4 Dicembre 2017, EAN, II test

1) Calcolare gli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & x \\ 0 & a_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ x & 0 & \cdot & 0 & a_n \end{bmatrix}, \ a_i \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R},$$

con il metodo di Jacobi i) nel caso $a_1 = a_n$ e ii) nel caso $a_1 \neq a_n$.

2) Scrivere tutte le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, che hanno 1 e -1 come autovalori.

3) Sia A tridiagonale reale simmetrica $n \times n$ con gli elementi $A_{i,i+1}$ tutti non nulli. i) Dimostrare che $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ per cui gli autovalori di $A + \alpha I$ sono distinti in modulo. ii) A quale matrice converge il metodo QR quando applicato a $A + \alpha I$?

4) Sia $A = I + \mathbf{e}\mathbf{e}^T$, $\mathbf{e}^T = [1\ 1\ \cdots\ 1]$. Sia B una matrice di Hessenberg inferiore ottenuta da A con una trasformazione per similitudine unitaria. i) Calcolare B nel caso $n = 3$. ii) Nel caso n generico osservare che almeno $n - 2$ elementi $B_{i,i+1}$ devono essere nulli.

5) Dimostrare che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è normale se e solo se $A + A^H$ e $A - A^H$ commutano.

1) (Si suppone $x \neq 0$.) Nel primo passo del metodo di Jacobi applicato ad A,

$$G_{1n}^T A G_{1n} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \cdot & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdot & 0 & x \\ 0 & a_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ x & 0 & \cdot & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & \cdot & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1' & 0 & \cdot & 0 & x' \\ 0 & a_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ x' & 0 & \cdot & 0 & a_n' \end{bmatrix} = N,$$

$$a_1' = \alpha^2 a_1 + \beta^2 a_n - 2\alpha\beta x, \;\; a_n' = \beta^2 a_1 + \alpha^2 a_n + 2\alpha\beta x, \;\; x' = (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha\beta(a_1 - a_n),$$

gli scalari α, β sono scelti tali che

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad x' = (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha\beta(a_1 - a_n) = 0, \qquad \text{(equ)}$$

in modo che la matrice N risulti simile ad A ($\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow G_{1n}^T = G_{1n}^{-1}$) e diagonale, e quindi i suoi elementi diagonali siano gli autovalori di A. Sia $\eta = (a_n - a_1)/(2x)$.

Caso $a_1 = a_n$ ($\eta = 0$). La scelta $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ soddisfa (equ); quindi gli autovalori di A in questo caso sono $a_1' = a_1 - x$, $a_2, \ldots, a_{n-1}$, $a_n' = a_1 + x$.

Caso $a_1 \neq a_n$ ($\eta \neq 0$). Per quanto visto a lezione, (equ) è soddisfatta per $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{|\eta|}{\sqrt{1+\eta^2}})}$ e $\beta = \mp\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{|\eta|}{\sqrt{1+\eta^2}})}$, dove nella definizione di β va scelto il segno meno se $\eta > 0$ e il segno più se $\eta < 0$; quindi gli autovalori di A in questo caso sono $a_1' = \alpha^2 a_1 + \beta^2 a_n - 2\alpha\beta x$, $a_2, \ldots, a_{n-1}$, $a_n' = \beta^2 a_1 + \alpha^2 a_n + 2\alpha\beta x$.

In generale, gli autovalori di A sono $a_2, \ldots, a_{n-1}$ e

$$\{a_1',\, a_n' : \alpha, \beta \text{ tali che } (equ)\} = \{\frac{a_1 + a_n}{2} - |x|\sqrt{1+\eta^2},\; \frac{a_1 + a_n}{2} + |x|\sqrt{1+\eta^2}\}$$

[infatti, la matrice A si può trasformare con una trasformazione per similitudine permutazione in una matrice diagonale a blocchi con blocchi diagonali il blocco $\begin{bmatrix} a_1 & x \\ x & a_n \end{bmatrix}$ e gli $n-2$ blocchi 1×1 $a_2, \ldots, a_{n-1}$; dunque gli autovalori di A sono $a_2, \ldots, a_{n-1}$ e i due zeri del polinomio $\lambda^2 - (a_1 + a_n)\lambda + a_1 a_n - x^2$].

