+1} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tali n uguaglianze possono essere riscritte come una unica uguaglianza matriciale $(P_0 + P_0^T)S = SD$ dove S è la matrice

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\frac{ij\pi}{n+1}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

e D è la matrice diagonale con elementi diagonali $D_{jj} = 2\cos\frac{j\pi}{n+1}$. Si noti che la matrice S, chiamata matrice seno, è reale, simmetrica e unitaria (dimostrarlo!).

Osservazione. Sia $F_{2(n+1)}$ la matrice di Fourier di ordine $2(n+1)$. Allora la matrice seno S soddisfa la seguente relazione:

$$\mathbf{i}\big(I - F_{2(n+1)}^2\big)F_{2(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & S & \mathbf{0} & -SJ \\ 0 & \mathbf{0}^T & 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -JS & \mathbf{0} & JSJ \end{bmatrix}$$

(si noti che $F_{2(n+1)}^2$ è una matrice di permutazione). Come conseguenza, una trasformata seno può essere calcolata effettuando una trasformata discreta di Fourier.

Quindi, le colonne della matrice seno S formano un sistema di autovettori unitariamente ortonormali per la matrice $P_0 + P_0^T$. In altre parole, la matrice unitaria S diagonalizza $P_0 + P_0^T$ e, ovviamente, diagonalizza ogni polinomio in $P_0 + P_0^T$, i.e. ogni matrice τ:

$$\begin{aligned} &P_0 + P_0^T = SDS, \quad (P_0 + P_0^T)^k = SD^kS, \\ &\tau = \{p(P_0 + P_0^T)\} = \{\textstyle\sum_{k=1}^n a_k (P_0 + P_0^T)^{k-1} : a_k \in \mathbb{C}\} = \{Sd(\mathbf{z})S : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}. \end{aligned}$$

In particolare, è evidente che la matrice di τ con prima riga $\mathbf{a}^T$ è

$$\tau(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n a_k J_k = Sd(S^T\mathbf{a})d(S^T\mathbf{e}_1)^{-1}S^{-1}.$$

Quest'ultima formula implica che prodotti matrice-vettore coinvolgenti matrici τ hanno complessità al più $O(n\log_2 n)$.

Proposizione PC. Data $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ generica, abbiamo

$$\begin{aligned} &\{p(X)\} \subset \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}, \\ &\dim(\{p(X)\}) \le n \le \dim\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\} \end{aligned}$$

e se vale una identità allora vale anche l'altra identità. Quindi, X è non derogatoria se e solo se $\dim(\{p(X)\}) = n = \dim\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}$.

La Proposizione di cui sopra suggerisce la seguente ulteriore rappresentazione delo spazio τ:

$$\tau = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A(P_0 + P_0^T) = (P_0 + P_0^T)A\}.$$

Il fatto che ogni matrice di τ deve commutare con $P_0 + P_0^T$ è equivalente a richiedere che valgono le seguenti n^2 condizioni di *somma in croce*:

$$a_{i,j-1} + a_{i,j+1} = a_{i-1,j} + a_{i+1,j}, \;\; i,j = 1,\ldots,n$$

dove abbiamo posto $a_{0,j} = a_{n+1,j} = a_{i,0} = a_{i,n+1} = 0$, $i,j = 1,\ldots,n$. Possiamo usare tali condizioni per scrivere la generica matrice di τ la cui prima riga è $[a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$. Per esempio, per $n = 4$, possiamo dire che

$$\tau(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 + a_3 & a_2 + a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 + a_4 & a_1 + a_3 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \;\; J_1 = I, \;\; J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_2 - J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e così via.

Esercizio. Provare che per n pari la matrice J_2 è invertibile, e, se possibile, calcolare l'inversa.

soluzione: Sappiamo che se J_2 è invertibile, allora $J_2^{-1} \in \tau$ (dal fatto che J_2 commuta con $P_0 + P_0^T$ segue che anche J_2^{-1} commuta con $P_0 + P_0^T$!). Quindi $J_2^{-1} = \tau(\mathbf{z})$ per qualche $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Si noti che l'identità matriciale $\tau(\mathbf{z})J_2 = I$ è equivalente all'identità vettoriale $\mathbf{z}^T J_2 = \mathbf{e}_1^T$. Così, per esempio, per $n = 4$ abbiamo la condizione

$$[z_1 \;\, z_2 \;\, z_3 \;\, z_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \; 0 \; 0 \; 0],$$

che implica $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$, $z_4 = -1$, e, quindi,

$$J_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = J_3 - J_4.$$

La dimostrazione per $n = 6, 8, \ldots$ è lasciata al lettore.

Esercizio Ttau. Sia T una matrice di Toeplitz simmetrica $n \times n$, i.e. $T = (t_{|i-j|})_{i,j=1}^n$, per certi $t_k \in \mathbb{C}$. Mostrare che $T = A + B$ dove A è una matrice τ di ordine n e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; R \in \tau, \;\; R \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)}.$$

Esercizio. Scrivere matrici τ di rango uno (si provi inizialmente per $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $\ldots$)

Algebre di Hessenberg

Sia X la seguente matrice di Hessenberg inferiore 3×3

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Mostriamo adesso che lo spazio di tutti i polinomi in X è generato da tre matrici J_1, J_2, J_3 tali che $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, 2, 3$, a condizione che $X_{ii+1} \neq 0$, $i = 1, 2$.

Come J_1 prendiamo la matrice identica, $J_1 = X^0 = I$. Definiamo J_2:

$$X - a_{11}I = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{11} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_{11} \end{bmatrix},$$

$b_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$J_2 = \frac{1}{b_1}(X - a_{11}I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21}/b_1 & (a_{22} - a_{11})/b_1 & b_2/b_1 \\ a_{31}/b_1 & a_{32}/b_1 & (a_{33} - a_{11})/b_1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che $\mathbf{e}_1^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$. Poi, definiamo J_3:

$$J_2^2 = \begin{bmatrix} a_{22}/b_1 & (a_{22} - a_{11})/b_1 & b_2/b_1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix},$$

$b_2 \neq 0 \Rightarrow$

$$J_3 = \frac{b_1}{b_2}(J_2^2 - \frac{a_{22}}{b_1}I - \frac{a_{22} - a_{11}}{b_1}J_2).$$

Si noti che $\mathbf{e}_1^T J_3 = \mathbf{e}_3^T$. Infine, il teorema di Cailey-Hamilton implica la tesi, $\{p(X)\} = \text{Span}\,\{J_1, J_2, J_3\}$.

La seguente Proposizione generalizza a un generico n le osservazioni di cui sopra. Per una dimostrazione dettagliata si veda [].

Proposizione. Sia X una matrice di Hessenberg inferiore $n \times n$. Allora lo spazio H_X di tutti i polinomi in X

$$H_X = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^{k-1} : \alpha_k \in \mathbb{C}\}$$

è generato da n matrici $J_1, \ldots, J_n$ tali che $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \ldots, n$, a condizione che $X_{ii+1} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$; in tal caso, H_X è chiamato algebra di Hessenberg, e per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ c'è una unica matrice in H_X con prima riga $\mathbf{a}^T$, denotata $H_X(\mathbf{a})$, i.e. $H_X(\mathbf{a}) = \sum_k a_k J_k$.

Ovviamente, per la Proposizione PC, ogni algebra di Hessenberg H_X ammette anche la seguente rappresentazione

$$H_X = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : AX = XA\}.$$

Finora abbiamo visto due esempi di algebre di Hessenberg, le ξ-circolanti $\xi \neq 0$ ($X = P_\xi$) e le matrici tau ($X = P_0 + P_0^T$). Entrambe possono essere simultaneamente diagonalizzate da una opportuna matrice. Un esempio di algebra di Hessenberg le cui matrici non possono essere simultaneamente diagonalizzate è H_{P_0}, lo spazio di tutte le matrici triangolari superiori di Toeplitz. La matrice $H_{P_0}(\mathbf{a})$ è riportata qui sotto

$$H_{P_0}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & & a_n \\ & a_1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_2 \\ & & & & a_1 \end{bmatrix}.$$

La stessa matrice P_0, i.e. la matrice generante lo spazio, non è diagonalizzabile. (Vedremo, tuttavia, che H_{P_0} può essere immersa nello spazio delle matrici circolanti $2n \times 2n$, che sono diagonalizzabili).

Si noti che quando $X = P_0$ o, più in generale, quando $X = P_\xi$, le matrici J_k sono semplicemente le potenze di X, i.e. $J_k = X^{k-1}$. Per esempio, per $n = 3$

$$J_1 = I,\ J_2 = X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J_3 = X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \end{bmatrix}.$$

Le algebre di Hessenberg costituiscono una sottoclasse di algebre di matrici commutative della classe degli spazi-1 definiti qui sotto

Definizione. $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice spazio-1 se $\mathcal{L} = \text{Span}\{J_1, \ldots, n\}$ con J_k tali che $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \ldots, n$.

Ecco un esempio di spazio-1 $\mathcal{L}$ che non è un'algebra di Hessenberg:

$$\mathcal{L} = \{\begin{bmatrix} A & JB \\ JB & A \end{bmatrix} : A, B\ \frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \text{ circolanti}\}.$$

Si può facilmente provare che $\mathcal{L}$ è un'algebra non commutativa. Un esempio di spazio-1 che non è un'algebra di matrici è l'insieme di tutte le matrici di Toeplitz simmetriche $n \times n$ (vedi la prossima sezione).

Sistemi lineari di Toeplitz e decomposizioni di dislocamento

Una matrice $n \times n$ di Toeplitz è una matrice della forma $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$. Nelle applicazioni spesso occorre risolvere sistemi lineari di Toeplitz $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ecco qui di seguito una matrice 3×3 di Toeplitz:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Un esempio di matrice di Toeplitz T è la matrice dei coefficienti del sistema lineare derivante dalla risoluzione, col metodo delle differenze finite o degli elementi finiti, il problema differenziale con valori al bordo $-u" = f$, $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. In tal caso T è simmetrica e la sua prima riga è $[2\ -1\ 0 \cdots 0]$. Un altro esempio, importante nella probabilità applicata, è $T = (t^{|i-j|})_{i,j=1}^n$ con $|t|$ ($t \in \mathbb{C}$) minore di 1.

Esercizio. Lo spazio vettoriale di tutte le matrici di Toeplitz *simmetriche* $n \times n$ è uno spazio-1, essendo $(t_{|i-j|})_{i,j=1}^n$ uguale alla somma $\sum_{k=1}^n t_{k-1} J_k$ dove le J_k sono le matrici simmetriche di Toeplitz con prima riga $\mathbf{e}_k^T$. Si dimostri che tale spazio-1 non è un'algebra di matrici.

