Sia $\mathcal{G} = (\{1,2,\dots,n\}, E)$ un grafo orientato. Definizione di matrici di Adiacenza e di Transizione del grafo $\mathcal{G}$:

$$[Adiac(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \in E \\ 0 & ij \notin E \end{cases}, \quad [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1/\deg(i) & ij \in E \\ 0 & ij \notin E \end{cases}$$

($\deg(i) = \#$archi uscenti dal vertice i). Notiamo che se sommiamo gli elementi di ogni riga della matrice $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ otteniamo 1 oppure 0. Precisamente,

$$\sum_j [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1 & \deg(i) > 0 \\ 0 & \deg(i) = 0 \end{cases}.$$

Osservazione importante: la matrice $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ compare nel momento in cui scriviamo in forma vettoriale le seguenti condizioni

$$p_j = \sum_{i:\, i\to j} \frac{p_i}{\deg(i)}, \; j = 1,2,\dots,n, \tag{-1}$$

soddisfatte dalle "importanze" (authorities) p_j dei vertici j di $\mathcal{G}$. Infatti, (-1) è equivalente all'identità $\mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{p}$, dove $\mathbf{p} = [p_1\, p_2\, \cdots\, p_n]^T$ è il vettore delle importanze.

Definizione. *Una matrice A $n\times n$ si dice riducibile se esiste P $n\times n$ matrice di permutazione tale che*

$$P^TAP = \begin{bmatrix} M & R \\ O & N \end{bmatrix}, \quad M, N \textit{ quadrate.}$$

Se A $n\times n$ è riducibile, allora esiste P $n\times n$ matrice di permutazione tale che

$$P^TAP = \begin{bmatrix} M & R \\ O & N \end{bmatrix}, \quad M, N \text{ quadrate, con } M \text{ nulla o irriducibile.}$$

Dunque nella definizione potremmo anche richiedere che M sia nulla oppure irriducibile.

Proposizione. *Sia A $n\times n$ irriducibile non negativa e tale che $\sum_j a_{ij} \leq 1\ \forall\, i$ & $\exists\, k$ per cui $\sum_j a_{kj} < 1$. Allora 1 non è autovalore di A.*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del terzo teorema di Gershgorin. □

Teorema. *Dato un grafo orientato $\mathcal{G}$, affinché possa essere vera la seguente affermazione*

$$\exists!\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{p} > \mathbf{0},\ \|\mathbf{p}\|_1 = 1 \textit{ tale che } \mathbf{p} = [\mathit{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{p}, \tag{0}$$

la matrice $\mathit{Trans}(\mathcal{G})$ deve essere stocastica per righe ed irriducibile.

Dimostrazione. Supponiamo che vale (0). L'identità $\mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{p}$ e la condizione $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ implicano

$$1 = \sum_i p_i = \sum_i ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{p})_i = \sum_i \sum_j ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T)_{ij} p_j$$

$$= \sum_i \sum_j ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})])_{ji} p_j = \sum_j \Big(\sum_i ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})])_{ji} \Big) p_j$$

$$= \sum_{j:\, \deg(j)>0} \Big(\sum_i ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})])_{ji} \Big) p_j + \sum_{j:\, \deg(j)=0} \Big(\sum_i ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})])_{ji} \Big) p_j$$

$$= \sum_{j:\, \deg(j)>0} \Big(1 \Big) p_j + \sum_{j:\, \deg(j)=0} \Big(0 \Big) p_j \ =: \ \alpha\,.$$

Se esistesse un indice j^* per cui $\deg(j^*) = 0$, allora, dall'identità $1 = \alpha$ appena dimostrata e dal fatto che ogni componente di $\mathbf{p}$ è positiva e che la somma delle componenti di $\mathbf{p}$ è uguale a 1, seguirebbe che $1 = \alpha < 1$, il che è assurdo. Dunque si deve avere che $\deg(j) > 0$ per ogni $j = 1, 2, \dots, n$, o, equivalentemente, $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ deve essere stocastica per righe.

Ora supponiamo di nuovo che vale (0) e, inoltre, che $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ è stocastica per righe. Dimostriamo che allora $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ deve essere irriducibile.

Supponiamo per assurdo che $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ è riducibile. Dunque esiste P $n \times n$ matrice di permutazione tale che

$$P^T \mathrm{Trans}(\mathcal{G}) P = \begin{bmatrix} M & R \\ O & N \end{bmatrix}, \quad M, N \text{ quadrate, con } M \text{ nulla o irriducibile.} \tag{1}$$

Notiamo che dal fatto che $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ è stocastica per righe segue che anche la matrice $\begin{bmatrix} M & R \\ O & N \end{bmatrix}$ qui sopra deve essere stocastica per righe.