2) Il polinomio caratteristico di $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, è $(\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a + c) + ac - b^2$. Questo ha come radici 1 e -1 se e solo se $a + c = 0$, $ac - b^2 = -1$ se e solo se $c = -a$, $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$. Quindi le matrici richieste sono tutte quelle del tipo

$$\begin{bmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ \pm\sqrt{1-a^2} & -a \end{bmatrix}, \; a \in [-1, 1].$$

Altro procedimento: Dall'identità

$$G_{12}^T M G_{12} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha^2 + c\beta^2 - 2b\alpha\beta & b(\alpha^2 - \beta^2) + (a - c)\alpha\beta \\ b(\alpha^2 - \beta^2) + (a - c)\alpha\beta & c\alpha^2 + a\beta^2 + 2b\alpha\beta \end{bmatrix} = N$$

e dal fatto che le equazioni $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $b(\alpha^2 - \beta^2) + (a - c)\alpha\beta = 0$ — che implicano $G_{12}^T = G_{12}^{-1}$ e N diagonale — hanno sempre ($\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$) soluzioni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, segue che ogni matrice M

reale simmetrica 2×2 si può trasformare in una matrice diagonale con una trasformazione per similitudine di Givens. Questo è vero in particolare per tutte le matrici reali simmetriche 2×2 che hanno spettro $\{-1, 1\}$, quindi tutte tali matrici sono descrivibili così

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & -2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta & \beta^2 - \alpha^2 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

[La descrizione

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 - \alpha^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

è equivalente alla precedente perché

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}. \quad]$$

3) i) Per quanto visto a lezione, la matrice A ha autovalori reali e distinti. Siano essi $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1$. La matrice $A + \alpha I$ ha allora autovalori $\lambda_n + \alpha < \lambda_{n-1} + \alpha < \ldots < \lambda_2 + \alpha < \lambda_1 + \alpha$. Se mostriamo, ad esempio, che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lambda_n + \alpha > 0$, avremo sicuramente che i $\lambda_i + \alpha$ saranno in modulo distinti. È sufficiente imporre che i cerchi di Gershgorin di $A + \alpha I$, tutti centrati in numeri reali, siano nel semipiano $Re(z) > 0$, cioè imporre che

$$(a_{11} + \alpha) - |a_{12}| > 0, \ (a_{ii} + \alpha) - |a_{ii-1}| - |a_{ii+1}| > 0, \ (a_{nn} + \alpha) - |a_{nn-1}| > 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha > |a_{12}| - a_{11}, \ \alpha > (|a_{ii-1}| + |a_{ii+1}|) - a_{ii}, \ \alpha > |a_{nn-1}| - a_{nn}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha > \max\{|a_{12}| - a_{11}, |a_{nn-1}| - a_{nn}, (|a_{ii-1}| + |a_{ii+1}|) - a_{ii}, \ i = 2, \ldots, n-1\}. \quad \text{(cond)}$$

ii) Applicando il metodo QR alla matrice tridiagonale Hermitiana $(A + \alpha I)_0 := A + \alpha I$, dove α soddisfa (cond), cioè eseguendo le operazioni

$$(A + \alpha I)_k = Q_k R_k, \quad (A + \alpha I)_{k+1} := R_k Q_k$$

per $k = 0, 1, 2, \ldots$, si ottiene una successione di matrici tridiagonali Hermitiane $\{(A+\alpha I)_k\}_{k=0}^{+\infty}$ tale che

$$(A + \alpha I)_k \quad \to \quad \text{diag}\,(\lambda_i(A) + \alpha, i = 1, \ldots, n).$$

Infatti, $(A+\alpha I)_k$ Hermitiana implica $(A+\alpha I)_{k+1}$ Hermitiana (perché $(A+\alpha I)_{k+1} = Q_k^H (A+\alpha I)_k Q_k$), e $(A + \alpha I)_k$ tridiagonale implica $(A + \alpha I)_k$ di Hessenberg che, per quanto visto a lezione, implica $(A + \alpha I)_{k+1}$ di Hessenberg, cioè $(A + \alpha I)_{k+1}$ è di Hessenberg e Hermitiana, dunque è tridiagonale Hermitiana.

Inoltre, dal fatto che $A + \alpha I$ è non singolare e ha autovalori in modulo distinti segue che

$$[(A + \alpha I)_k]_{ij} \ \to \ 0, \ i > j, \quad [(A + \alpha I)_k]_{ii} \ \to \ \lambda_i(A + \alpha I) = \lambda_i(A) + \alpha \qquad (*)$$

(per quanto detto a lezione e dimostrato da qualche studente).

