STM AnNum I Esonero 3/5/2018

1 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ e considerare il metodo di Gauss-Seidel nella risoluzione del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$.

i) Calcolare la matrice di iterazione del metodo.

ii) Il metodo è convergente?

2 Sia $A = \alpha I + \underline{u}\,\underline{u}^H$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Quali sono i valori di α per cui A è definita positiva?

ii) Nel caso in cui A è definita positiva, calcolare ω^* tale che per ogni $\omega \in (0, \omega^*)$ il metodo di Richardson-Eulero

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad x_{k+1} = x_k + \omega(\underline{b} - Ax_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

è convergente quando applicato ad $A\underline{x} = \underline{b}$; qual'è il valore ottimale di ω? Con che rapidità $\|x_k - A^{-1}\underline{b}\|_2 \to 0$?

iii) Dimostrare che ci sono valori negativi di α per cui il metodo di Jacobi è convergente quando applicato ad $A\underline{x} = \underline{b}$.

3 $A = \begin{bmatrix} -10 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2i & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}$

i) A è hermitiana?

ii) Può essere un autovalore di A uguale a $\rho(A)$?

iii) Trovare $G > 1$ per cui $\mu(A) = \|A\|\|A^{-1}\| > G$ essendo $\|\cdot\|$ una qualsiasi norma matriciale.

4 Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dimostrare le seguenti due affermazioni:

i) Se esiste $k \in \mathbb{N}$ per cui $A^k = \underline{\underline{O}}$ allora $\lambda_i(A) = 0$, $\forall i$.

ii) Se $\lambda_i(A) = 0$, $\forall i$, allora esiste $k \in \mathbb{N}$ per cui $A^k = \underline{\underline{O}}$

(per ii) usare il T. di Schur: $A = UTU^H$, con U unitaria e T triangolare.

II ESONERO 7 GIUGNO 2018 AnNum STM

(1) Sia $A_n = A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definita positiva e $\underline{x} = A_n \underline{e}_1$.

(i) Dimostrare che $x_1 > 0$ e quindi $\underline{x} \neq \underline{0}$.

(ii) Dimostrare che la matrice $n\times n$

$$V_n = I + \frac{1}{\underline{y}^H \underline{x}} \underline{y}\,\underline{y}^H - \frac{1}{\underline{x}^H \underline{x}} \underline{x}\,\underline{x}^H$$

è ben definita, hermitiana e tale che $V_n \underline{x} = \underline{y}$ per ogni vettore $\underline{y} \in \mathbb{C}^n$ tale che $\underline{y}^H \underline{x} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e, in particolare, per $\underline{y} = x_1 \underline{e}_1$.

Riscrivere V_n per $\underline{y} = x_1 \underline{e}_1$ osservando che questa matrice può essere alla base di un algoritmo per la triangolarizzaz. di A alternativo a GAUSS, GIVENS, HOUSEHOLDER.

(2) Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(i) Scrivere un sistema lineare $T\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$, T triangolare superiore, equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ usando il metodo di Gauss e poi quello di Givens.

(ii) Osservare che $\exists$ la decomposiz. di Cholesky di A e calcolarla.

(iii) Dimostrare che ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con diagonale strettamente dominante ammette la decomposiz. LU.

(3) Sia $A_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$, $i,j = 1 \dots n$ $(A \in \mathbb{C}^{n\times n})$.

(i) Osservare che $A_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2}\,dx$

(ii) Per $n = 2$ dimostrare che A ammette la decomp. di Cholesky.

(iii) Dimostrarlo per n generico (sugg. usare (i) e l'uguaglianza $\underline{z}^H A \underline{z} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i z_j a_{ij}$).

15/6/2018 AN NUM STM ESAME SCRITTO

1 Ricordando che « $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ HERMIT. $\Rightarrow \|M\|_2 = \rho(M)$ », DIMOSTRARE CHE, DATA $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ~~generica~~ non singolare, si ha che

$$\mu_2(A^H A) = \mu_2(A)^2$$

e che quindi il sist. lin. $A^H A \underline{x} = A^H \underline{b}$ è peggio condizionato del sist. lin. equivalente $A\underline{x} = \underline{b}$.

2 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Triangolarizzare A con i metodi di GAUSS CON PIVOT e Givens.

ii) Dimostrare che la matrice $M = A + \alpha I$, $\alpha > 0$, è invertibile (sugg: osservare che $A = \underline{u}\,\underline{v}^H$ per opportuni $\underline{u}$ e $\underline{v}$).

iii) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi quando applicato al sistema lineare $M\underline{x} = \underline{b}$ (supponendo sempre $\alpha > 0$).

iv) Dimostrare rigorosamente che ogni matrice A del tipo $A = \underline{x}\,\underline{y}^H$, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^m$, si può triangolarizzare con $O(m)$ operaz. aritmetiche.

3 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 10+i & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

i) È hermitiana?

ii) Ha un autovalore uguale a $\rho(A)$?

iii) Determinare una limitaz. inferiore per $\mu(A)$.
" " " " superiore " ".