La (1) implica $\mathrm{Trans}(\mathcal{G}) = P \begin{bmatrix} M & R \\ O & N \end{bmatrix} P^T$. Dunque (0) implica

$$\mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p} = P \begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix} P^T \mathbf{p}, \quad P^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix} P^T \mathbf{p},$$

$$\begin{bmatrix} (P^T \mathbf{p})_{up} \\ (P^T \mathbf{p})_{down} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (P^T \mathbf{p})_{up} \\ (P^T \mathbf{p})_{down} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

dove $(P^T\mathbf{p})_{up}$ è il vettore costituito dalle prime k componenti di $P^T\mathbf{p}$, essendo k $(1 \le k < n)$ l'ordine della matrice M e $(P^T\mathbf{p})_{down}$ è il vettore costituito dalle ultime $n-k$ componenti di $P^T\mathbf{p}$. Osserviamo che la matrice $\begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix}$ è stocastica per colonne.

Faremo ora vedere che dalla (2) segue

- o che, oltre $\mathbf{p}$, vi sono un numero infinito di altri vettori $\mathbf{z}^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}^\alpha > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}^\alpha\|_1 = 1$, tali che $\mathbf{z}^\alpha = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{z}^\alpha$, [Caso $R = O$]

- oppure che almeno una delle componenti di $\mathbf{p}$ deve essere nulla. [Caso $R \neq O$]

Poiché questi sono entrambi eventi che contraddicono le ipotesi, ne seguirà che $\mathrm{Trans}(\mathcal{G})$ deve essere irriducibile.

Caso $R = O$: in questo caso l'uguaglianza (2), che diventa

$$\begin{bmatrix} (P^T\mathbf{p})_{up} \\ (P^T\mathbf{p})_{down} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & O \\ O & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (P^T\mathbf{p})_{up} \\ (P^T\mathbf{p})_{down} \end{bmatrix},$$

implica

$$\begin{bmatrix} \alpha\frac{(P^T\mathbf{p})_{up}}{\|(P^T\mathbf{p})_{up}\|_1} \\ (1-\alpha)\frac{(P^T\mathbf{p})_{down}}{\|(P^T\mathbf{p})_{down}\|_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & O \\ O & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\frac{(P^T\mathbf{p})_{up}}{\|(P^T\mathbf{p})_{up}\|_1} \\ (1-\alpha)\frac{(P^T\mathbf{p})_{down}}{\|(P^T\mathbf{p})_{down}\|_1} \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Sia $\mathbf{z}^\alpha \in \mathbb{R}^n$ la famiglia di vettori definiti dall'identità

$$P^T\mathbf{z}^\alpha = \begin{bmatrix} \alpha\frac{(P^T\mathbf{p})_{up}}{\|(P^T\mathbf{p})_{up}\|_1} \\ (1-\alpha)\frac{(P^T\mathbf{p})_{down}}{\|(P^T\mathbf{p})_{down}\|_1} \end{bmatrix}, \ \alpha \in (0,1).$$

Si noti che tali vettori $\mathbf{z}^\alpha$ sono tutti distinti tra loro, sono positivi e hanno norma-1 uguale a 1. Inoltre, per come sono stati definiti, essi soddisfano le identità

$$P^T\mathbf{z}^\alpha = \begin{bmatrix} M^T & O \\ O & N^T \end{bmatrix} P^T\mathbf{z}^\alpha, \quad \mathbf{z}^\alpha = P\begin{bmatrix} M^T & O \\ O & N^T \end{bmatrix} P^T\mathbf{z}^\alpha = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{z}^\alpha.$$

Quindi, oltre $\mathbf{p}$, vi sono altri infiniti vettori $\mathbf{z}^\alpha$ (costruibili a partire da $\mathbf{p}$) che verificano le condizioni $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, $\mathbf{x} = \mathrm{Trans}(\mathcal{G})^T\mathbf{x}$, mentre avevamo supposto che ne esisteva uno solo.

Caso $R \neq O$: l'uguaglianza (2)

$$\begin{bmatrix} (P^T\mathbf{p})_{up} \\ (P^T\mathbf{p})_{down} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (P^T\mathbf{p})_{up} \\ (P^T\mathbf{p})_{down} \end{bmatrix}$$

(dove, ricordiamo, $\begin{bmatrix} M^T & O \\ R^T & N^T \end{bmatrix}$ è stocastica per colonne) implica

$$(P^T\mathbf{p})_{up} = M^T(P^T\mathbf{p})_{up}, \ M \text{ nulla o irriducibile.} \tag{3}$$

Se M è nulla, allora (3) implica $(P^T\mathbf{p})_{up} = \mathbf{0}$, cioè almeno k elementi di $\mathbf{p}$ devono essere nulli. (Si ricorda che $k \geq 1$).