Nell'ambito della teoria di dislocamento è possibile ottenere alcune decomposizioni di T^{-1} coinvolgenti matrici di algebre di Hessenberg (o di più generali spazi-h commutativi) del tipo

$$T^{-1} = \sum_{k=1}^{\alpha} M_k N_k, \ 2 \leq \alpha \leq 4.$$

Di solito, le matrici M_k e N_k, che appaiono in tali formule, possono essere moltiplicate per un vettore con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche; come conseguenza si ottengono veloci risolutori diretti di sistemi lineari di Toeplitz. Qui sotto c'è un esempio di tali formule:

$$T^{-1} = L_1 U_1 + L_2 U_2. \tag{GS}$$

Le L_j e U_j sono opportune matrici triangolari di Toeplitz, inferiori e superiori, cioè elementi o trasposte di elementi dell'algebra di Hessenberg H_{P_0}.

Osservazione. Per la formula di Gohberg-Semencul (GS), se le matrici L_j e U_j sono note (un modo per ottenerle è indicato in []), allora il prodotto matrice-vettore $T^{-1}\mathbf{b}$ può essere calcolato con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche. Quindi, non contando la pre-elaborazione su T, la complessità del problema della risoluzione di un qualsiasi sistema di Toeplitz $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è al più $O(n \log_2 n)$.

dimostrazione: è sufficiente provare che una qualsiasi matrice di Toeplitz (in particolare una triangolare) può essere moltiplicata per un vettore effettuando un numero finito di trasformate discrete di Fourier. Quest'ultimo risultato è immediato se osserviamo che una qualsiasi matrice $n \times n$ di Toeplitz può essere immersa in una matrice circolante $(2n+k) \times (2n+k)$, $k \geq 0$; per esempio, se $n = 3$ abbiamo

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & & t_2 & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \\ & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_{-2} & & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

($k = 0$). È evidente che il vettore $T \cdot \mathbf{z}$ è la prima parte del vettore $C \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

La rappresentazione (GS) di cui sopra per l'inversa di una matrice di Toeplitz, che può essere molto utile per risolvere efficientemente sistemi lineari di Toeplitz [], segue dalla *decomposizione di dislocamento* stabilita nel seguente teorema

Teorema DD. Sia X una matrice di Hessenberg $n \times n$. Si supponga che $X_{ij} = X_{i+1,j+1}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$ (X ha struttura di Toeplitz), e che $b = X_{ii+1} \neq 0$, e si consideri l'algebra (commutativa) di Hessenberg H_X generata da X (si noti che H_X è uno spazio-1).

Si supponga che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è tale che $AX - XA = \sum_{m=1}^{\alpha} \mathbf{x}_m \mathbf{y}_m^T$. Allora

$$bA = -\sum_{m=1}^{\alpha} H_{P_0}(\tilde{\mathbf{x}}_m)^T H_X(\mathbf{y}_m) + bH_X(A^T\mathbf{e}_1) \qquad (DD)$$

dove, per $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $H_{P_0}(\mathbf{z})$ è la matrice triangolare superiore di Toeplitz con prima riga $\mathbf{z}^T$, $H_X(\mathbf{z})$ è la matrice di H_X con prima riga $\mathbf{z}^T$, e $\tilde{\mathbf{z}}$ è il vettore $[0\, z_1\, \cdots\, z_{n-1}]^T$.

Nota: Oltre DD valgono diverse altre decomposizioni di dislocamento, di carattere generale come DD, cioè rappresentanti generiche matrici A, oppure specializzate per matrici A centrosimmetriche (vedi []). Tali decomposizioni permettono di ottenere formule per l'inversa di matrici Toeplitz, Toeplitz più Hankel, e tipo Toeplitz più Hankel, utili per risolvere sistemi lineari di tipo Toeplitz più Hankel. Si ricorda che una matrice di Hankel non è altro che una matrice della forma JT dove T è Toeplitz (la ben nota matrice di Hilbert è un esempio di matrice di Hankel).

Per dimostrare il Teorema DD, è fondamentale il seguente Lemma.

Lemma []. Sia $\mathcal{L}$ uno spazio-1 commutativo di matrici $n\times n$, cioè $\mathcal{L} = \{\sum_k \alpha_k J_k : \alpha_k \in \mathbb{C}\}$, con $J_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tali che $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $J_k J_s = J_s J_k$. Sia X un elemento di $\mathcal{L}$, e si supponga che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia tale che $AX - XA = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$. Allora $\mathbf{x}^T\mathcal{L}(\mathbf{y})^T = \mathbf{0}^T$.

dimostrazione: si noti che l'uguaglianza $J_kJ_s = J_sJ_k$ implica $\mathbf{e}_1^T J_kJ_s = \mathbf{e}_1^T J_sJ_k$, $\mathbf{e}_k^T J_s = \mathbf{e}_s^T J_k\ \forall\, s,k$, quindi

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{x}^T\mathcal{L}(\mathbf{y})^T\mathbf{e}_r & = & \mathbf{x}^T(\sum_k y_kJ_k)^T\mathbf{e}_r = \mathbf{x}^T\sum_k y_kJ_k^T\mathbf{e}_r \\
& = & \mathbf{x}^T\sum_k y_kJ_r^T\mathbf{e}_k = \mathbf{x}^TJ_r^T\sum_k y_k\mathbf{e}_k \\
& = & \mathbf{x}^TJ_r^T\mathbf{y} = \sum_{i,j} x_iy_j[J_r^T]_{ij} \\
& = & \sum_{i,j} x_iy_j[J_r]_{ji} = \sum_{i,j}[AX-XA]_{ij}[J_r]_{ji} \\
& = & \sum_i[(AX-XA)J_r]_{ii} = \sum_i[(AJ_r)X - X(AJ_r)]_{ii} \\
& = & \mathrm{tr}\,((AJ_r)X) - \mathrm{tr}\,(X(AJ_r)) = 0
\end{array}$$

(si ricorda che le due matrici MN e NM, $M,N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hanno lo stesso polinomio caratteristico, anche se può accadere (nel caso $\det(M) = \det(N) = 0$) che MN e NM non siano simili tra loro).

Riportiamo adesso una bozza della dimostrazione del Teorema DD (per una dimostrazione più dettagliata vedi []). Per ottenere l'identità (DD), che è del tipo

$$bA = E + bH_X(A^T\mathbf{e}_1),$$

è sufficiente mostrare l'uguaglianza

$$EX - XE = (bA)X - X(bA), \qquad (***)$$

e osservare che la prima riga di E è nulla. Infatti, l'uguaglianza di cui sopra implica $(bA-E)X - X(bA-E) = 0$, e quindi ci permette di concludere che $bA - E \in H_X$. Il Lemma, applicato per $\mathcal{L} = H_X$, è fondamentale nella dimostrazione di (***).

Una algebra di matrici che non è uno spazio-1: la classe degli spazi in $\mathbb{V}$

Ricordiamo che una matrice A si dice simmetrica se $A^T = A$ ($a_{ji} = a_{ij}$), antisimmetrica se $A^T = -A$ ($a_{ji} = -a_{ij}$) e persimmetrica se $A^T = JAJ$ ($a_{ji} = a_{n+1-i,n+1-j}$).

Si consideri una matrice 6×6 (-1)-circolante simmetrica $A \in C^S_{-1}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & -a_2 & -a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & -a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ -a_2 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix},$$

una matrice 6×6 (-1)-circolante antisimmetrica $B \in C^{SK}_{-1}$, e la matrice JB,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -b_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix}, \; JB = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 \\ -b_2 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 & b_2 \\ -b_2 & -b_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Lo spazio vettoriale γ di tutte le matrici del tipo $A + JB$ ha dimensione uguale a 6 (si usi la formula $\dim(A + JB) = \dim(A) + \dim(JB) - \dim(A \cap JB)$).

Mostriamo adesso che non esiste una base $\{J_k\}$ di γ tale che $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, cioè mostriamo che γ non è uno spazio-1. Si noti che

$$\mathbf{e}_1^T(A + JB) = [(a_0 - b_1)(a_1 - b_2)(a_2 - b_3)(-b_2)(-a_2 - b_1)(-a_1)],$$

quindi, l'uguaglianza $\mathbf{e}_1^T(A + JB) = \mathbf{e}_2^T$ è soddisfatta se e solo se

$$a_0 - b_1 = 0,\ a_1 - b_2 = 1,\ a_2 - b_3 = 0,\ -b_2 = 0,\ -a_2 - b_1 = 0,\ -a_1 = 0.$$

Poiché devono essere verificate entrambe le condizioni $b_2 = 0$ e $b_2 = -1$, non può esistere una matrice $J_2 \in \gamma$ tale che $\mathbf{e}_1^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$.

Tuttavia, esiste una base $\{J_k\}$ di γ che soddisfa le identità $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6)^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Per esempio, una matrice $J_2 \in \gamma$ con la proprietà $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$ si ottiene come segue. Si noti che

$$\mathbf{e}_6^T(A + JB) = [(-a_1)(-a_2 + b_1)(b_2)(a_2 + b_3)(a_1 + b_2)(a_0 + b_1)],$$

quindi, per la somma della prima e della sesta riga di $A + JB$, otteniamo la formula

$$\begin{aligned}&(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T(A + JB)\\ &= [(a_0 - b_1 - a_1)(a_1 - b_2 - a_2 + b_1)(a_2 - b_3 + b_2)(-b_2 + a_2 + b_3)(-a_2 - b_1 + a_1 + b_2)(-a_1 + a_0 + b_1)].\end{aligned}$$

Ne segue che la condizione $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T(A + JB) = \mathbf{e}_2^T$ è soddisfatta se e solo se il seguente sistema di equazioni lineari ha soluzione

$$\begin{aligned}&a_0 - b_1 - a_1 = 0, \quad a_1 - b_2 - a_2 + b_1 = 1,\\ &a_2 - b_3 + b_2 = 0, \quad -b_2 + a_2 + b_3 = 0,\\ &-a_2 - b_1 + a_1 + b_2 = 0, \quad -a_1 + a_0 + b_1 = 0,\end{aligned}$$

e tale sistema ha l'unica soluzione $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = b_3 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = 0$. La matrice $J_2 \in \gamma$ tale che $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T J_2 = \mathbf{e}_2^T$ è riportata qui di seguito:

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Analogamente si ottengono le altre matrici J_k, per cui $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T J_k = \mathbf{e}_k^T$:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \; J_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

($a_1 = a_2 = 0$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_2 = b_3 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$), ($a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = -\frac{1}{2}$),

$$J_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; J_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

($a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = \frac{1}{2}$), ($a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = b_3 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$),

$$J_6 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

($a_1 = a_2 = 0$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = b_3 = \frac{1}{2}$).