Ma, come abbiamo osservato sopra, le matrici $(A + \alpha I)_k$ sono tutte tridiagonali Hermitiane, e ciò insieme a (*) implica $[(A + \alpha I)_k]_{ij} \ \to \ 0, \ i < j$, cioè la tesi.

4) i) Calcoliamo B nel caso $n = 3$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$AG_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha-\beta & \alpha+\beta \\ 1 & 2\alpha-\beta & 2\beta+\alpha \\ 1 & \alpha-2\beta & \beta+2\alpha \end{bmatrix}$$

e, scegliendo α, β tali che $\alpha+\beta = 0$, $\alpha^2+\beta^2 = 1$, ad esempio $\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\beta = -1/\sqrt{2}$, si ottiene

$$AG_{23} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \; G_{23}^T AG_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} AG_{23} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: B.$$

La matrice B si è ottenuta applicando ad A una trasformazione per similitudine unitaria di Givens.

ii) Nel caso $n \times n$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

la matrice di Hessenberg inferiore B, ottenuta applicando ad A una trasformazione per similitudine unitaria reale (ad es. prodotto di $(n-1)(n-2)/2$ trasformazioni di Givens), dovrà essere reale simmetrica. Cioè B dovrà essere tridiagonale reale simmetrica e gli autovalori di B dovranno coincidere con quelli di A, che sono 1 con molteplicità algebrica (e geometrica) uguale a $n-1$ ed $n+1$ con molteplicità algebrica (e geometrica) uguale a 1.

Supponiamo per assurdo che B abbia almeno due elementi $[B]_{i,i+1}$ diversi da zero. Allora B, e quindi anche A, dovrebbe avere almeno tre autovalori reali e distinti oppure B dovrebbe avere due autovalori distinti entrambi non semplici (per dimostrare ciò si applica il risultato "ogni matrice tridiagonale reale simmetrica con elementi non diagonali non nulli ha autovalori reali e distinti" alle sottomatrici principali di B 2×2 o 3×3 che contengono gli elementi $[B]_{i,i+1}$ diversi da zero), e questo è assurdo.

5)

$$\begin{gathered}(A+A^H)(A-A^H) = (A-A^H)(A+A^H) \quad \Leftrightarrow \\ A^2 - AA^H + A^HA - (A^H)^2 = A^2 + AA^H - A^HA - (A^H)^2 \quad \Leftrightarrow \\ -AA^H + A^HA = AA^H - A^HA \quad \Leftrightarrow \\ 2A^HA = 2AA^H \quad \Leftrightarrow \\ A^HA = AA^H.\end{gathered}$$

22 Dicembre 2017, EAN, III test, ore 14:00, aula 27 (ore 17:00: panettone et al),

Studenti di Elementi di Analisi Numerica (EAN) A.A.2017/2018: Alessandra Caprari, Eliseo Di Vona, Giulia Belfiori, Maria Lucia Cardinali, Paolo Marafini, Ramona Di Cristiano, Sara Crescenzi, Sara Loss, Simone Longhi.

1) Sia $A \geq O$, irriducibile, stocastica per colonne, $n \times n$. Dimostrare che $M := (\tilde{1} - 1)(\tilde{1}I - A)^{-1}$ è ben definita, non negativa, irriducibile, stocastica per colonne, e che $\rho(M) = 1 = r_M = \lambda_1(M) > |\lambda_j(M)|$, $j = 2, \ldots, n$, comunque si scelga $\tilde{1}$, $\tilde{1} > 1$, e valutare la velocità di convergenza del metodo delle potenze applicato ad M.

2) Una matrice 4×4 (non normale) irriducibile i cui cerchi di Gershgorin sono quelli in figura [... in figura ci sono: un cerchio centrato in 2 e raggio $\frac{1}{2}$; un cerchio centrato in 1 e raggio 1; un cerchio centrato in $\mathbf{i}$ e raggio 1; un cerchio centrato in $-\alpha - \alpha\mathbf{i}$, $\alpha > 0$, e raggio $\alpha\sqrt{2}$ ...] è invertibile (per il primo teorema di Gershgorin per matrici irriducibili). Far vedere che il terzo teorema di Gershgorin non è utilizzabile per dimostrare tale risultato.

3) Data $A \geq O$, irriducibile, stocastica per colonne, invertibile, l'inversa $M := A^{-1}$ è irriducibile, tale che $\sum_i M_{ij} = 1$, $\forall\, j$, ma in generale non è non negativa (dimostrare queste affermazioni). Sotto quali ipotesi applicando il metodo delle potenze a M si può calcolare $\lambda_i(M)$: $|\lambda_i(M)| \leq |\lambda_j(M)|$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$?