Supponiamo in alternativa che M è irriducibile. Poiché R è non nulla, c'è almeno una colonna di R^T, diciamo quella di indice u, in cui c'è almeno un elemento positivo. Dunque M^T è non negativa, irriducibile e tale che $\sum_j [M^T]_{ji} \leq 1 \ \forall\, i$ e $\sum_j [M^T]_{j,u} < 1$, ovvero M è non negativa, irriducibile e tale che $\sum_j M_{ij} \leq 1 \ \forall\, i$ e $\sum_j M_{u,j} < 1$. Quindi, per la Proposizione, 1 non può essere autovalore di M, ovvero non può essere autovalore di M^T. Questo fatto e il fatto che vale la condizione (3) implicano $(P^T\mathbf{p})_{up} = \mathbf{0}$, cioè almeno k elementi di $\mathbf{p}$ devono essere nulli. (Si ricorda che $k \geq 1$).

In conclusione, nel caso $R \neq O$, abbiamo mostrato che almeno una componente di $\mathbf{p}$ deve essere nulla, contro l'ipotesi iniziale che tutte le componenti di $\mathbf{p}$ sono positive.

Abbiamo visto che in entrambi i casi $R = O$ e $R \neq O$ giungiamo a contraddire le ipotesi. Dunque $\text{Trans}(\mathcal{G})$ non può essere riducibile (se vale (0)). $\square$

Esempio di "riduzione" di una matrice. Sia

$$A = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & a & 0 & * & b & * & 0 \\ * & i & l & * & m & * & n \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & c & 0 & * & d & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & e & f & * & g & * & h \end{bmatrix}, \; h, f, n, l \neq 0$$

$$A \;\to\; P^T A = \begin{bmatrix} * & e & f & * & g & * & h \\ * & a & 0 & * & b & * & 0 \\ * & i & l & * & m & * & n \\ * & c & 0 & * & d & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \end{bmatrix} \;\to\; P^T A P = \left[\begin{array}{cccc|ccc} h & e & f & g & * & * & * \\ 0 & a & 0 & b & * & * & * \\ n & i & l & m & * & * & * \\ 0 & c & 0 & d & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right]$$

(P scambia le righe/colonne 1 e 7 e le righe/colonne 4 e 5) (Nota: $\begin{bmatrix} h & e & f & g \\ 0 & a & 0 & b \\ n & i & l & m \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$ è riducibile)

$$\to\; Q^T P^T A P = \begin{bmatrix} h & e & f & g & * & * & * \\ n & i & l & m & * & * & * \\ 0 & a & 0 & b & * & * & * \\ 0 & c & 0 & d & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \;\to\; (PQ)^T A (PQ) = \left[\begin{array}{cc|ccccc} h & f & e & g & * & * & * \\ n & l & i & m & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & a & b & * & * & * \\ 0 & 0 & c & d & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right]$$

(Q scambia le righe/colonne 2 e 3)

Nota: la matrice PQ è una matrice di permutazione; la matrice $\begin{bmatrix} h & f \\ n & l \end{bmatrix}$ è irriducibile.

Vedi anche l'articolo "Berkhin survey pagerank computing Internet Mathematics"

Si è visto che se vale la seguente affermazione

$$\exists !\ \mathbf{p} > \mathbf{0},\ \|\mathbf{p}\|_1 = 1 \ \text{ tale che } \ \mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p} \qquad (*)$$

allora necessariamente $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ deve essere, oltre che non negativa, stocastica per colonne e irriducibile.

Più avanti si noterà che, data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, il problema $\mathbf{z} = A\mathbf{z}$, se A è non negativa, stocastica per colonne, e irriducibile, ammette una unica soluzione $\mathbf{z} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}\|_1 = 1$. Quindi, per il nostro particolare problema, se $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$, oltre che non negativa, fosse stocastica per colonne e irriducibile, allora si avrebbe effettivamente (*). Nella maggior parte dei casi, però, la matrice $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ non soddisfa queste condizioni, quindi, in questi casi, il risultato di esistenza e unicità (*) si potrà ottenere se e solo se si sostituisce $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ con una matrice A "vicina" a $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$, che sia stocastica per colonne e irriducibile (oltre che non negativa).

Osservazione. Prima di proseguire, accenniamo a un modello di visita del grafo che porterà ad un metodo per il calcolo del vettore $\mathbf{p}$ in (*), se quest'ultimo è ben definito. Sia $p_i^{(k)}$ la probabilità che un visitatore del grafo al passo k della sua visita sia nel vertice i. È ragionevole richiedere che $p_i^{(k)} > 0\ \forall\, i$ (c'e probabilità che al passo k della sua visita il visitatore sia sul vertice i, $\forall\, i$) e che $\sum_i p_i^{(k)} = 1$ (al passo k della sua visita il visitatore deve essere in uno dei vertici del grafo). Inoltre, è ragionevole dire che

$$p_j^{(k+1)} = \sum_{i:\, i\to j} \frac{p_i^{(k)}}{\deg\,(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{ji} p_i^{(k)}$$

dove $T_{ji} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]_{ij}$ (uguale a $\frac{1}{\deg\,(i)}$ se $\deg\,(i) > 0$ e a zero se $\deg\,(i) = 0$) è la probabilità che il visitatore dal vertice i vada nel vertice j. Ne segue che i vettori delle probabilità $\mathbf{p}^{(k)}$ e $\mathbf{p}^{(k+1)}$ soddisfano l'identità $\mathbf{p}^{(k+1)} = ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p}^{(k)}$.