Ovviamente si ha $\gamma = \mathrm{Span}\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$ (le J_k sono linearmente indipendenti!). La matrice $\sum_k a_k J_k$ viene indicata con il simbolo $\gamma(\mathbf{a})$. Si noti che $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T \gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T$, per questo $\gamma(\mathbf{a})$ è chiamata la matrice di γ la cui $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)$-riga è $\mathbf{a}^T$.

Più in generale, si può facilmente dimostrare che l'insieme $\gamma = C_{-1}^S + J C_{-1}^{SK}$, C_{-1}^S $n \times n$ (-1)-circolanti simmetriche, C_{-1}^{SK} $n \times n$ (-1)-circolanti antisimmetriche, è uno spazio vettoriale di dimensione n, ed è una algebra di matrici commutativa. Inoltre, è uno spazio-1 se e solo se n è uno degli interi $\{3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, \ldots\}$; per i rimanenti valori di n, cioè per $n = 2 + 4s$, $s \in \mathbb{N}$, nessuna riga di una matrice $A + JB$ di γ determina $A + JB$, in altre parole, non c'è nessun indice h per cui esiste una base $\{J_k\}$ di γ con la proprietà $\mathbf{e}_h^T J_k = \mathbf{e}_k^T$. Invece, per ogni n la somma della prima e della n-esima riga di

$A+JB$ determina $A+JB$, cioè esiste una base $\{J_k\}$ di γ con la proprietà $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_n)^T J_k = \mathbf{e}_k^T$.

Le matrici di γ possono essere simultaneamente diagonalizzate da una trasformata discreta veloce. Più precisamente, per ogni valore di n vale la seguente identità:

$$
\begin{aligned}
&\gamma = \{G d(\mathbf{z}) G^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\},\\
&G_{ij} = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big(\cos\tfrac{(2i-1)(2j-1)\pi}{2n} + \sin\tfrac{(2i-1)(2j-1)\pi}{2n}\Big),\ i,j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

(vedi []). Si noti che la matrice G è reale, simmetrica, persimmetrica e unitaria. Il fatto che il prodotto matrice-vettore $G\mathbf{z}$ possa essere calcolato con al più $O(n\log_2 n)$ operazioni aritmetiche segue dalla rappresentazione di G_n, $G_n := G$, stabilita nell'Esercizio G.

Si noti che per $n=6$ la matrice G ha dieci zeri tra i suoi elementi, e che tali zeri sono posizionati come in figura:

$$
G = \begin{bmatrix}
 & & & & 0 & \\
 & 0 & & 0 & & 0\\
 & & & & 0 & \\
 & 0 & & & & \\
0 & & 0 & & 0 & \\
 & 0 & & & &
\end{bmatrix}.
$$

Quindi ciascuno dei vettori $G^T\mathbf{e}_k$, $k=1,\dots,6$, ha almeno un elemento nullo, cioè la matrice $d(G^T\mathbf{e}_k)^{-1}$ non è mai ben definita. Quest'ultima affermazione è vera ogni volta che n è del tipo $n=2+4s$, $s\in\mathbb{N}$. In altre parole, γ può essere rappresentata come

$$\gamma = \{G d(G^T\mathbf{z}) d(G^T\mathbf{e}_k)^{-1} G^{-1} : \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n\}.$$

se e solo se $n \neq 2+4s$, $s\in\mathbb{N}$ (per tali n si può scegliere $k=1$). Tuttavia, come si può indovinare dalla discussione di cui sopra (dettagliata, per $n=6$), si può facilmente mostrare che $[G^T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_n)]_k \neq 0\ \forall\, k$ e $\forall\, n$. Quindi, abbiamo la seguente rappresentazione per γ

$$\gamma = \{G d(G^T\mathbf{z}) d(G^T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_n))^{-1} G^{-1} : \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n\}$$

valida per tutti gli n (anche per $n=2+4s$, $s\in\mathbb{N}$, caso in cui le $d(G^T\mathbf{e}_k)$ non sono invertibili). Quest'ultima formula conferma il fatto che la generica matrice di γ è univocamente determinata dalla somma delle sua prima riga e della sua n-esima riga; in particolare, poiché la somma della prima e della n-esima riga della matrice $Gd(G^T\mathbf{a})d(G^T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_n))^{-1}G^{-1}$ è uguale ad $\mathbf{a}^T$, possiamo dire che tale matrice è esattamente la matrice $\gamma(\mathbf{a})$ (già definita sopra per $n=6$), i.e. la matrice di γ la cui $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_n)$-riga è $\mathbf{a}^T$.

È ora naturale introdurre una classe di spazi che includono (oltre gli spazi-1, come le algebre di Hessenberg) anche spazi tipo l'algebra γ.

Definizione. Un sottoinsieme $\mathcal{L}$ di $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice spazio di $\mathbb{V}$, se $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\,\{J_1,\dots,J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ per qualche vettore $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n$. Dato $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n$, la matrice $\sum_k z_k J_k \in \mathcal{L}$ viene indicata con il simbolo $\mathcal{L}(\mathbf{z})$. Poiché $\mathbf{v}^T\mathcal{L}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T$, $\mathcal{L}(\mathbf{z})$ è chiamata la matrice di $\mathcal{L}$ la cui $\mathbf{v}$-riga è $\mathbf{z}^T$.

Esempio. $\mathcal{L} = sd\, M = \{Md(\mathbf{z})M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ è in $\mathbb{V}$ poiché

$$\mathcal{L} = \text{ Span}\,\{J_1, \ldots, J_n\}, \;\; J_k = Md(M^T\mathbf{e}_k)d(M^T\mathbf{v})^{-1}M^{-1},$$

per ogni vettore $\mathbf{v}$ tale che $[M^T\mathbf{v}]_i \neq 0\ \forall\, i$, e

$$\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{v}^T Md(M^T\mathbf{e}_k)d(M^T\mathbf{v})^{-1}M^{-1} = \mathbf{e}_k^T Md(M^T\mathbf{v})d(M^T\mathbf{v})^{-1}M^{-1} = \mathbf{e}_k^T.$$

Si noti che $\mathcal{L}(\mathbf{z}) = Md(M^T\mathbf{z})d(M^T\mathbf{v})^{-1}M^{-1}$.

Una matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice non derogatoria se la condizione $p(X) = 0$, p polinomio, implica $\partial p \geq n$. Si noti che per il teorema di Cailey-Hamilton il polinomio caratteristico di X è nullo in X. Quindi, X è non derogatoria se e solo se l'insieme $\{p(X)\}$ di tutti i polinomi in X ha dimensione n. In [] si stabilisce il seguente risultato, da cui segue che $\mathbb{V}$ è un'ampia classe di spazi di matrici.

Teorema ND. Sia X una matrice $n \times n$ con elementi in $\mathbb{C}$. Allora X è non derogatoria se e solo se $\{p(X)\} := \{p(X) : p \text{ polinomi}\}$ appartiene a $\mathbb{V}$.

La Proposizione qui di seguito elenca diverse proprietà degli spazi di $\mathbb{V}$. Esse saranno utilizzate (nella prossima sezione) per dimostrare importanti proprietà della migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati in $\mathcal{L}$ di una matrice A, valide per tutti gli spazi $\mathcal{L}$ di una particolare sottoclasse di $\mathbb{V}$.

Proposizione $\mathbb{V}$ *(proprietà degli spazi di* $\mathbb{V}$*).* Sia $\mathcal{L}$ uno spazio in $\mathbb{V}$, i.e. $\mathcal{L} = \text{Span}\,\{J_1, \ldots, J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.

(1) Se $X \in \mathcal{L}$ e $\mathbf{v}^T X = \mathbf{0}^T$, allora $X = 0$, quindi $\mathbf{v}^T X = \mathbf{v}^T Y$, $X, Y \in \mathcal{L}$, implica $X = Y$

dimostrazione: $\mathbf{0}^T = \mathbf{v}^T X = \mathbf{v}^T \sum_k \alpha_k J_k = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k^T = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n] \Rightarrow \alpha_k = 0$ $\forall\, k$.

(2) Se $J_i X \in \mathcal{L}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, allora $J_i X = \sum_k [X]_{ik} J_k$

dimostrazione: esistono α_k tali che $J_i X = \sum_k \alpha_k J_k$; moltiplicando quest'ultima identità per $\mathbf{v}^T$ abbiamo le uguaglianze

$$\mathbf{e}_i^T X = \mathbf{v}^T J_i X = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k^T = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]$$

che implicano $\alpha_k = [X]_{ik}$.

(3) Siano $P_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ le matrici definite dalle identità $\mathbf{e}_s^T P_k = \mathbf{e}_k^T J_s$ (si noti che $\mathbf{e}_k^T = \mathbf{v}^T J_k = \sum_i v_i \mathbf{e}_i^T J_k = \sum_i v_i \mathbf{e}_k^T P_i = \mathbf{e}_k^T \sum_i v_i P_i$, quindi $\sum v_k P_k = I$). Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $\mathcal{L}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici

(ii) $J_i J_j = \sum_k [J_j]_{ik} J_k\ \forall\, i, j$

(iii) $P_r J_j = J_j P_r\ \forall\, r, j$

(iv) $P_k P_r = \sum_i [P_r]_{ki} P_i$

dimostrazione: L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue da (2) per $X = J_j$. L'implicazione nell'altro senso è ovvia. Il fatto che le condizioni (ii) e (iii) sono equivalenti segue prendendo l'elemento (r, s) dell'uguaglianza in (ii):

$$\mathbf{e}_i^T P_r J_j \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_r^T J_i J_j \mathbf{e}_s = \sum_k [J_j]_{ik} [J_k]_{rs} = \sum_k [J_j]_{ik} [P_r]_{ks} = [J_j P_r]_{is}.$$

Il fatto che le condizioni (iii) e (iv) sono equivalenti segue dalle identità:

$$[P_kP_r]_{ms} = [J_mP_r]_{ks} = [P_rJ_m]_{ks} = [J_kJ_m]_{rs} = \sum_i [J_k]_{ri}[J_m]_{is} = \sum_i [P_r]_{ki}[P_i]_{ms}.$$

(3.5) Se $I \in \mathcal{L}$, allora $\sum_i v_i J_i = I$ e $\mathbf{v}^T P_k = \mathbf{e}_k^T$, i.e. anche lo spazio Span $\{P_1, \dots, P_n\}$ è in $\mathbb{V}$ (con lo stesso $\mathbf{v}$)

dimostrazione: sia I che $\sum_i v_i J_i$ hanno $\mathbf{v}^T$ come $\mathbf{v}$-riga, ed entrambi, per ipotesi, sono matrici di $\mathcal{L}$, quindi esse devono essere uguali; inoltre, abbiamo

$$\mathbf{v}^T P_k = \sum_i v_i \mathbf{e}_i^T P_k = \sum_i v_i \mathbf{e}_k^T J_i = \mathbf{e}_k^T \sum_i v_i J_i = \mathbf{e}_k^T.$$

(4) Se $\mathcal{L}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici, allora

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbf{z})^T \mathbf{z}') = \mathcal{L}(\mathbf{z}')\mathcal{L}(\mathbf{z}), \ \forall\, \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^n$$

dimostrazione: poiché $\mathcal{L}$ è chiuso, la matrice $\mathcal{L}(\mathbf{z}')\mathcal{L}(\mathbf{z})$ è in $\mathcal{L}$; inoltre, la sua $\mathbf{v}$-riga è $\mathbf{z}'^T\mathcal{L}(\mathbf{z})$; la tesi segue dal fatto che anche $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbf{z})^T\mathbf{z}')$ è la matrice di $\mathcal{L}$ la cui $\mathbf{v}$-riga è $\mathbf{z}'^T\mathcal{L}(\mathbf{z})$.