4) Sia $\varphi_k = \mathbf{v}^H A^k \mathbf{v} / \mathbf{v}^H A^{k-1} \mathbf{v}$, $k = 1, 2, \ldots$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$, A in $\mathbb{C}^{n \times n}$ definita positiva).
Notare che φ_k è ben definito $\forall\, k$.
Ricordando che $\mathbf{z}^H M \mathbf{z} / \mathbf{z}^H \mathbf{z} \in [\lambda_{\min}(M), \lambda_{\max}(M)]$, $\forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, ogni volta che M è Hermitiana, dimostrare che $\varphi_k \leq \lambda_{\max}(A) = \rho(A)$, $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $\forall\, k$.
In quale ipotesi la successione $\{\varphi_k\}$ converge a $\rho(A)$? (Applicare il teorema delle potenze con $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ e $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.)
Notare che i vettori $\mathbf{v}_k = A^k \mathbf{v} / \|A^k \mathbf{v}\|_2$ sono ben definiti e tali che $\mathbf{v}_k^H A \mathbf{v}_k = \varphi_{2k+1}$.

5) Sapendo che gli autovalori della matrice $n \times n$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono $2\cos\frac{j\pi}{n+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, dimostrare che il sistema lineare $(2I - T)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è equivalente a un sistema lineare del tipo $(I - \alpha M)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ con $\alpha \in (0, 1)$, $M \geq O$, $\rho(M) \leq 1$.

Esercizio 1

Siano $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Si nota che $|\lambda_j| \leq 1$ e che esiste $\delta > 0$, $\delta \in (0, 2]$, tale che $|\lambda_i - 1| \geq \delta$, $i = 2, \dots, n$. Quindi, per gli autovalori della matrice $\tilde{1}I - A$, cioè per $\tilde{1} - 1$, $\tilde{1} - \lambda_j$, $j = 2, \dots, n$, si ha che

$$\tilde{1} - 1 > 0, \quad |\tilde{1} - \lambda_j| > \sqrt{(\tilde{1} - 1)^2 + \delta^2} > \delta, \ j = 2, \dots, n.$$

Questo implica che $\tilde{1}I - A$ ha determinante diverso da zero e che, quindi, la matrice $M = (\tilde{1} - 1)(\tilde{1}I - A)^{-1}$ è ben definita e ha spettro

$$\lambda_1(M) = 1, \ \lambda_j(M) = \frac{\tilde{1} - 1}{\tilde{1} - \lambda_j}, \ j = 2, \dots, n, \qquad \text{tale che}$$

$$\max_{j=2,\dots,n} |\frac{\lambda_j(M)}{\lambda_1(M)}| = \max_{j=2,\dots,n} |\lambda_j(M)| < \frac{\tilde{1} - 1}{\sqrt{(\tilde{1} - 1)^2 + \delta^2}} < 1 = \lambda_1(M) = \rho(M).$$

Le implicazioni $\mathbf{e}^T A = \mathbf{e}^T \Rightarrow \mathbf{e}^T(\tilde{1}I - A) = (\tilde{1} - 1)\mathbf{e}^T \Rightarrow \mathbf{e}^T = (\tilde{1} - 1)\mathbf{e}^T(\tilde{1}I - A)^{-1} = \mathbf{e}^T(\tilde{1} - 1)(\tilde{1}I - A)^{-1}$ provano che M è stocastica per colonne.

Inoltre, dall'identità

$$M = (\tilde{1} - 1)(\tilde{1}(I - \frac{1}{\tilde{1}}A))^{-1} = (\tilde{1} - 1)\tilde{1}^{-1}(I - \frac{1}{\tilde{1}}A)^{-1} = (\tilde{1} - 1)\tilde{1}^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{\tilde{1}}A)^k$$

(valida perché $\rho(\frac{1}{\tilde{1}}A) = \frac{1}{\tilde{1}} < 1$) è evidente che M è non negativa (perché somma di matrici non negative) e che M è irriducibile (perché tra le matrici non negative della somma ce n'è una irriducibile, quella per $k = 1$). Dunque si ha anche $1 = \lambda_1(M) = \rho(M) = r_M := \sup_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \min_{j: x_j > 0} \frac{(M\mathbf{x})_j}{x_j}$ ed esiste ed è unico $\mathbf{z} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}\|_1 = 1$ tale che $M\mathbf{z} = \mathbf{z}$, ovvero tale che $A\mathbf{z} = \mathbf{z}$.