Dato un vettore iniziale $\mathbf{p}^{(0)}$, $\mathbf{p}^{(0)} > \mathbf{0}$, $\sum_i \mathbf{p}_i^{(0)} = 1$, la legge $\mathbf{p}^{(k+1)} = ([\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p}^{(k)}$ genera una successione di vettori che vorremmo fossero tutti tali che $\mathbf{p}^{(k)} > \mathbf{0}$ e $\|\mathbf{p}^{(k)}\|_1 = 1$, e vorremmo inoltre che $\mathbf{p}^{(k)} \to \mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p}$, quando $k \to +\infty$, in modo da avere un metodo per calcolare il vettore $\mathbf{p} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T \mathbf{p}$, se ben definito. [1]

[1] Dato in generale il problema di determinare in un certo spazio S un x^* che rimanga invariato sotto l'azione di un operatore φ, il primo metodo che viene in mente per calcolare un tale $x^* \in S$ è il metodo delle approssimazioni successive che, a partire da un certo $x_0 \in S$, tramite la legge $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, genera una successione $x_k \in S$ che si spera converga ad $\mathbf{x}^*$. In particolare, se lo spazio S è $\mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora da uno studio grafico della successione $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ si possono intuire facilmente delle condizioni su x_0 e su φ che obbligano tale successione a convergere ad un punto x^* ascissa di una delle intersezioni (che si suppongono esistenti) tra la funzione φ e la bisettrice. Ad esempio, se $\varphi \in \mathcal{C}^1$ in un intorno di x^*, allora $\{x_k\}$ converge a x^* se $|\varphi'(x^*)| < 1$ e x_0 non è troppo lontano da x^*; e non converge a x^* se $|\varphi'(x^*)| > 1$ (a meno di eventi fortuiti). ...

Premessa (risultati di algebra lineare). Si osserva che

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\; B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\; B^k = O,\; k \geq 4.$$

Si osserva che, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\alpha^{k-2} \\ 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & 0 & \alpha^k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\alpha^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\alpha^{k-3} \\ 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\alpha^{k-2} \\ 0 & 0 & \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^k \end{bmatrix},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Più in generale, si dimostra che

$$B = B_s(\alpha) = \left.\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}\right\} s \;\Rightarrow\; B^k = \sum_{j=0}^{\min\{k,s-1\}} c_{k,j+1}(Z^T)^j,\;\; Z^T = \left.\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \end{bmatrix}\right\} s\,,$$

dove

$$c_{k,j+1} = \frac{1}{j!}\frac{d^j(\alpha^k)}{d\alpha} = \frac{1}{j!}k(k-1)\cdots(k-j+1)\alpha^{k-j}.$$

È evidente che $B^k \to O$ se e solo se $|\alpha| < 1$. Nel caso $\alpha = 0$ si ha che $B^k = O$ per $k \geq s$.

Teorema di Jordan. Ogni matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è simile a una matrice J diagonale a blocchi i cui blocchi diagonali sono fatti come B (tale matrice J è detta forma canonica di Jordan di M). In ogni blocco diagonale, al posto di α, ovviamente, c'è un autovalore λ di M. Lo stesso autovalore può comparire in più blocchi diagonali. La matrice M è diagonalizzabile se e solo se i blocchi diagonali della forma canonica di Jordan sono tutti 1×1.

$$M \in \mathbb{C}^{n\times n} \;\Rightarrow\; \exists\, X :\; X^{-1}MX = \begin{bmatrix} \cdot & O & O \\ O & B_s(\lambda) & O \\ O & O & \cdot \end{bmatrix} =: J. \qquad (TeoJordan)$$

Corollario del Teorema di Jordan. Data $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la successione di matrici M^k, $k \in \mathbb{N}$, tende alla matrice nulla se e solo se tutti gli autovalori di M hanno modulo minore di 1.
Dimostrazione. La tesi segue dalla seguente rappresentazione di M^k:

$$M^k = \Big(X \begin{bmatrix} \cdot & O & O \\ O & B_s(\lambda) & O \\ O & O & \cdot \end{bmatrix} X^{-1}\Big)^k = X \begin{bmatrix} \cdot & O & O \\ O & B_s(\lambda) & O \\ O & O & \cdot \end{bmatrix}^k X^{-1} = X \begin{bmatrix} \cdot & O & O \\ O & B_s(\lambda)^k & O \\ O & O & \cdot \end{bmatrix} X^{-1}. \;\square$$

Sia ora A $n \times n$ non negativa, stocastica per colonne, irriducibile.