ESAME SCRITTO STM - ANNUNI 18/7/2018

1. Dimostrare rigorosamente che

i) $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^m \Rightarrow \|\underline{x}\,\underline{y}^H\|_\infty = \|\underline{x}\|_\infty \|\underline{y}\|_1$

ii) $A \in \mathbb{C}^{m\times m} \Rightarrow \|A\|_2^2 \leq \|A\|_\infty \|A\|_1$

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dimostrare che una perturbazione $\varepsilon > 0$ di uno dei suoi elementi può generare una perturbazione di modulo uguale a $\sqrt{\varepsilon}$ dei suoi autovalori.

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

i) Dimostrare che $\|A\|_2 = 1$

ii) Scrivere una fattorizzazione QR di A

iii) Dimostrare che esiste la fattorizzazione LU di A e calcolarla.

iv) Osservare che A è una matrice di Householder

v) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi quando applicato per risolvere il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{b}$ generico.

vi) Qual è il metodo più conveniente per risolvere il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$?

4. Scrivere una matrice 4×4 con elementi tutti diversi da zero e con numero di condizionamento almeno 100.

5. Data $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, calcolare A^K, $K \in \mathbb{N}$.

[illegible]
AnNum
I appello
Sett.
201[illegible]

1) Data $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & i \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -i & 1 & 1 & -10 \end{bmatrix}$, $i = \sqrt{-1}$,

i) localizzare il meglio possibile gli autovalori di A e osservare che $\det(A) \neq 0$.

ii) Trovare almeno un valore $c > 1$ per cui il numero di condizionamento di A, $\mu_2(A)$, è maggiore di c.

iii) Dire se esistono le fattorizzaz. LU e QR di A, giustificando la risposta.

iv) Nella risoluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono. Scrivere lo schema iterativo di Jacobi.

2) Dimostrare che

$$\| \underline{x}\, \underline{y}^H \|_1 = \| \underline{x} \|_1 \, \| \underline{y} \|_\infty, \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

$$\| A \|_2^2 \leq \| A \|_1 \cdot \| A \|_\infty, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

3) Sia F una matrice $n \times n$ tale che

$$F^H F = I \quad e \quad F^2 = Q \quad con \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dimostrare che

$$F^H = QF = FQ.$$

4) TROVARE la DECOMPOSIZ. LU di $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(1) i) Localizzare il meglio possibile gli autovalori di $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 11 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 9 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 15 \end{bmatrix}$.

ii) A è definita positiva?

iii) Trovare c_1, c_2 tali che $1 < c_1 < \mu_2(A) < c_2 < +\infty$.

(2) i) Calcolare la decomposizione LU di $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

ii) Calcolare la decomposizione QR di A.

iii) Dimostrare che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono quando applicati ad $A\underline{x} = \underline{b}$, con $\underline{b}$ generico.

iv) Porre $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed effettuare un passo di tali metodi osservando che $\underline{x}_1^{(G.S)}$ approssima la soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ meglio di $\underline{x}_1^{(J)}$.

(3) i) Dimostrare che $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix} = p(X)$, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, con p polinomio di secondo grado.

ii) Calcolare gli autovalori di A.

iii) Calcolare $\|A\|_2$ e confrontarla con $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.

ANALISI NUMERICA - STM 28/9/2018

31 Gennaio 2019 An Num - STM (ESAME SCRITTO)

1. Sia A la matrice $m \times m$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -3m & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & m & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & m \end{bmatrix}}_{m}$$

(i) Osservare che $\det(A) \neq 0$

(ii) Si può dire che un autovalore di A è uguale a $\rho(A)$?

(iii) Trovare limitazioni superiore e inferiori non banali di $\mu_2(A)$.

---

2. Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ -1 & 1 & -\gamma \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

(i) Si consideri il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$, nel caso in cui A è non singolare (ovvero per $\alpha+\beta+\gamma \neq 1$). Trovare tutti i valori di α, β, γ per cui tale metodo è convergente.

(ii) Dire quando esiste e calcolare la decomposizione LU di A.

(iii) Per quali α, β, γ esiste la decomposizione QR di A ?

---

3. Data $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ è noto che $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2} = tr(A^H A)$, dove la tr di una matrice è la somma dei suoi elementi diagonali (ovvero la somma dei suoi autovalori).

(i) Data U $n\times n$ unitaria dimostrare che $\|U^H M U\|_F = \|M\|_F$ per ogni matrice $n \times n$ M.

(ii) Data U $n\times n$ unitaria e A $n \times n$ generica dimostrare che la funzione

$$f(z_1 \cdots z_m) = \| A - U \,\mathrm{diag}(z_i, i=1\ldots m)\, U^H \|_F, \quad z_i \in \mathbb{C}$$

è minima per $z_i = \underline{e}_i^T U^H A U \underline{e}_i = (U\underline{e}_i)^H A (U\underline{e}_i)$.

(iii) Sia $\mathcal{U}_A = U \,\mathrm{diag}((U\underline{e}_i)^H A (U\underline{e}_i), i=1\ldots m)\, U^H$, dove U $n\times n$ è UNITARIA. Osservare che $\mathcal{U}_A$ è definita positiva ogni volta che lo è A.