Il metodo delle potenze applicato a M:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}, \ \mathbf{v} > \mathbf{0}, \ \|\mathbf{v}\|_1 = 1, \ \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}_{k-1}, \ k = 1, 2, \dots$$

genera una successione di distribuzioni discrete di probabilità ($\mathbf{v}_k > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{v}_k\|_1 = 1$) tale che $\mathbf{v}_k \to \mathbf{z}$ con velocità almeno $O\Big((\frac{\tilde{1}-1}{\sqrt{(\tilde{1}-1)^2+\delta^2}})^k\Big)$. Essendo δ fisso (anche se incognito), il metodo diventa arbitrariamente veloce quando $\tilde{1} \to 1$.

Nota: osservando sperimentalmente la velocità di convergenza (al variare di $\tilde{1} \to 1$) si potrebbe stimare δ.

Esercizio 2

La matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1 & 2/6 & 3/6 \\ 1/6 & 2/6 & \mathbf{i} & 1/2 \\ 1/6 & 3/6 & 1/2 & -(1+\mathbf{i})7\sqrt{2}/12 \end{bmatrix}$$

ha diagonale debolmente dominante (Def: M $n \times n$ ha diagonale debolmente dominante se $|M_{jj}| \geq \sum_{k:k \neq j} |M_{jk}|$, $\forall\, j$, con il maggiore stretto e l'uguaglianza entrambe verificate) ed è irriducibile (perché non ha elementi nulli), quindi è invertibile per il primo teorema di Gershgorin per matrici irriducibili. Infatti 0 non può essere autovalore di A perché non è interno a nessuno dei cerchi di Gershgorin di A e perché non è nell'insieme intersezione delle frontiere dei cerchi di Gershgorin di A.

Notare che non si può utilizzare il terzo teorema di Gershgorin [III T. di G.: λ autovalore di M $n \times n$ irriducibile, λ sulla frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin di $M \Rightarrow \lambda$ appartiene all'insieme intersezione delle frontiere dei cerchi di Gershgorin di M] per dimostrare l'invertibilità di questa particolare matrice A irriducibile con diagonale debolmente dominante. Infatti 0 non soddisfa l'ipotesi "0 sulla frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin di A" perché la frontiera dell'unione dei cerchi di Gershgorin di A è una curva chiusa in $\mathbb{C}$ non passante per l'origine.

(Notare che il terzo teorema di Gershgorin è un corollario del primo teorema di Gershgorin per matrici irriducibili.)

Notare infine che A non è normale (ad esempio $[AA^H]_{31} \neq [A^H A]_{31}$), quindi l'affermazione "ogni cerchio di Weinstein di A, $W_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sqrt{\sum_{k:k\neq j} |a_{jk}|^2}\}$, contiene almeno un autovalore di A" può essere falsa.

Esercizio 4

Poiché $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è definita positiva ($\mathbf{z}^H A\mathbf{z} > 0 \;\forall\, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow A = A^H$ & $\lambda_j(A) > 0$), anche ogni potenza di A è definita positiva. Infatti $A^s = (A^H)^s = (A^s)^H$ & $\lambda_j(A)^k > 0$. Quindi $\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v} > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, e i numeri $\varphi_k = \mathbf{v}^H A^k \mathbf{v}/\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v}$, $k = 1, 2, \ldots$, sono tutti ben definiti, reali e positivi.

Inoltre, esiste $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definita positiva tale che $A = B^2$, quindi

$$\min_j \lambda_j(A) \leq \varphi_k = \frac{\mathbf{v}^H A^k \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^H B^{2k}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H B^{2k-2}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^H B^{k-1} B^2 B^{k-1}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H B^{k-1}B^{k-1}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{y}_k^H A\mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k^H \mathbf{y}_k} \leq \max_j \lambda_j(A) = \rho(A),$$