Per il fatto che A è stocastica per colonne ($A^T\mathbf{e} = \mathbf{e}$) il numero reale 1 deve essere autovalore di A, dunque deve esistere $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{z} = A\mathbf{z}$.

Per il fatto che A è non negativa e stocastica per colonne, gli altri autovalori di A, $\lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)$, devono avere modulo minore o uguale di uno.

Per il fatto che A è non negativa, stocastica per colonne e irriducibile, nessuno degli autovalori $\lambda_j(A)$, $j = 2, \ldots, n$, può essere uguale a 1, cioè 1 come autovalore di A ha molteplicità algebrica uguale a uno, e ogni autovettore di 1 – che è definito a meno di un multiplo – ha le sue componenti tutte non nulle e dello stesso segno. (Questi ultimi risultati, di cui si omette la dimostrazione, fanno parte della teoria di Perron-Frobenius).

Ne segue che vale il seguente

TEOREMA PF. $A \geq O$, stocastica per colonne, irriducibile $\Rightarrow$

$$\lambda_1(A) = 1,\ |\lambda_j(A)| \leq 1,\ j = 2, \ldots, n \ \text{ e } \ \exists!\ \mathbf{z} > \mathbf{0},\ \|\mathbf{z}\|_1 = 1 \ \text{ tale che } \ \mathbf{z} = A\mathbf{z}. \qquad (**)$$

Se A fosse anche stocastica per righe (cioè $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$), allora è semplice capire chi è il vettore $\mathbf{z}$ in (**): $\mathbf{z} = \frac{1}{n}\mathbf{e}$. Altrimenti, occorre fare calcoli per ottenere $\mathbf{z}$.

Esempio. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},\ a \in [0, 1].$$

Se $a \in (0, 1]$, allora A è non negativa, stocastica per colonne, irriducibile, quindi vale (**). Se $a = 1$, A è anche stocastica per righe, quindi $\mathbf{z} = [\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]^T$. Se $a \in (0, 1)$, per ottenere $\mathbf{z}$ occorre fare qualche conto:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1-a & -1 & 1 \\ a & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0},\ z_i > 0\,\forall\, i,\ \sum_i z_i = 1\ \ldots \Leftrightarrow \ldots \ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2+a} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

Si osserva che per $a = 0$ esiste ed è unico un vettore $\mathbf{z}$ tale che $\mathbf{z} = A\mathbf{z}$, che $\mathbf{z}$ è non negativo, ma $\mathbf{z}$ non è positivo ($z_3 = 0$); cioè non vale (**). E infatti A è riducibile se $a = 0$. Si osserva inoltre che $A = [\text{Trans}(\mathcal{G})]^T$ per un grafo $\mathcal{G}$ se e solo se $a = 0, 1, \frac{1}{2}$.

TEOREMA Potenze (calcolo di $\mathbf{z}$: costruzione di una successione di vettori convergente a $\mathbf{z}$). Sia $\mathbf{z}_0 > \mathbf{0}$ $\|\mathbf{z}_0\|_1 = 1$ arbitrario. Definiamo $\mathbf{z}_1 = A\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}_2 = A\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Se A è non negativa, stocastica per colonne e irriducibile, allora i vettori $\mathbf{z}_k$ sono tutti positivi e di norma-1 uguale a 1. Se inoltre $|\lambda_j(A)| < 1$, $j = 2, \ldots, n$, allora per k che tende a più infinito i vettori $\mathbf{z}_k$ convergono al vettore $\mathbf{z}$ in (**), e più $\max_{j=2,\ldots,n} |\lambda_j(A)|$ è minore di 1, più rapida è la convergenza.

Osservazione. Prima di dimostrare questo risultato, notiamo che la condizione $|\lambda_j(A)| < 1$, $j = 2, \ldots, n$, non è in generale soddisfatta da una matrice A non negativa, stocastica per colonne, irriducibile. Vedi ad esempio le matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma(A) = \{1, -1\}$;

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma(A) = \{1, e^{\mathbf{i}2\pi/3}, e^{\mathbf{i}4\pi/3}\}$; $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in (0,1)$, $\sigma(A) = \{1, 0, -1\}$.