(5) Si supponga $I \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici. Allora $X \in \mathcal{L}$ è non singolare se e solo se $\exists\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\mathbf{z}^T X = \mathbf{v}^T$; in questo caso $X^{-1} = \mathcal{L}(\mathbf{z})$

dimostrazione: evidenziando la k-esima riga della matrice $\mathcal{L}(\mathbf{z})X$, e applicando le proprietà (3) e (3.5), otteniamo le identità

$$\mathbf{e}_k^T \mathcal{L}(\mathbf{z})X = \mathbf{e}_k^T \sum_s z_s J_s X = \sum_s z_s \mathbf{e}_s^T P_k X = \mathbf{z}^T P_k X = \mathbf{z}^T X P_k = \mathbf{v}^T P_k = \mathbf{e}_k^T,$$

o, equivalentemente, l'identità $\mathcal{L}(\mathbf{z})X = I$, la quale implica che X è non singolare e $X^{-1} = \mathcal{L}(\mathbf{z})$.

La migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati di A in $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$

Dato un sottospazio $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ e una matrice $n \times n$ A, è ben definita $\mathcal{L}_A$, la proiezione su $\mathcal{L}$ di A. Nel seguente teorema stabiliamo alcune ipotesi su $\mathcal{L}$ (in particolare consideriamo sottospazi di $\mathbb{C}^{n\times n}$ n-dimensionali) che assicurano che $\mathcal{L}_A$ è hermitiana ogni volta che lo è A, e che gli autovalori di $\mathcal{L}_A$ sono limitati da quelli di A. Vedremo che in tali ipotesi $\mathcal{L}$ deve essere necessariamente in $\mathbb{V}$.

Teorema $\mathcal{L}_A$. Ipotesi:

$\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$, $I \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L} =$ Span $\{J_1, \dots, J_n\}$ con J_k tali che

$$J_i^H J_j = \sum_{k=1}^n \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \ i, j = 1, \dots, n. \qquad (*)$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$\mathcal{L}_A \in \mathcal{L}$, $\|A - \mathcal{L}_A\|_F \leq \|A - X\|_F$, $\forall\, X \in \mathcal{L}$ (tale matrice $\mathcal{L}_A$ è ben definita perché $\mathbb{C}^{n\times n}$ è uno spazio di Hilbert rispetto alla norma $\|\cdot\|_F$ indotta dal prodotto scalare $(A, B)_F = \sum_{ij} \overline{a_{ij}} b_{ij}$ e $\mathcal{L}$ è un sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$).

Tesi: Se $A = A^H$, allora $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A^H$ e $\min \lambda(A) \leq \lambda(\mathcal{L}_A) \leq \max \lambda(A)$.

Nota: se A è reale simmetrica, allora $\mathcal{L}_A$ è in generale hermitiana; essa è reale simmetrica nell'ulteriore ipotesi che $\mathcal{L}$ sia generata da matrici reali (dimostrarlo!).

Nota: vedremo che le ipotesi del Teorema $\mathcal{L}_A$ sono soddisfatte in particolare da spazi del tipo $\{Md(\mathbf{z})M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ se la matrice $M^H M$ è diagonale e i suoi elementi diagonali sono positivi; tuttavia, le stesse ipotesi possono essere soddisfatte anche da spazi non commutativi (ne vedremo un esempio, per altri si veda []), quindi anche per questi ultimi spazi possiamo dire che valgono le conclusioni del Teorema $\mathcal{L}_A$.

Applicazioni del Teorema $\mathcal{L}_A$. Se le condizioni del Teorema $\mathcal{L}_A$ sono soddisfatte, allora $\mathcal{L}_A$ è definita positiva (i.e. $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A^H$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}^H \mathcal{L}_A \mathbf{z}$ positivo) ogni volta che lo è A. Quindi, per risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ A \text{ definita positiva}$$

si può risolvere il sistema equivalente

$$\mathcal{L}_A^{-1} A\mathbf{x} = \mathcal{L}_A^{-1}\mathbf{b}$$

la cui matrice dei coefficienti ha autovalori reali e positivi che spesso sono meglio distribuiti di quelli di A (ciò risulta, per esempio, in una maggiore velocità di convergenza dei risolutori iterativi di sistemi lineari). Inoltre, se le condizioni del Teorema $\mathcal{L}_A$ sono soddisfatte e $\mathcal{L}$ è generato da matrici reali, allora $\mathcal{L}_A$ è definita positiva reale (i.e. $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A^T$, $\mathcal{L}_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z}^H \mathcal{L}_A \mathbf{z}$ positivo) ogni volta che lo è A. In altre parole, valgono le seguenti implicazioni

$$\begin{array}{l} B_k \text{ definita positiva reale } \Rightarrow \\ \mathcal{L}_{B_k} \text{ definita positiva reale } \Rightarrow \\ \varphi(\mathcal{L}_{B_k}, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k) \text{ definita positiva reale} \Rightarrow \\ \mathcal{L}_{\varphi(\mathcal{L}_{B_k}, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)} \text{ definita positiva reale} \end{array}$$

(a patto che $\mathbf{s}_k^T \mathbf{y}_k$ sia positivo), e di conseguenza entrambe le seguenti S e NS LQN direzioni di ricerca

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\varphi(\mathcal{L}_{B_k}, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) \quad \mathbf{d}_{k+1} = -\mathcal{L}^{-1}_{\varphi(\mathcal{L}_{B_k}, \mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k)} \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}),$$

sono direzioni di discesa in $\mathbf{x}_{k+1}$, per la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ben definite (si veda [] per le definizioni di B_k, $\mathbf{s}_k$, $\mathbf{y}_k$, φ, S e NS LQN).

dimostrazione (del Teorema $\mathcal{L}_A$): La matrice $\mathcal{L}_A = \sum_s \alpha_s J_s$ è definita univocamente dalla seguente condizione

$$(X, A - \mathcal{L}_A)_F = 0,\ X \in \mathcal{L}$$

o, equivalentemente, dalle n condizioni $(J_k, A - \sum_s \alpha_s J_s)_F = 0$, $k = 1, \ldots, n$, che possono essere riscritte come segue

$$\sum_{s=1}^{n} (J_k, J_s)_F \alpha_s = (J_k, A)_F,\ k = 1, \ldots, n.$$

In altre parole, vale la seguente formula

$$\mathcal{L}_A = \sum_s [B^{-1}\mathbf{c}]_s J_s,\ B_{ks} = (J_k, J_s)_F,\ c_k = (J_k, A)_F,\ k, s = 1, \ldots, n.$$

Osservazione. B è definita positiva, i.e. $B = B^*$ e $\mathbf{z}^H B\mathbf{z} > 0 \; \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \; \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

dimostrazione: $\overline{B_{ks}} = \overline{(J_k, J_s)_F} = (J_s, J_k)_F = B_{sk}$, cioè, B è una matrice hermitiana. Inoltre, poiché $0 < (\sum_s z_s J_s, \sum_s z_s J_s)_F = \sum_{k,s} \overline{z_k} z_s (J_k, J_s)_F = \mathbf{z}^H B\mathbf{z}$ ogni volta che $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, abbiamo la tesi.

Osservazione. Siano $v_k \in \mathbb{C}$ tale che $I = \sum_k v_k J_k$ (tali v_k esistono perché $I \in \mathcal{L}$). Allora il vettore $\mathbf{v}$ i cui elementi sono i v_k soddisfa le identità $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, quindi $\mathcal{L} \in \mathbb{V}$ e tutti i risultati stabiliti per gli spazi di $\mathbb{V}$ valgono per il nostro spazio $\mathcal{L}$.

dimostrazione: Si moltiplichi (*) per $\overline{v_i}$ e si sommi su i l'identità ottenuta. Allora si ha

$$\overline{v_i} J_i^H J_j = \sum_k \overline{v_i} \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \;\; J_j = \sum_k (\sum_i \overline{v_i} \overline{[J_k]_{ij}}) J_k = \sum_k (\mathbf{v}^H \overline{J_k} \mathbf{e}_j) J_k$$

e questo implica $\mathbf{v}^H \overline{J_k} \mathbf{e}_j = 0$ se $k \neq j$ e $\mathbf{v}^H \overline{J_k} \mathbf{e}_j = 1$ se $k = j$, i.e. $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$.

Come immediata conseguenza delle due osservazioni di cui sopra, abbiamo che $\mathcal{L}_A$ è la matrice di $\mathcal{L}$ la cui $\mathbf{v}$-riga è $(B^{-1}\mathbf{c})^T$,

$$\mathcal{L}_A = \sum_s [B^{-1}\mathbf{c}]_s J_s = \mathcal{L}(B^{-1}\mathbf{c}),$$

e, inoltre,

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}(B^{-1}\mathbf{c}) = \mathcal{L}((B^H)^{-1}\mathbf{c}) = \mathcal{L}((\overline{B}^{-1})^T \mathbf{c}).$$

Osservazione. $\mathcal{L}$ è chiuso per trasposizione coniugata.

dimostrazione: si moltiplichi (*) per v_j e si sommi su j l'identità ottenuta:

$$J_i^H v_j J_j = \sum_k v_j \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \;\; J_i^H = \sum_k (\sum_j v_j \overline{[J_k]_{ij}}) J_k \;\; \Rightarrow \;\; J_i^H \in \mathcal{L}.$$

Quest'ultima osservazione consente di ottenere parte della tesi del Teorema $\mathcal{L}_A$, perché essa implica che $\mathcal{L}_A^H \in \mathcal{L}$, e questo fatto, assieme alle uguaglianze

$$\|A - \mathcal{L}_A\|_F = \|A^H - \mathcal{L}_A^H\|_F = \|A - \mathcal{L}_A^H\|_F$$

(A è hermitiana!) e all'unicità della migliore approssimazione di A, conducono all'identità $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A^H$. In altre parole, nelle nostre condizioni su $\mathcal{L}$ la proiezione su $\mathcal{L}$ di una matrice hermitiana è hermitiana.