dove $\mathbf{y}_k = B^{k-1}\mathbf{v}$. Infine, la disuguaglianza $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ è equivalente alla disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{v}^H A^k\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v}} \leq \frac{\mathbf{v}^H A^{k+1}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H A^k\mathbf{v}} \qquad &\Leftrightarrow \\
(\mathbf{v}^H A^k\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v})(\mathbf{v}^H A^{k+1}\mathbf{v}) \qquad &\Leftrightarrow \\
(\mathbf{v}^H B^{2k}\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{v}^H B^{2k-2}\mathbf{v})(\mathbf{v}^H B^{2k+2}\mathbf{v}) \qquad &\Leftrightarrow \\
((B^{k-1}\mathbf{v})^H(B^{k+1}\mathbf{v}))^2 \leq (B^{k-1}\mathbf{v})^H(B^{k-1}\mathbf{v})(B^{k+1}\mathbf{v})^H(B^{k+1}\mathbf{v}) \qquad &\Leftrightarrow \\
(B^{k-1}\mathbf{v})^H(B^{k+1}\mathbf{v}) \leq \|B^{k-1}\mathbf{v}\|\|B^{k+1}\mathbf{v}\| &
\end{aligned}$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera per la disuguaglianza di Schwarz su $\mathbb{C}^n$. Come qualche studente ha notato, la disuguaglianza $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ si ottiene anche osservando che

$$\varphi_{k+1} = \frac{\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^H A^{k+1}\mathbf{v}}{(\mathbf{v}^H A^k\mathbf{v})^2}\varphi_k = \frac{\mathbf{z}_k^H A^{-1}\mathbf{z}_k\mathbf{z}_k^H A\mathbf{z}_k}{(\mathbf{z}_k^H\mathbf{z}_k)^2}\varphi_k, \quad \mathbf{z}_k = B^k\mathbf{v},$$

e ricordando le disuguaglianze di Kantorovich per matrici A definite positive:

$$1 \leq \frac{\mathbf{z}^H A^{-1}\mathbf{z}\mathbf{z}^H A\mathbf{z}}{(\mathbf{z}^H\mathbf{z})^2} \leq \frac{(\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A))^2}{4\lambda_{\min}(A)\lambda_{max}(A)}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \quad \text{(con uguali, risp, se } \mathbf{z} =? \; e \; \mathbf{z} =?)$$

($(\mathbf{z}^H\mathbf{z})^2 = (\mathbf{u}^H\mathbf{w})^2 \leq \mathbf{u}^H\mathbf{u}\mathbf{w}^H\mathbf{w} = \mathbf{z}^H B^{-2}\mathbf{z}\mathbf{z}^H B^2\mathbf{z} = \mathbf{z}^H A^{-1}\mathbf{z}\mathbf{z}^H A\mathbf{z}$, $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{z}$, $\mathbf{w} = B\mathbf{z}$).

Esaminiamo ora il teorema delle potenze quando applicato ad A, $0 < \lambda_n(A) \leq \ldots \leq \lambda_1(A)$, ponendo $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ e $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

L'ipotesi che $m_g(\lambda_1(A))$ sia uguale a $m_a(\lambda_1(A)) = t$, $t \geq 1$, è verificata perché A è diagonalizzabile e quindi $m_g(\lambda_j(A)) = m_a(\lambda_j(A))$, $\forall\, j$.

L'ipotesi $\lambda_1(A) > \lambda_j(A)$, $\forall\, j > t$ è verificata a meno che $A = \lambda_1(A)I$.

Dati $\mathbf{x}_j$ linearmente indipendenti tali che $A\mathbf{x}_j = \lambda_j(A)\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, n$, occorre prendere $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, tale che nell'espressione $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \sum_{j\leq t} \alpha_j\mathbf{x}_j$, $\mathbf{r} = \sum_{j>t} \alpha_j\mathbf{x}_j$, il vettore $\mathbf{x}$ sia non nullo.

L'ipotesi $\mathbf{v}^H\mathbf{x} \neq 0$ è verificata perché $\mathbf{v}^H\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ (autovettori di autovettori distinti di M $n \times n$ normale sono ortogonali) e $\mathbf{x}$ è non nullo.

Infine, ogni vettore e scalare prodotto dall'algoritmo

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_k := A\mathbf{v}_{k-1}, \ \tilde{\varphi}_k := \frac{\mathbf{v}^H\mathbf{a}_k}{\mathbf{v}^H\mathbf{v}_{k-1}}, \ \mathbf{v}_k := \mathbf{a}_k/\|\mathbf{a}_k\|, \ k = 1, 2, \ldots,$$

è ben definito (perché $\mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v}^H\mathbf{v}_{k-1} > 0$, $\forall\, k$... dim per induzione).