Dimostrazione. Si verifica che $\mathbf{z}_k > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}_k\|_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{z}_{k+1} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{z}_{k+1}\|_1 = 1$. Poiché $\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k$ con $A \geq O$ e $\mathbf{z}_k > \mathbf{0}$, il vettore $\mathbf{z}_{k+1}$ deve essere non negativo. Se una componente i di $\mathbf{z}_{k+1}$ fosse nulla, allora la riga i di A dovrebbe essere nulla e A sarebbe riducibile, contro il fatto che invece A si suppone irriducibile. Ne segue che ogni componente di $\mathbf{z}_{k+1}$ deve essere positiva. Inoltre $\sum_i (\mathbf{z}_{k+1})_i = \sum_i (A\mathbf{z}_k)_i = \sum_i \sum_j A_{ij}(\mathbf{z}_k)_j = \sum_j \sum_i A_{ij}(\mathbf{z}_k)_j = \sum_j (\mathbf{z}_k)_j = 1$. Dunque $\|\mathbf{z}_{k+1}\|_1 = 1$.

Supponiamo ora $|\lambda_j(A)| < 1$, $j = 2, \ldots, n$. Dalle equazioni $\mathbf{z} = A\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}_{k+1} = A\mathbf{z}_k$ segue l'identità $\mathbf{z} - \mathbf{z}_{k+1} = A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k)$ che mette in relazione l'errore commesso al passo $k+1$ con l'errore al passo k ($\forall\, k$). Scrivendo questa identità per $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbf{z} - \mathbf{z}_1 = A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$, $\mathbf{z} - \mathbf{z}_2 = A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1) = A(A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)) = A^2(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$, $\mathbf{z} - \mathbf{z}_3 = A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_2) = A(A^2(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)) = A^3(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$, ci si accorge che l'errore al passo k è legato all'errore iniziale $\mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ dall'uguaglianza $\mathbf{z} - \mathbf{z}_k = A^k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$ ($\forall\, k$). La successione A^k sicuramente non converge alla matrice nulla perché uno degli autovalori di A è uguale a 1 (per il Corollario del teorema di Jordan), quindi questa espressione di $\mathbf{z} - \mathbf{z}_k$ non ci permette di concludere che $\mathbf{z} - \mathbf{z}_k \to \mathbf{0}$, se $k \to +\infty$.

Essendo però $\mathbf{e}^T\mathbf{z} = 1$ ed $\mathbf{e}^T\mathbf{z}_k = 1\ \forall\, k$, si ha anche $\mathbf{z} - \mathbf{z}_{k+1} = A(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k) = (A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T + z\mathbf{e}^T)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k) = (A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k)$. Dunque vale anche l'identità $\mathbf{z} - \mathbf{z}_{k+1} = (A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_k)$ e, di conseguenza, si ha la seguente espressione alternativa per l'errore al passo k: $\mathbf{z} - \mathbf{z}_k = (A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T)^k(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$ ($\forall\, k$). Poiché $\sigma(A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T) = \{0, \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)\}$ [2], stavolta $(A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T)^k \to O$, se $k \to +\infty$, dunque $\mathbf{z} - \mathbf{z}_k \to \mathbf{0}$. $\square$

I Teoremi PF e Potenze ci dicono che se $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ è non negativa, stocastica per colonne, irriducibile e $n-1$ dei suoi autovalori hanno modulo strettamente minore di 1, allora (*) è vera e il $\mathbf{p}$ in (*) è calcolabile come limite della successione di distribuzioni discrete di probabilità (d.d.p.) $\mathbf{p}^{(0)} > \mathbf{0}$, $\|\mathbf{p}^{(0)}\|_1 = 1$, $\mathbf{p}^{(k+1)} = [\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T\mathbf{p}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Se invece $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ non soddisfa quelle ipotesi, allora gli stessi Teoremi PF e Potenze ci inducono a modificare $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$ in una matrice A (vicina a $[\mathrm{Trans}(\mathcal{G})]^T$) non negativa, stocastica per colonne, irriducibile, con $n-1$ dei suoi autovalori di modulo strettamente minore di 1, in modo che

$$\exists\,!\ \tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0},\ \|\tilde{\mathbf{p}}\|_1 = 1 \ \text{ tale che }\ \tilde{\mathbf{p}} = A\tilde{\mathbf{p}}, \qquad (\tilde{*})$$

---

[2] Siano $\mathbf{y}_j$ tali che $X = [\mathbf{z}\ \mathbf{y}_2\ \cdot\cdot\ \mathbf{y}_n]$ è invertibile. Allora $A[\mathbf{z}\ \mathbf{y}_2\ \cdot\ \mathbf{y}_n] = [A\mathbf{z}\ A\mathbf{y}_2\ \cdot\ A\mathbf{y}_n] = [\mathbf{z}\ A\mathbf{y}_2\ \cdot\ A\mathbf{y}_n]$ $\Rightarrow X^{-1}AX = [X^{-1}\mathbf{z}\ X^{-1}A\mathbf{y}_2\ \cdot\ X^{-1}A\mathbf{y}_n] = \begin{bmatrix} 1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(B) = \{\lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)\}$. Inoltre, $X^{-1}(A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T)X = \begin{bmatrix} 1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} - X^{-1}\mathbf{z}\mathbf{e}^T X = \begin{bmatrix} 1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} - \mathbf{e}_1[1\ *\,] = \begin{bmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A - \mathbf{z}\mathbf{e}^T) = \{0, \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A)\}$.