Osservazione. $\mathcal{L}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici ($\mathcal{L}$ è una algebra di matrici).

dimostrazione: l'insieme $\{J_i^H\}$ forma una base alternativa per $\mathcal{L}$ (dimostrarlo!), quindi esistono $z_i^{(s)} \in \mathbb{C}$ tali che $J_s = \sum_i z_i^{(s)} J_i^H$. Si moltiplichi (*) per $z_i^{(s)}$ e si sommi su i l'identità ottenuta,

$$z_i^{(s)} J_i^H J_j = \sum_k z_i^{(s)} \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \;\; J_s J_j = \sum_k (\sum_i z_i^{(s)} \overline{[J_k]_{ij}}) J_k,$$

per osservare che $J_s J_j \in \mathcal{L}$.

Osservazione. $\overline{B} = \sum_k \overline{\mathrm{tr}\,(J_k)} J_k$, quindi $\overline{B} \in \mathcal{L}$, e, poiché $\overline{B}$ è non singolare (è definita positiva!), per il risultato $\mathbb{V}$ (5) anche la matrice $\overline{B}^{-1}$ appartiene ad $\mathcal{L}$.

dimostrazione: per l'uguaglianza (*) abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} B_{ij} & = & (J_i, J_j)_F = \sum_{r,t} \overline{[J_i]_{rt}}[J_j]_{rt} = \sum_{r,t} [J_i^H]_{tr}[J_j]_{rt} \\ & = & \sum_t [J_i^H J_j]_{tt} = \sum_t \sum_k \overline{[J_k]_{ij}}[J_k]_{tt} = \sum_k \operatorname{tr}(J_k)\overline{[J_k]_{ij}}. \end{array}$$

Le ultime due osservazioni, insieme a $\mathbb{V}$ (4), permettono di riscrivere di nuovo $\mathcal{L}_A$ come segue

$$\mathcal{L}_A = \ldots = \mathcal{L}((\overline{B}^{-1})^T \mathbf{c}) = \mathcal{L}(\mathbf{c})\overline{B}^{-1}.$$

Adesso si noti che esiste una matrice hermitiana M tale che $M^2 = \overline{B}^{-1}$, e che le matrici $\mathcal{L}_A$ e $M\mathcal{L}(\mathbf{c})M$ hanno gli stessi autovalori (per l'ultima rappresentazione di $\mathcal{L}_A$ esse sono simili!). Così, se $\lambda(\mathcal{L}_A)$ indica il generico autovalore di $\mathcal{L}_A$, allora esiste $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ per cui

$$\lambda(\mathcal{L}_A) = \mathbf{x}^H M\mathcal{L}(\mathbf{c})M\mathbf{x} = (M\mathbf{x})^H \mathcal{L}(\mathbf{c})(M\mathbf{x}).$$

Osservazione. Se $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, allora $\mathbf{z}^H \mathcal{L}(\mathbf{c})\mathbf{z} = \sum_k (P_k^H \mathbf{z})^H A(P_k^H \mathbf{z})$.
dimostrazione: qui di nuovo (*) è fondamentale:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{z}^H \mathcal{L}(\mathbf{c})\mathbf{z} & = & \mathbf{z}^H (\sum_k (J_k, A)_F J_k)\mathbf{z} \\ & = & \sum_{i,j=1}^n \overline{z_i} z_j \sum_{r,t=1}^n a_{rt} \sum_k [J_k]_{ij} \overline{[J_k]_{rt}} \\ & = & \sum_{i,j=1}^n \overline{z_i} z_j \sum_{r,t=1}^n a_{rt} \overline{[J_i^H J_j]_{rt}} \\ & = & \sum_{r,t=1}^n a_{rt} \sum_{i,j=1}^n \overline{z_i} z_j \sum_k \overline{[J_i^H]_{rk}} \overline{[J_j]_{kt}} \\ & = & \sum_k \sum_{r,t} a_{rt} (\overline{\sum_i z_i [P_k^H]_{ri}})(\sum_j z_j [P_k^H]_{tj}) \\ & = & \sum_k \sum_{r,t} a_{rt} \overline{(P_k^H \mathbf{z})_r}(P_k^H \mathbf{z})_t. \end{array}$$

Dall'osservazione fatta segue:

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\mathcal{L}_A) & = & \sum_k (P_k^H M\mathbf{x})^H A(P_k^H M\mathbf{x}) \le \max \lambda(A) \sum_k (P_k^H M\mathbf{x})^H (P_k^H M\mathbf{x}) \\ & = & \max \lambda(A) \mathbf{x}^H M(\sum_k P_k P_k^H) M\mathbf{x}. \end{array}$$

Ma la matrice tra le parentesi non è altro che la matrice $\overline{B}$:
Remark. $\overline{B} = \sum_k P_k P_k^H$
proof:

$$B_{ij} = (J_i, J_j)_F = \sum_{r,s} \overline{[J_i]_{rs}}[J_j]_{rs} = \sum_{r,s} \overline{[P_r]_{is}}[P_r]_{js} = \sum_{r,s} \overline{[P_r]_{is}}[P_r^T]_{sj} = \sum_r [\overline{P_r} P_r^T]_{ij}.$$

Adesso siamo in grado di dimostrare una delle disuguaglianze (enunciate nel Teorema $\mathcal{L}_A$) verificate dagli autovalori di A e $\mathcal{L}_A$:

$$\lambda(\mathcal{L}_A) \le \max \lambda(A)\mathbf{x}^H M M^{-2} M\mathbf{x} = \max \lambda(A)\mathbf{x}^H \mathbf{x} = \max \lambda(A).$$

Analogamente, si può provare che $\lambda(\mathcal{L}_A) \ge \min \lambda(A)$. $\square$

Esercizio DG. Si provi che lo spazio *diedrale gruppo*

$$\mathcal{L} = \{ \begin{bmatrix} X & JY \\ JY & X \end{bmatrix} : X, Y \ \frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \text{ circolanti}\}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema $\mathcal{L}_A$, i.e. $I \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\{J_1, \dots, J_n\}$ con J_k linearmente indipendenti tali che

$$J_i^H J_j = \sum_{k=1}^{n} \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \ i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi, la proiezione $\mathcal{L}_A$ su $\mathcal{L}$ è hermitiana e tale che $\min \lambda(A) \leq \lambda(\mathcal{L}_A) \leq \max \lambda(A)$ ogni volta che A è hermitiana. Si noti che $\mathcal{L}$ non è commutativo.

Proposizione c$\mathbb{V}$ *(proprietà degli spazi commutativi di* $\mathbb{V}$*)* [mitia]. Sia $\mathcal{L}$ uno spazio di $\mathbb{V}$, i.e. $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\{J_1, \dots, J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Si supponga $\mathcal{L}$ commutativo. Allora

(1) $\mathbf{e}_i^T J_j = \mathbf{e}_j^T J_i$, $\forall\, i, j$, quindi, $J_k = P_k$

dimostrazione: $J_i J_j = J_j J_i \Rightarrow \mathbf{v}^T J_i J_j = \mathbf{v}^T J_j J_i$, e la definizione $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ implica the tesi.

(2) $\mathbf{z}^T \mathcal{L}(\mathbf{z}') = \mathbf{z}'^T \mathcal{L}(\mathbf{z})$

dimostrazione: per (1) abbiamo

$$\mathbf{z}^T \mathcal{L}(\mathbf{z}') = \sum_i z_i \mathbf{e}_i^T \sum_k z'_k J_k = \sum_i z_i \sum_k z'_k \mathbf{e}_k^T J_i = \sum_k z'_k \mathbf{e}_k^T \sum_i z_i J_i.$$

(3) $I = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \in \mathcal{L}$

dimostrazione: si noti che $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \sum v_i J_i \in \mathcal{L}$ e quindi $\mathbf{e}_k^T \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \sum_i v_i \mathbf{e}_i^T J_k = \mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$; ne segue che $I = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \in \mathcal{L}$.

(4) $\mathcal{L}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici

dimostrazione: da (1) abbiamo che $J_k = P_k$; quindi $P_k J_s = J_k J_s = J_s J_k = J_s P_k$, che è una delle condizioni necessarie e sufficienti per la chiusura moltiplicativa.

Esempio di spazi $\mathcal{L} \in \mathbb{V}$ *commutativi.* Sia M una matrice $n \times n$ non singolare con elementi in $\mathbb{C}$, e si ponga $\mathcal{L} = sd\, M = \{M d(\mathbf{z}) M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$. Si noti che $\mathcal{L} \in \mathbb{V}$, infatti se $\mathbf{v}$ è un qualsiasi vettore tale che $[M^T \mathbf{v}]_k \neq 0$, $\forall\, k$, allora le matrici $J_k = M d(M^T \mathbf{e}_k) d(M^T \mathbf{v})^{-1} M^{-1}$ soddisfano le identità $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ e generano $\mathcal{L}$. Abbiamo, per $\mathcal{L}$, la seguente rappresentazione alternativa:

$$\mathcal{L} = \{M d(M^T \mathbf{z}) d(M^T \mathbf{v})^{-1} M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}.$$

È evidente che la matrice di $\mathcal{L}$ la cui $\mathbf{v}$-row è $\mathbf{z}^T$ deve avere la forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}) = M d(M^T \mathbf{z}) d(M^T \mathbf{v})^{-1} M^{-1}.$$

Ovviamente, $\mathcal{L}$ è commutativo.