Quindi, nelle sole ipotesi $A \neq \lambda_1(A)I$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ovvero, non nulla la componente di $\mathbf{v}$ lungo l'autospazio dell'autovalore dominante di A), otteniamo la tesi del teorema, cioè

$$\mathbf{v}_k = \frac{A^k\mathbf{v}}{\|A^k\mathbf{v}\|}, \ \tilde{\varphi}_k = \varphi_k = \frac{\mathbf{v}^H A^k\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H A^{k-1}\mathbf{v}}, \ \mathbf{v}_k \ \rightarrow \ \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \ \tilde{\varphi}_k = \varphi_k \ \rightarrow \ \lambda_1(A) = \rho(A)$$

(Nota: per $\mathbf{z} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ si ha $A\mathbf{z} = \lambda_1(A)\mathbf{z}$.)

Infine, si osserva che $A^k\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\forall\, k$ (perché $A^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implicherebbe $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e questo non è vero) e

$$\psi_k := \mathbf{v}_k^H A\mathbf{v}_k = \frac{(A^k\mathbf{v})^H A(A^k\mathbf{v})}{\|A^k\mathbf{v}\|^2} = \frac{\mathbf{v}^H A^{2k+1}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^H A^{2k}\mathbf{v}} = \varphi_{2k+1}$$

e che tali numeri reali positivi ψ_k (ciascuno calcolabile subito dopo il calcolo di ciascun $\mathbf{v}_k$) convergono a $\lambda_1(A) = \rho(A)$ con ordine di convergenza $O\Big((\max_{j>t}|\frac{\lambda_j(A)}{\lambda_1(A)}|)^{2k}\Big)$.

Esercizio 5

Si nota che, per la matrice dei coefficienti del sistema lineare dato, si ha

$$2I - T = 2(I - \frac{1}{2}T) = 2\Big(I - \frac{1}{2}(2\cos\frac{\pi}{n+1})\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+1}}T\Big) = 2(I - \alpha M),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(2\cos\frac{\pi}{n+1}), \ M = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+1}}T,$$

con $\alpha = \cos\frac{\pi}{n+1} \in (0,1)$, $M \geq O$, $\rho(M) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+1}}\rho(T) = 1$. È evidente che

$$(2I - T)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (I - \alpha M)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}} := \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

Esercizio 3

Se A è invertibile e irriducibile, allora A^{-1} è irriducibile (se infatti si avesse $P^TA^{-1}P = \begin{bmatrix} X & Z \\ O & Y \end{bmatrix}$ con X, Y quadrate, si avrebbe anche $P^TAP = \begin{bmatrix} X^{-1} & \tilde{Z} \\ O & Y^{-1} \end{bmatrix}$, cioè A sarebbe riducibile). Se A è invertibile e stocastica per colonne, allora A^{-1} è stocastica per colonne ($\mathbf{e}^TA = \mathbf{e}^T \Rightarrow \mathbf{e}^T = \mathbf{e}^TA^{-1}$). Se A è invertibile e non negativa, allora A^{-1} in generale non è non negativa ($A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$).

Sia $A \geq O$, irriducibile, stocastica per colonne, invertibile, con autovalori $\lambda_j(A)$ tali che $0 < |\lambda_n(A)| \leq \ldots \leq |\lambda_1(A)| = \lambda_1(A) = 1 = \rho(A)$. Allora A^{-1} è irriducibile, stocastica per colonne, ma in generale può non essere non negativa (vedi sopra). Esaminiamo il teorema delle potenze quando applicato ad A^{-1}, lasciando $\|\cdot\|$ e $\mathbf{u}$ arbitrari. L'autovalore dominante di A^{-1} è $1/\lambda_n(A)$.

L'ipotesi che $m_g(1/\lambda_n(A))$ sia uguale a $m_a(1/\lambda_n(A)) = q$, $q \geq 1$, non è in generale verificata, come mostra il seguente esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}, \ A^{-1} = \frac{1}{1/4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma(A^{-1}) = \{1, -2, -2\},$$

$2 = m_a^{(A^{-1})}(-2) > m_g^{(A^{-1})}(-2) = 1$.

Occorre quindi supporre che $m_g(1/\lambda_n(A))$ sia uguale a $m_a(1/\lambda_n(A)) = q$, $q \geq 1$ (ciò sarebbe sicuramente vero se A fosse diagonalizzabile).