e $\tilde{\mathbf{p}} = \lim_{k\to+\infty} \tilde{\mathbf{p}}^{(k)}$, $\tilde{\mathbf{p}}^{(0)} > \mathbf{0}$, $\|\tilde{\mathbf{p}}^{(0)}\|_1 = 1$ e $\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} = d.d.p.$ generate da $\tilde{\mathbf{p}}^{(k+1)} = A\tilde{\mathbf{p}}^{(k)}$, $(alg\tilde{*})$

e a spostare il nostro interesse da $\mathbf{p}$ a questo nuovo vettore $\tilde{\mathbf{p}}$.

<u>Caso IPOTESI dei Teoremi PF e Potenze non soddisfatte da $[\text{Trans}(\mathcal{G})]^T$</u>
Sia $d_i = 1$ se $\deg(i) = 0$ e $d_i = 0$ se $\deg(i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Il vettore $\mathbf{d}$ è detto "dangling" vertices (pages) indicator. Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$, $\mathbf{v}$ =personalization vector. La matrice Trans($\mathcal{G}$) si sostituisce con una matrice stocastica per righe:

$$\text{Trans}(\mathcal{G}) \;\to\; \text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T.$$

Si noti che $\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T$ è la matrice di transizione del grafo $\mathcal{G}'$ ottenuto arricchendo $\mathcal{G}$ con gli archi orientati $i1, i2, \ldots, in$, per ogni vertice i da cui in $\mathcal{G}$ non parte nessun arco. Anche la matrice $\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T$ e l'identità $\tilde{\mathbf{p}}^{(k+1)} = [\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T]^T\tilde{\mathbf{p}}^{(k)}$ possono rispecchiare la realtà: il visitatore del grafo, nel momento in cui arriva su un vertice che non ha outlinks da lì può andare in un qualsiasi altro vertice j del grafo, con probabilità v_j ($1/n$ se $\mathbf{v}$ è uniforme).

Sia $\sigma(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) = \{1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$; sappiamo che $|\mu_j| \leq 1$, $j = 2, \ldots, n$. Se $\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T$ fosse anche irriducibile e se i suoi autovalori μ_j avessero modulo strettamente minore di 1, allora la matrice A che vogliamo introdurre (per cui valgono $(\tilde{*})$ e $alg(\tilde{*})$) può essere proprio $[\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T$.

Se queste due condizioni non sono soddisfatte, oppure se non è possibile verificare che sono soddisfatte, allora si introduce una ulteriore modifica di Trans($\mathcal{G}$):

$$\text{Trans}(\mathcal{G}) \;\to\; \text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T \;\to\; c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T,\; c \in (0,1).$$

Esaminiamo la generica riga i della matrice $c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T$:

$$\begin{array}{ll} i \mid \deg(i) = 0: & c\mathbf{v}^T + (1-c)\mathbf{v}^T = \mathbf{v}^T, \\ i \mid \deg(i) > 0: & c[\ldots 0\ \frac{1}{deg(i)}\ 0\ \frac{1}{deg(i)}\ 0\ \ldots\ 0\ \frac{1}{deg(i)}\ 0 \ldots] + (1-c)\mathbf{v}^T. \end{array}$$

È evidente che $c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T$ è non negativa, stocastica per righe e irriducibile (è positiva!), e modifica poco $\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T$ (la "realtà") se $c \approx 1$. Inoltre, vedremo che $\sigma(c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = \{1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ con $|\lambda_j| < 1$, $j = 2, \ldots, n$. Dunque la matrice A che vogliamo introdurre (per cui valgono $(\tilde{*})$ e $(alg\tilde{*})$) può essere la matrice:

$$\text{Google} = c([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T) + (1-c)\mathbf{v}\mathbf{e}^T.$$

Osservazione. Si noti che la trasposta di A =Google non è la matrice di Transizione di un grafo $\mathcal{G}''$, perché gli elementi diversi da zero della ogni sua riga $i : \deg(i) > 0$ non sono uguali tra loro. Comunque, la formula $\tilde{\mathbf{p}}^{(k+1)} = A\tilde{\mathbf{p}}^{(k)}$, A =Google, in $(alg\tilde{*})$ ci dice che la probabilità che il visitatore da i vada a j è diventata (dopo la nostra sostituzione di $[\text{Trans}(\mathcal{G})]^T$ con A =Google) l'elemento ij di A =Google: è v_j (piccola) se in $\mathcal{G}$ da i non parte nessun arco; è $(1-c)v_j$ (piccola) se in $\mathcal{G}$ da i partono archi ma non c'è un arco da i a j; è $c/\deg(i) + (1-c)v_j$ (grande) se in $\mathcal{G}$ c'è un arco da i a j.