Proposizione ch$\mathbb{V}$ *(proprietà degli spazi di* $\mathbb{V}$ *commutativi, chiusi per trasposizione coniugata)* [stefano]. Sia $\mathcal{L}$ in $\mathbb{V}$, i.e. $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\{J_1, \dots, J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Si supponga $\mathcal{L}$ commutativo e chiuso per trasposizione coniugata. Allora, oltre alle c$\mathbb{V}$ (1),(2),(3),(4), di cui sopra, abbiamo

$$J_i^H J_j = \sum_k \overline{[J_k]_{ij}} J_k, \ i, j = 1, \dots, n$$

dimostrazione: poiché $J_i^H \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ è commutativo, si ha $J_i^H J_j = J_j J_i^H$; poiché $\mathcal{L}$ è chiuso per moltiplicazione tra matrici e $J_i^H \in \mathcal{L}$, si ha che $J_j J_i^H \in \mathcal{L}$; da $\mathbb{V}$ (2), segue che

$$J_i^H J_j = J_j J_i^H = \sum_k [J_i^H]_{jk} J_k = \sum_k \overline{[J_i]_{kj}} J_k = \sum_k \overline{[J_k]_{ij}} J_k,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo usato la proprietà c$\mathbb{V}$(1).

Esempio di $\mathcal{L} \in \mathbb{V}$ commutativi, chiusi per trasposizione coniugata. Sia M una matrice $n \times n$ non singolare con elementi in $\mathbb{C}$, e si ponga $\mathcal{L} = sd\, M = \{Md(\mathbf{z})M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$. Già sappiamo che $\mathcal{L}$ è uno spazio in $\mathbb{V}$ ed è commutativo. Vogliamo provare che *$\mathcal{L}$ è chiuso per trasposizione coniugata se e solo se $M^H M$ è diagonale con elementi diagonali positivi.* Inoltre, in tal caso esiste una matrice $d(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, per cui $\tilde{M} = Md(\mathbf{w})$ è unitaria e $\mathcal{L} = \{\tilde{M}d(\mathbf{z})\tilde{M}^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$.

Una implicazione è semplice: si supponga $M^H M = D$, con D_{ii} positivi $\forall\, i$, e $D_{ij} = 0$ $i \neq j$; allora

$$(Md(\mathbf{z})M^{-1})^H = (M^H)^{-1} d(\overline{\mathbf{z}}) M^H = MD^{-1} d(\overline{\mathbf{z}}) DM^{-1} = Md(\overline{\mathbf{z}})M^{-1} \ \in \ \mathcal{L}.$$

Adesso si supponga $\mathcal{L}$ chiuso per trasposizione coniugata. Ne segue che, per ogni $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ esiste $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ per cui $(Md(\mathbf{z})M^{-1})^H = Md(\mathbf{w})M^{-1}$. Ma questo implica

$$d(\overline{\mathbf{z}})C = Cd(\mathbf{w}), \ C = M^H M,$$

o, equivalentemente, $c_{ij}\overline{z}_i = c_{ij} w_j$. Si assumano i z_i distinti. Allora le identità $c_{i1}\overline{z}_i = c_{i1} w_1$, $i = 1, \dots, n$, implicano $c_{i1} = 0$ per tutti gli i ad eccezione di uno, che indichiamo con i_1 (altrimenti, $c_{i1} \neq 0$ e $c_{k1} \neq 0$, $i \neq k$, implicherebbero $w_1 = \overline{z}_i = \overline{z}_k$!). Analogamente, le identità $c_{i2}\overline{z}_i = c_{i2} w_2$, $i = 1, \dots, n$, implicano $c_{i2} = 0$ per tutti gli i ad eccezione di uno, che indichiamo con i_2, e tale i_2 deve essere differente da i_1 altrimenti C sarebbe singolare. Procedendo in questo modo si conclude facilmente che

$$C = DR, \ D \text{ diagonal}, \ R \text{ permutazione}.$$

Il fatto che C è hermitiana implica che la matrice di permutazione R deve essere simmetrica. Il fatto che gli elementi diagonali di C non possono essere nulli implica che R deve essere la matrice identica. Infine, il fatto che C è definita positiva implica che i D_{ii} sono reali e positivi. Dimostriamo l'ultima affermazione. Per $\tilde{M} = Md(\mathbf{w})$ abbiamo

$$\tilde{M}^H \tilde{M} = d(\overline{\mathbf{w}}) M^H M d(\mathbf{w}) = d(\overline{\mathbf{w}}) D d(\mathbf{w}).$$

Si scelgano i w_i tali che $|w_i| = 1/\sqrt{D_{ii}}$; allora $\tilde{M}^H \tilde{M} = I$ e, per ogni $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $Md(\mathbf{z})M^{-1} = Md(\mathbf{w})d(\mathbf{z})d(\mathbf{w})^{-1}M^{-1} = \tilde{M}d(\mathbf{z})\tilde{M}^{-1} = \tilde{M}d(\mathbf{z})\tilde{M}^H$.

Questione. Trovare un esempio di spazio $\mathcal{L}$ soddisfacente le ipotesi della Proposizione ch$\mathbb{V}$ che non sia del tipo $\{Md(\mathbf{z})M^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$, con $M^H M$ diagonale con elementi diagonali positivi.

Osservazione. Se $\mathcal{L} = \{Ud(\mathbf{z})U^* : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$ dove U è una matrice unitaria, allora la tesi del Teorema $\mathcal{L}_A$ può essere provata in modo molto semplice come segue. Poiché $\forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$

$$\|A - Ud(\mathbf{z})U^*\|_F = \|U^* A U - d(\mathbf{z})\|_F,$$

è evidente che $\|A - Ud(\mathbf{z})U^*\|_F$ è minima per $z_i = (U^*AU)_{ii}$. Quindi, vale la seguente formula per $\mathcal{L}_A$

$$\mathcal{L}_A = U \operatorname{diag}((U^*AU)_{ii})U^*$$

da cui segue immediatamente l'affermazione: $A = A^* \Rightarrow \mathcal{L}_A$ hermitiana e $\min \lambda(A) \leq \lambda(\mathcal{L}_A) \leq \max \lambda(A)$. Come una applicazione di questo risultato, si calcoli $\mathcal{L}_{\mathbf{x}\mathbf{y}^T}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$.

Altre osservazioni/esercizi sugli spazi di $\mathbb{V}$

Esercizio. Si provi che ci sono (oltre I) infinite matrici nell'algebra γ con prima riga $\mathbf{e}_1^T$.

Esercizio. Si consideri la matrice nell'Esercizio G. Si provi che la somma della sua prima riga e della sua ultima riga è un vettore con tutti gli elementi non nulli (i.e. γ è uno spazio di $\mathbb{V}$ con $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_n$)

dimostrazione: per $j = 1, \dots, n$ abbiamo

$$\begin{aligned}
[G]_{1j} + [G]_{nj} &= (\cos \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} + \sin \tfrac{(2j-1)\pi}{2n}) \\
&\quad + (\cos \tfrac{(2n-1)(2j-1)\pi}{2n} + \sin \tfrac{(2n-1)(2j-1)\pi}{2n}) \\
&= (\cos \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} + \sin \tfrac{(2j-1)\pi}{2n}) \\
&\quad + (\cos((2j-1)\pi - \tfrac{(2j-1)\pi}{2n}) + \sin((2j-1)\pi - \tfrac{(2j-1)\pi}{2n})) \\
&= \cos \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} + \sin \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} \\
&\quad - \cos \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} + \sin \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} = 2 \sin \tfrac{(2j-1)\pi}{2n} \neq 0.
\end{aligned}$$

Esercizio. Si provi che ogni spazio n-dimensionale $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ con la proprietà $A\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$, $\forall A \in \mathcal{L}$, non può essere in $\mathbb{V}$. (Suggerimento: si mostri che non esiste $J_j \in \mathcal{L}$ tale che $\mathbf{v}^T J_j = \mathbf{e}_j^T$).

Esercizio. Sia $\mathcal{L}$ in $\mathbb{V}$ e chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici. Si provi che

(i) Se le matrici in $\mathcal{L}$ sono simmetriche, allora $\mathcal{L}$ è commutativo
(ii) Se le matrici in $\mathcal{L}$ sono persimmetriche, allora $\mathcal{L}$ è commutativo

dimostrazione: per le ipotesi su $\mathcal{L}$, abbiamo, nel caso simmetrico,

$$J_s J_k = J_s^T J_k^T = (J_k J_s)^T = J_k J_s,$$

e, nel caso persimmetrico,

$$J_s J_k = J_s J J J_k = J J_s^T J_k^T J = J((J_k J_s)^T)J = J(J J_k J_s J)J = J_k J_s.$$

Questione. E se partissimo dalla definizione più generale $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathcal{L} = \operatorname{Span}\{J_1, \dots, J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{u}_k$ per certi vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}_k \in \mathbb{C}^n$ tali che $\mathbf{u}_k^H \mathbf{u}_s = 0$ $k \neq s$?

ESERCIZIO.

$$P_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \xi & & & & 0 \end{bmatrix}, \ \xi \neq 0$$

(1) Se $\rho^n = \xi$ e $\omega^n = 1$, allora

$$P_\xi \begin{bmatrix} 1 \\ \rho\omega^j \\ \\ \rho^{n-1}\omega^{(n-1)j} \end{bmatrix} = \rho\omega^j \begin{bmatrix} 1 \\ \rho\omega^j \\ \\ \rho^{n-1}\omega^{(n-1)j} \end{bmatrix}, \ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Quindi, se $W = (\omega^{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ e $D_{1\rho^{n-1}} = \operatorname{diag}(\rho^i, \, i = 0, \ldots, n-1)$, allora

$$P_\xi(D_{1\rho^{n-1}}W) = (D_{1\rho^{n-1}}W)\rho D_{1\omega^{n-1}}, \ D_{1\omega^{n-1}} = \operatorname{diag}(\omega^j, \, j = 0, \ldots, n-1).$$

(2) Se, inoltre, $|\xi| = 1$ e $\omega^i \neq 1$ $0 < i < n$, allora $U = \frac{1}{\sqrt{n}} D_{1\rho^{n-1}}W$ è unitaria e

$$\begin{aligned} C_\xi \quad &:= \quad H_{P_\xi} = \{\textstyle\sum_{k=1}^n z_k P_\xi^{k-1} : z_k \in \mathbb{C}\} \\ &= \quad \{Ud(\mathbf{z})U^* : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\} = \{Ud(U^T\mathbf{z})d(U^T\mathbf{e}_1)^{-1}U^{-1} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}. \end{aligned}$$

La matrice $C_\xi(\mathbf{a}) := \sum_{k=1}^n a_k P_\xi^{k-1} = Ud(U^T\mathbf{a})d(U^T\mathbf{e}_1)^{-1}U^{-1}$ è la matrice ξ-circolante con prima riga $\mathbf{a}^T$:

$$C_\xi(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ \xi a_n & a_1 & & & a_{n-1} \\ & & & & \\ \xi a_3 & & & & a_2 \\ \xi a_2 & \xi a_3 & & \xi a_n & a_1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO.