L'ipotesi $|1/\lambda_n(A)| > |1/\lambda_j(A)|$, $\forall\, j \leq n-q$ può non essere verificata in generale (anche se A fosse diagonalizzabile). Ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1-a & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma(A) = \{1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4a})\},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma(A^{-1}) = \{1, \frac{1}{2a}(-1 \mp \sqrt{1-4a})\},$$

la matrice A per $a \in (\frac{1}{4}, 1)$ ha due autovalori distinti di modulo minimo. Inoltre non è sicuramente verificata per le matrici A per cui $|1/\lambda_n(A)| = |1/\lambda_j(A)|$, $\forall\, j \leq n-q$. (Problema: come sono fatte le matrici $A \geq O$, irriducibili, stocastiche per colonne, per cui $|\lambda_n(A)| = \ldots = |\lambda_1(A)| = \lambda_1(A) = 1$? Sicuramente sono invertibili …sia INS l'insieme di tali matrici).

Occorre quindi supporre che A non appartenga a INS e che $|1/\lambda_n(A)| > |1/\lambda_j(A)|$, $\forall\, j \leq n-q$ (ciò sarebbe sicuramente vero se A è definita positiva e $A \notin$INS …).

Dati $\mathbf{x}_j$ linearmente indipendenti tali che $A^{-1}X = XJ$, $X = [\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n]$, dove J è la forma canonica di Jordan di A^{-1} e $A^{-1}\mathbf{x}_j = \frac{1}{\lambda_n(A)}\mathbf{x}_j$, $j > n-q$, occorre prendere $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, tale che nell'espressione $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, $\mathbf{x} = \sum_{j>n-q} \alpha_j \mathbf{x}_j$, $\mathbf{r} = \sum_{j \leq n-q} \alpha_j \mathbf{x}_j$, il vettore $\mathbf{x}$ sia non nullo.

Occorre supporre che $\mathbf{u}^H\mathbf{x} \neq 0$. Tale ipotesi sarebbe verificata se A fosse normale (ovvero diagonalizzabile da unitaria), scegliendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$; infatti si avrebbe $\mathbf{u}^H\mathbf{x} = \mathbf{v}^H\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \neq 0$.

Infine, ogni vettore e scalare prodotto dall'algoritmo

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}, \ \ \mathbf{a}_k := A^{-1}\mathbf{v}_{k-1}, \ \varphi_k := \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{a}_k}{\mathbf{u}^H\mathbf{v}_{k-1}}, \ \mathbf{v}_k := \mathbf{a}_k/\|\mathbf{a}_k\|, \ k = 1, 2, \ldots,$$

sarebbe ben definito se $\mathbf{u}^H\mathbf{v}_{k-1} \neq 0$, $\forall\, k$ (perché $\mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$, $\forall\, k$).

Quindi, nelle ipotesi $A \notin$INS e $m_g(1/\lambda_n(A)) = m_a(1/\lambda_n(A)) = q$, $q \geq 1$, $|1/\lambda_n(A)| > |1/\lambda_j(A)|$, $\forall\, j \leq n-q$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (ovvero, non nulla la componente di $\mathbf{v}$ lungo l'autospazio dell'autovalore dominante di A^{-1}), $\mathbf{u}^H\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{u}^H\mathbf{v}_{k-1} \neq 0$, $\forall\, k$, otteniamo la tesi del teorema, cioè

$$\mathbf{v}_k = \frac{A^{-k}\mathbf{v}}{\|A^{-k}\mathbf{v}\|}, \ \varphi_k = \frac{\mathbf{u}^H A^{-k}\mathbf{v}}{\mathbf{u}^H A^{-(k-1)}\mathbf{v}}, \ (\frac{\lambda_n(A)}{|\lambda_n(A)|})^k \mathbf{v}_k \ \to \ \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \ \varphi_k \ \to \ 1/\lambda_n(A)$$

(Nota: per $\mathbf{z} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ si ha $A^{-1}\mathbf{z} = \frac{1}{\lambda_n(A)}\mathbf{z}$.)

Problema: i) Data la decomposizione di Jordan di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $X^{-1}AX = J$, la matrice J' della decomposizione di Jordan di A^{-1} è strutturata come J solo che sulla diagonale di J' ci sono gli inversi degli elementi diagonali di J. È vera questa affermazione?

ii) Note le matrici X, J tali che $X^{-1}AX = J$, si possono ricavare con un numero finito di operazioni aritmetiche matrici X', J' tali che $(X')^{-1}A^{-1}X' = J'$, dove J' è la matrice della decomposizione di Jordan di A^{-1} ? Si ha $X^{-1}A^{-1}X = J^{-1}$ e

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2}\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^3}\begin{bmatrix} \alpha^2 & -\alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Queste matrici possono essere trasformate tramite una trasformazione per similitudine semplice nella forma

$$\begin{bmatrix} 1/\alpha & 1 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1/\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{bmatrix} \quad ?$$