Dimostriamo ora che $\sigma(c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = \{1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ con $|\lambda_j| < 1$, $j = 2, \ldots, n$. Innanzitutto si osserva che $\sigma((\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + \frac{1-c}{c}\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = \{\frac{1}{c}, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$. (sfruttare il fatto che $(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T)\mathbf{e} = \mathbf{e}$) e che quindi $\sigma(c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T) = \{1, c\mu_2, \ldots, c\mu_n\}$. Ne segue che gli $n-1$ autovalori di $c(\text{Trans}(\mathcal{G}) + \mathbf{d}\mathbf{v}^T) + (1-c)\mathbf{e}\mathbf{v}^T$ diversi da 1, hanno tutti modulo minore o uguale a c (perché $|c\mu_j| = c|\mu_j| \leq c \cdot 1 = c$). $\square$

P.S. Una dimostrazione diretta di Francesco e Leonardo del fatto che per $A =$Google vale l'affermazione $\tilde{\mathbf{p}}^{(k)} \to \tilde{\mathbf{p}}$ in $(alg\tilde{*})$ (le altre affermazioni in $(\tilde{*})$ e $(alg\tilde{*})$ si suppongono vere):

$$\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k+1)} = \text{Google}(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k)}) = c([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k)})$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k)} = c^k([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)^k(\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(0)})$$

dove la matrice $([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)^k$ è non negativa e stocastica per colonne per ogni k, dunque i suoi elementi sono non negativi e minori o uguali a 1. Ne segue che la matrice $c^k([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)^k$ tende alla matrice nulla e quindi $\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k)} \to \mathbf{0}$, se $k \to +\infty$. Inoltre

$$\|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(k)}\|_1 \leq \|c^k([\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T)^k\|_1 \|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(0)}\|_1 = c^k \|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^{(0)}\|_1.$$

Il risultato di F.&L. ci dice che per avere una rapida convergenza, c dovrebbe essere scelto piccolo, ma questa scelta non può essere fatta perché vogliamo che nella definizione della matrice Google la parte $[\text{Trans}(\mathcal{G})]^T + \mathbf{v}\mathbf{d}^T$ (che riflette la "realtà") sia dominante. Berkhin scrive che il motore di ricerca google pone $c = 0.85$.

Come il motore di ricerca google utilizza il vettore $\tilde{\mathbf{p}}$ definito in $(\tilde{*})$, $(alg\tilde{*})$ dove $A =$Google

La matrice Google, quando è relativa al grafo del web, cambia continuamente, perché cambia il grafo $\mathcal{G}$ del web. Quindi il vettore $\tilde{\mathbf{p}}$ in $(\tilde{*})$ va periodicamente ri-calcolato, tramite l'algoritmo in $(alg\tilde{*})$. Tale algoritmo è implementabile utilizzando solo un numero costante di vettori di n componenti ed ogni suo passo non richiede più di $O(n)$ operazioni aritmetiche (questo perché ogni riga j di $[\text{Trans}(\mathcal{G})]^T$ ha in media un numero costante – una dozzina – di elementi diversi da zero; ciò è come dire che al vertice j, nella realtà, sono collegati in media una dozzina di altri vertici del grafo). Berkhin dice che $\tilde{\mathbf{p}}$ viene ri-calcolato ogni mese.

A cosa serve $\tilde{\mathbf{p}}$? Per ogni TERM di un huge dictionary il motore di ricerca ha a disposizione la lista $\text{LIST}_{\text{TERM}}$ delle pagine del web che contengono quel TERM. L'utente sottopone al motore di ricerca una QUERY composta da alcuni TERMS, ad esempio QUERY= {Berkhin survey pagerank}. Il motore di ricerca, leggendo la QUERY, forma l'insieme delle pagine web che possono essere di interesse per l'utente

$$\mathcal{I} = \bigcup_{\text{TERM} \in \text{QUERY}} \text{LIST}_{\text{TERM}} = \{7, 23789, 1234567, 305, 11, \ldots\}$$

e l'insieme delle corrispondenti importanze $\{\tilde{p}_7, \tilde{p}_{23789}, \tilde{p}_{1234567}, \tilde{p}_{305}, \tilde{p}_{11}, \ldots\}$ (il motore di ricerca ha a disposizione il vettore pagerank $\tilde{\mathbf{p}}$), ordina tali importanze, $\tilde{p}_{23789} > \tilde{p}_{11} > \tilde{p}_{305} > \ldots$, e restituisce all'utente i titoli delle pagine web in $\mathcal{I}$, elencandoli in ordine di importanza, prima 23789, poi 11, poi 305, ...