Si ponga $X = P_1 + P_1^T$.

1) Trovare una rappresentazione conveniente per l'insieme C^S di tutti i polinomi in X, e se ne deduca la dimensione di C^S.

2) Si provi che ogni matrice della forma $C_1 + JC_2$, C_1, C_2 circolanti, J antiidentica, appartiene allo spazio $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}$. Se ne deduca un limite inferiore per la dimensione di $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AX = XA\}$.

Si ripeta l'esercizio per $X = P_{-1} + P_{-1}^T$.

ESERCIZIO.

1) Si scriva precisamente un algoritmo che calcoli il prodotto matrice-vettore $T \cdot \mathbf{z}$, $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$, con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche.

2) Scrivere un algoritmo che calcoli il prodotto matrice-vettore $(T^{-1})\cdot\mathbf{z}$ con al più $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche (non tenendo conto della pre-elaborazione su T).

ESERCIZIO

Fare l'esercizio DG

ESERCIZIO Provare il Teorema DD

ESERCIZIO Sia T una matrice $n \times n$ di Toeplitz

1) Provare che $TP_0 - P_0T$ ha rango al più 2, e scrivere la formula di Gohberg-Semencul per T^{-1}

2) Sia H una matrice di Hankel, i.e. $H = (h_{i+j-2})_{i,j=1}^n$; mostrare che $(T + H)(P_0 + P_0^T) - (P_0 + P_0^T)(T + H)$ ha rango al più 4

3) Scrivere la matrice dell'algebra τ la cui prima riga è $[2 \ -1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$, e ossevare che è una matrice di Toeplitz. Si chiami A tale matrice e si calcoli

A^{-1} esplicitamente usando il fatto che $A^{-1} \in \tau$ (quindi, è sufficiente calcolare la sua prima riga). È A^{-1} una matrice di Toeplitz ?

4) Fare l'esercizio Ttau

ESERCIZIO Nelle ipotesi del Teorema $\mathcal{L}_A$

1) provare l'ultima delle seguenti identità

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}(B^{-1}\mathbf{c}) = \mathcal{L}(\mathbf{c})\overline{B}^{-1} = \overline{B}^{-1}\mathcal{L}(\mathbf{c})$$

(suggerimento: trovare una espressione di $\overline{B}$ in termini delle matrici P_k, $\mathbf{e}_s^T P_k = \mathbf{e}_k^T J_s \ \forall\, s, k$)

2) provare che B è definita positiva (oltre che hermitiana)

ESERCIZIO (0) Sia $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathcal{L} = \text{Span}\,\{J_1, \ldots, J_n\}$ con $\mathbf{v}^T J_k = \mathbf{e}_k^T$ per qualche vettore $\mathbf{v}$ (cioé, $\mathcal{L} \in \mathbb{V}$). Si supponga che $\mathcal{L}$ sia chiuso rispetto alla moltiplicazione tra matrici, che $I \in \mathcal{L}$, e che $J_i^H = \alpha_i J_{t_i}$, $|\alpha_i| = 1 \ \forall\, i$, per certi $t_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(1) Si provi che $J_i^H J_j = \sum_k \overline{[J_k]_{ij}} J_k$, $\forall\, i, j$.

(2) Supponiamo che $\{1, 2, \ldots, n\}$ sia un gruppo con elemento identico 1. Si provi che lo spazio

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : a_{ij} = a_{si,sj}, \ \forall\, i, j, s \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &= \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : a_{ij} = a_{1,i^{-1}j}, \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}\} \end{aligned}$$

soddisfa le ipotesi (0). (Ogni spazio $\mathcal{L}$ di questo tipo è di solito chiamato *algebra di matrici di gruppo*; per esempio, le circolanti e lo spazio $\mathcal{L}$ nell'Esercizio DG sono algebre di matrici di gruppo).

(3) Si provi che lo spazio $\mathcal{L}$ generato dalle matrici $J_1 = I$,

$$J_2 = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & \mathbf{i} \\ & & -\mathbf{i} & \end{bmatrix}, \ J_3 = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & -\mathbf{i} \\ 1 & & & \\ & \mathbf{i} & & \end{bmatrix}, \ J_4 = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \mathbf{i} & \\ & -\mathbf{i} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

soddisfa le ipotesi (0). Si provi che $\mathcal{L}$ non è commutativo.

ESERCIZIO Sia T una matrice di Toeplitz simmetrica.

(1) Si calcoli la prima riga di C_T dove C è lo spazio delle matrici circolanti

(2) Si calcoli la prima riga di τ_T dove τ è lo spazio delle matrici tau

(3) Si calcoli la prima riga di $\mathcal{L}_T$ dove $\mathcal{L}$ è lo spazio nel punto (3) del precedente esercizio (quindi, $n = 4$)

(4) Si calcoli il vettore $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T \gamma_T$ dove γ è lo spazio di tutte le matrici gamma 6×6 (i.e. si suppone $n = 6$).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Linear Algebra Appl. 229 (1995), 49-99

Cinque righe di SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21 (2000), 646-667

Linear Algebra Appl. 335 (2001), 1-54

Per le trasformate e le algebre Hartley-type (come G e γ) Linear Algebra Appl. 366 (2003), 65-85

Per una intersezione con gli interessi di ricerca del prof. Ikramov Computational Math. and Mathematical Physics 38 (1998), 1026-1035

Risoluzione degli ESERCIZI:

$C^S_{-1} + JC^{SK}_{-1}$ *è una algebra di matrici commutativa.* Si supponga $A_i \in C^S_{-1}$, $B_i \in C^{SK}_{-1}$. Si noti che A_i e B_i sono anche persimmetriche. Allora

$$\begin{aligned}(A_0 + JB_0)(A_1 + JB_1) &= A_0A_1 + A_0JB_1 + JB_0A_1 + JB_0JB_1\\ &= A_0A_1 + JA_0B_1 + JB_0A_1 + B_0^TB_1.\end{aligned}$$

Poiché A_0A_1 è (-1)-circolante e $(A_0A_1)^T = A_1^TA_0^T = A_1A_0 = A_0A_1$, A_0B_1 è (-1)-circolante e $(A_0B_1)^T = B_1^TA_0^T = -B_1A_0 = -A_0B_1$ (C_{-1} è chiuso per moltiplicazione di matrici ed è commutativo), abbiamo che $A_0A_1 \in C^S_{-1}$ e $A_0B_1 \in C^{SK}_{-1}$.

Poiché $B_0^TB_1$ è (-1)-circolante e $(B_0^TB_1)^T = B_1^TB_0 = -B_1B_0 = -B_1(-B_0^T) = B_1B_0^T = B_0^TB_1$, B_0A_1 è (-1)-circolante e $(B_0A_1)^T = A_1^TB_0^T = -A_1B_0 = -B_0A_1$ (C_{-1} è chiuso per trasposizione e per moltiplicazione di matrici, e commutativo), abbiamo che $B_0^TB_1 \in C^S_{-1}$ e $B_0A_1 \in C^{SK}_{-1}$.

Dimostrazione del Teorema DD.

$$\begin{aligned}&\left[\sum H_{P_0}(\mathbf{x}_m)^T H_X(\mathbf{y}_m)\right]X - X\left[\sum H_{P_0}(\mathbf{x}_m)^T H_X(\mathbf{y}_m)\right]\\
&= \sum \left[H_{P_0}(\mathbf{x}_m)^T X - XH_{P_0}(\mathbf{x}_m)^T\right] H_X(\mathbf{y}_m)\\
&= b\sum \left[H_{P_0}()^T P_0 - P_0H_{P_0}()^T\right] H_X(\mathbf{y}_m)\\
&= b\sum \Big[\begin{bmatrix} 0 & & \\ & (\mathbf{x}_m)_1 & \\ & & \\ 0 & (\mathbf{x}_m)_{n-1} & (\mathbf{x}_m)_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_m)_1 & & \\ & & \\ (\mathbf{x}_m)_{n-1} & (\mathbf{x}_m)_1 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \Big] H_X(\mathbf{y}_m)\\
&= b\sum \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_m)_1 & & \\ & & \\ -(\mathbf{x}_m)_{n-1} & & \\ 0 & (\mathbf{x}_m)_{n-1} & (\mathbf{x}_m)_1 \end{bmatrix} H_X(\mathbf{y}_m)\\
&= b\sum(-\mathbf{x}_m\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_n\mathbf{x}_m^T J)H_X(\mathbf{y}_m)\\
&= b\sum(-\mathbf{x}_m\mathbf{y}_m^T + \mathbf{e}_n\mathbf{x}_m^T H_X(\mathbf{y}_m)^T J) = \dots\end{aligned}$$

Calcolare la prima riga di C_T. Siano $J_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ le matrici circolanti con prima riga $\mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \dots, n$. Calcoliamo $(B^{-1}\mathbf{c})^T$ rispetto a tale base (i.e. la prima riga di C_A) quando A è una matrice simmetrica di Toeplitz. Abbiamo

$$A = T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & & \\ & & & t_1 \\ t_{n-1} & & t_1 & t_0 \end{bmatrix},$$

$(J_1, A)_F = nt_0, (J_2, A)_F = (n-1)t_1 + t_{n-1}, (J_3, A)_F = (n-2)t_2 + 2t_{n-2},$
$(J_4, A)_F = (n-3)t_3 + 3t_{n-3}, \dots (J_n, A)_F = t_{n-1} + (n-1)t_1,$

e, quindi,

$$(J_k, A)_F = (n-k+1)t_{k-1} + (k-1)t_{n-k+1},\ k = 1, \dots, n.$$

Poiché $B = nI$, si ha $B^{-1} = \frac{1}{n}I$, e, di conseguenza,

$$[B^{-1}\mathbf{c}]_k = \frac{1}{n}((n-k+1)t_{k-1} + (k-1)t_{n-k+1}),\ k = 1, \dots, n.$$

Calcolare la prima riga di τ_T. Siano $J_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$ le matrici τ con prima riga $\mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \dots, n$. Calcoliamo $(B^{-1}\mathbf{c})^T$ rispetto a tale base (i.e. cioè la prima riga di τ_A) quando A è una matrice di Toeplitz simmetrica. Abbiamo

$$\begin{array}{l}(J_1, A)_F = nt_0, (J_2, A)_F = 2(n-1)t_1, (J_3, A)_F = (n-2)t_0 + 2(n-2)t_2,\\ (J_4, A)_F = 2(n-3)t_1 + 2(n-3)t_3, (J_5, A)_F = (n-4)t_0 + 2(n-4)t_2 + 2(n-4)t_4,\end{array}$$

da cui si può dedurre

$$(J_k, A)_F = (n-k+1)[\delta_{k,o}t_0 + 2\sum_{j=1}^{[k/2]} t_{k-2j+1}],\ k = 1, \dots, n,$$

dove $\delta_{k,o} = 1$ se k è dispari e $\delta_{k,o} = 0$ se k è pari. Poiché $B^{-1} = \frac{1}{2n+2}(3J_1 - J_3)$ (provare tale formula!), abbiamo

$$\begin{array}{l}(B^{-1}\mathbf{c})_1 = \frac{1}{2n+2}(3(J_1, A)_F - (J_3, A)_F),\ (B^{-1}\mathbf{c})_2 = \frac{1}{2n+2}(2(J_2, A)_F - (J_4, A)_F),\\ (B^{-1}\mathbf{c})_k = \frac{1}{2n+2}(-(J_{k-2}, A)_F + 2(J_k, A)_F - (J_{k+2}, A)_F),\\ (B^{-1}\mathbf{c})_{n-1} = \frac{1}{2n+2}(-(J_{n-3}, A)_F + 2(J_{n-1}, A)_F),\ (B^{-1}\mathbf{c})_n = \frac{1}{2n+2}(-(J_{n-2}, A)_F + 3(J_n, A)_F).\end{array}$$

Non è difficile concludere che

$$\begin{array}{l}(B^{-1}\mathbf{c})_1 = \frac{1}{n+1}((n+1)t_0 - (n-2)t_2),\\ (B^{-1}\mathbf{c})_k = \frac{1}{n+1}((n-k+3)t_{k-1} - (n-k-1)t_{k+1}),\ k = 2, \dots, n-1,\\ (B^{-1}\mathbf{c})_n = \frac{1}{n+1}(3t_{n-1}).\end{array}$$

Calcolare la somma della prima riga e dell'ultima riga di γ_T. Sappiamo che

$$\begin{array}{l}\gamma_T = \sum_{k=1}^{6}[B^{-1}\mathbf{c}]_k J_k = Gd(G^T B^{-1}\mathbf{c})d(G^T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6))^{-1}G^{-1},\\ (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T\gamma_T = (B^{-1}\mathbf{c})^T,\ B_{ij} = (J_i, J_j)_F,\ c_i = (J_i, T)_F,\end{array}$$

dove le J_k sono le matrici di γ con la proprietà $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_6)^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \dots, 6$ (esse sono state scritte esplicitamente sopra). Così, dobbiamo calcolare il vettore $B^{-1}\mathbf{c}$. Si ricorda che ci aspettiamo (dalla teoria) che B, B^{-1} siano matrici di γ:

$$B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3t_0\\ 3t_0 + 5t_1 - t_5\\ 3t_0 + 5t_1 + 4t_2 - 2t_4 - t_5\\ 3t_0 + 5t_1 + 4t_2 - 2t_4 - t_5\\ 3t_0 + 5t_1 - t_5\\ 3t_0 \end{bmatrix}.$$

Si noti che B, B^{-1} sono matrici (-1)-circolanti simmetriche, il che è una condizione più forte di ciò che ci si aspettava, B, $B^{-1} \in \gamma$. Inoltre, si noti che il vettore $\mathbf{c}$ è centrosimmetrico; quindi, poiché B^{-1} è centrosimmetrica, i.e.

$JB^{-1} = B^{-1}J$ (essa è sia simmetrica che persimmetrica!), ci si aspetta che il vettore $B^{-1}\mathbf{c}$ sia centrosimmetrico. Infatti, abbiamo

$$\gamma_T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6) = B^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -6t_0+5t_1+4t_2-2t_4-t_5 \\ 8t_2-4t_4 \\ 6t_0+5t_1-4t_2+2t_4-t_5 \\ 6t_0+5t_1-4t_2+2t_4-t_5 \\ 8t_2-4t_4 \\ -6t_0+5t_1+4t_2-2t_4-t_5 \end{bmatrix}.$$

Si noti che una matrice di γ $A+JB$ con $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6)^T(A+JB)$ centrosimmetrica deve essere in C^S_{-1}; più precisamente, vale la seguente implicazione:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6)^T(A+JB) = [z_1\, z_2\, z_3\, z_3\, z_2\, z_1] \\ \Rightarrow\quad &a_2 = z_3,\ a_1 = z_2+z_3,\ a_0 = z_1+z_2+z_3,\ b_i = 0\ \forall\, i. \end{aligned}$$

Nel nostro caso:

$$a_2 = \frac{1}{12}(6t_0+5t_1-4t_2+2t_4-t_5),\ a_1 = \frac{1}{12}(6t_0+5t_1+4t_2-2t_4-t_5),\ a_0 = \frac{1}{12}(10t_1+8t_2-4t_4-2t_5)$$

Ma γ_T non dovrebbe coincidere con $(C_1)_T$ di T.Chan! ... c'è qualcosa di sbagliato?

Un precondizionatore alternativo per sistemi di Toeplitz?
Si consideri la matrice τ $n-2\times n-2$ con prima riga $[a_1\ a_2\ \cdots\ a_{n-2}]$ e la si chiami $\tau_{a_1a_{n-2}}$. Per esempio

$$n=5:\ \tau_{a_1a_3} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1+a_3 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix},\ n=6:\ \tau_{a_1a_4} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1+a_3 & a_2+a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2+a_4 & a_1+a_3 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}, \ldots .$$

Si consideri la matrice $n\times n$:

$$A_{a_1a_{n-2}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T & 0 \\ \mathbf{0} & \tau_{a_1a_{n-2}} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Per esempio,

$$n=5:\ A_{a_1a_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1+a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ n=6:\ A_{a_1a_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1+a_3 & a_2+a_4 & a_3 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2+a_4 & a_1+a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots .$$

Vogliamo trovare $\tau_{A_{a_1a_{n-2}}}$, i.e. la matrice $n\times n$ τ definita dalla seguente proprietà di minimo

$$\|\tau_{A_{a_1a_{n-2}}} - A_{a_1a_{n-2}}\|_F = \min\{\|X - A_{a_1a_{n-2}}\|_F : X\in\tau,\ X\ n\times n\}.$$

Let J_k be the $n \times n$ τ matrices defined by the conditions $\mathbf{e}_1^T J_k = \mathbf{e}_k^T$, $k = 1, \ldots, n$, and set $\tau_{A_{a_1 a_{n-2}}} = \tau(\mathbf{z}) := \sum_k z_k J_k$. We want to find $\mathbf{z}$. We know that if $B_{ij} = (J_i, J_j)_F$, $c_i = (J_i, A_{a_1 a_{n-2}})_F$, then $\mathbf{z} = B^{-1}\mathbf{c}$.

Per esempio per $n = 5$:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 3a_1 + a_3 \\ 4a_2 \\ 3a_1 + 3a_3 \\ 4a_2 \\ 3a_3 + a_1 \end{bmatrix}, \; B^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{z} = B^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3a_1 \\ 2a_2 \\ a_1 + a_3 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{bmatrix}$$

$n = 6$:

Poiché $B_{ij} = (J_i, J_j)$ e $B \in \tau$, si può facilmente ottenere la prima riga di B e scrivere B:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 4a_2 + 2a_3 \\ 6a_2 + 2a_4 \\ 6a_3 + 4a_1 \\ 6a_2 + 4a_4 \\ 6a_3 + 2a_1 \\ 4a_4 + 2a_2 \end{bmatrix}, \; B^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 6 + 2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\mathbf{z} = B^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4a_1 \\ 3a_2 \\ a_1 + 2a_3 \\ 2a_2 + a_4 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \end{bmatrix}$$

Esercizio. Si provi che

$$B^{-1} = \frac{1}{2n+2}(3J_1 - J_3)$$

(dapprima si trovino B e $\mathbf{w}$ tali che $\mathbf{w}^T B = \mathbf{e}_1^T$, quindi $B^{-1} = \tau(\mathbf{w})$).

Osservando il vettore $\mathbf{z}$ ottenuto per $n = 5$, $n = 6$ (vedi sopra), e per $n = 7$ e $n = 8$,

$$\mathbf{z}^T = \tfrac{1}{8}[5a_1 \; 4a_2 \; a_1 + 3a_3 \; 2a_2 + 2a_4 \; 3a_3 + a_5 \; 4a_4 \; 5a_5],$$
$$\mathbf{z}^T = \tfrac{1}{9}[6a_1 \; 5a_2 \; a_1 + 4a_3 \; 2a_2 + 3a_4 \; 3a_3 + 2a_5 \; 4a_4 + a_6 \; 5a_5 \; 6a_6],$$

si può congetturare una formula per $\mathbf{z}$ nel caso n generico:
Esercizio. Si provi che $\tau_{A_{a_1 a_{n-2}}} = \tau(\mathbf{z})$ con

$$\mathbf{z}^T = \tfrac{1}{n+1}\Big[\; [0 \; 0 \; a_1 \; 2a_2 \; \cdots \; (n-4)a_{n-4} \; (n-3)a_{n-3} \; (n-2)a_{n-2}] + [(n-2)a_1 \; (n-3)a_2 \; (n-4)a_3 \; \cdots \; 2a_{n-3} \; a_{n-2} \; 0 \; 0] \Big]. \qquad (**)$$

APPLICAZIONE. Sia $T=(t_{|i-j|})_{i,j=1}^n$ una matrice simmetrica di Toeplitz. È semplice accorgersi che

$$T=\tau_{t_0 t_{n-1}}-A_{t_2 t_{n-1}},\ A_{t_2 t_{n-1}}=\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T & 0 \\ \mathbf{0} & \tau_{t_2 t_{n-1}} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Dall'uguaglianza

$$T=\tau_{t_0 t_{n-1}}-\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}}+\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}}-A_{t_2 t_{n-1}}$$

segue il risultato:

$$\|T-\tau_T\|_F\leq\|\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}}-A_{t_2 t_{n-1}}\|_F=\|T-(\tau_{t_0 t_{n-1}}-\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}})\|_F.$$

Si noti che la matrice τ $\tau_{t_0 t_{n-1}}-\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}}$ potrebbe essere comunque, per altre ragioni (...), un precondizionatore per T migliore di τ_T. Osserviamo che $\tau_{A_{t_2 t_{n-1}}}=\tau(\mathbf{z})$ dove $\mathbf{z}^T$ è come in (**) ma con a_i sostituito da t_{i+1}, $i=1,\ldots,n-2$.