LS in Matematica - Complementi di Analisi Numerica II, A.A. 2005/2006 II parte, Carmine Di Fiore

Problema al contorno in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, aperto limitato, per equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine in forma di divergenza uniformemente ellittiche. Derivata conormale, condizioni di Dirichlet e/o di Neuman su $\partial\Omega$. Operatore uniformemente ellittico se e solo se matrice della parte del secondo ordine uniformemente definita positiva. Esempi fisici: spostamento della membrana elastica, temperatura di un corpo ad un istante t_m, concentrazione di un inquinante in un fluido incomprimibile.

Definizione di derivata debole di $u \in L^2(\Omega)$ e dello spazio $H^1(\Omega)$ delle funzioni di $L^2(\Omega)$ con derivata debole in $L^2(\Omega)$. $C_1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Una funzione C^1 a tratti e continua in $\overline{\Omega}$ ammette derivata debole. Esercizio: $u(\mathbf{x}) = |\log|\mathbf{x}||^\alpha$, $u, D_i u \in L^2(|\mathbf{x}| \leq \mathbf{1})$ se $0 < \alpha < 1/2$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$). La funzione $u(x) = x$, $0 \leq x < 1$, $u(x) = 0$, $-1 < x < 0$, ammette come derivata debole in $L^2((-1,1))$ la funzione di Heaviside. La funzione di Heaviside non ammette derivata debole in $L^p((-1,1))$. Quindi, $u \in H^1((-1,1))$, ma $u \notin H^2((-1,1))$.

Formulazione variazionale del Problema al contorno e definizione di $H^1_{0,\Gamma_D}(\omega)$, Γ_D = bordo con dato di Dirichlet. Sotto opportune ipotesi sui dati del Problema al contorno ed identificando V con $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$, la Formulazione variazionale ottenuta è un caso particolare del problema più generale: $u \in V$, $a(u,v) = F(v)$ $\forall v \in V$, V di Hilbert con il prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_V$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare, continua, coercitiva, $F : V \to \mathbb{R}$ forma lineare, continua. Lemma di Lax-Milgram e ben posizione del problema generale.

Approssimazione interna u_h di u. Definizione di $u_h \in V_h$ tale che $a(u_h, v_h) = F(v_h)$ $\forall v_h \in V_h$, con V_h sottospazio di V di dimensione finita (e, quindi, chiuso). Introduzione di una base $\{\varphi_j\}$ per V_h: il calcolo di u_h è equivalente alla risoluzione di un sistema lineare $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}$ in cui la matrice dei coefficienti A ha parte simmetrica definita positiva. Quindi, gli autovalori di A hanno parte reale positiva. Risoluzione del sistema col metodo di Richardson (i metodi diretti non sono applicabili (eccetto PA=LU) e quelli iterativi classici possono non convergere).

$\to$ Il metodo iterativo di Richardson-Eulero $x_{k+1} = x_k + \omega(b - Ax_k)$ per risolvere sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (prototipo di GC, GMRES e, come per essi, complessità per passo=costo($A \cdot z$)). CNES per la convergenza di R.-E.: $Re(\lambda_i) > 0$, $\forall i$ iff $\exists \omega^*$ t.c. $\forall \omega \in (0, \omega^*)$ Rich converge. In due casi in cui si ha la convergenza di R.-E. la scelta ottimale del parametro di accelerazione ω produce una espressione del raggio spettrale della matrice di iterazione in termini del numero di condizionamento μ di A da cui si deduce che più μ è piccolo, maggiore è la rapidità di convergenza di R.-E. (A definita positiva: $\|\mathbf{e}_k\|_2 \leq (\frac{\mu-1}{\mu+1})^k \|\mathbf{e}_0\|_2$, $\omega_{ott} = 2/(\lambda_m + \lambda_M)$; A normale opportuna: $\|\mathbf{e}_k\|_2 \leq (1 - \frac{1}{\mu^2})^{k/2} \|\mathbf{e}_0\|_2$, $\omega_{ott} = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2_{max})$ ($e_k = x - x_k$)).

Il metodo di R.-E. con ω variabile. R.-E. a residuo minimo è convergente se A ha parte simmetrica definita positiva. $\to$

L'errore di u_h è proporzionale all'errore di migliore approssimazione in V_h. Ipotesi di consistenza su $\{V_h\}_h$. La consistenza implica la convergenza di u_h ad u. Un caso in cui l'ipotesi di consistenza è verificata: il metodo di Galerkin.

Scelta della base $\{\varphi_j\}$ di V_h tale Il problema $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}$ sia ben condizionato ed efficientemente risolubile (con metodi diretti o iterativi): $\{\varphi_j\}$ t.c. A sparsa (o strutturata), A ben condizionata,. . ..

$\to$ Da Richardson a GMRES. GMRES: dato x_0 e posto $r_0 = b - Ax_0$, per $k =$

$0, 1, \ldots$, si definisce $x_{k+1} = x_0 + \tilde{z}$ dove $\|b - A(x_0 + \tilde{z})\|_2 = \min \|b - A(x_0 + z)\|_2^2$, $z \in span\{r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0\}$ (minimizzazione del residuo sullo spazio di Krilov). L'algoritmo per il calcolo di $\tilde{z}$:

- $\|b - A(x_0 + \tilde{z})\|_2^2 = \min \|b - A(x_0 + V_{k+1}y)\|_2^2$, $y \in \mathbb{R}^{k+1}$, dove $V_{k+1} = [v_1\, v_2 \cdots v_{k+1}]$, $v_1 = r_0/\|r_0\|$, $v_2 = \hat{v}_2/h_{21}$, $\hat{v}_2 = Av_1 - h_{11}v_1$, $h_{11} = (Av_1, v_1)$, $h_{21} = \|\hat{v}_2\|$, ... (procedimento di Arnoldi per determinare una base ortonormale dello spazio di Krilov)
- $\|b - A(x_0 + \tilde{z})\|_2^2 = \|b - A(x_0 + V_{k+1}\tilde{y})\|_2^2$, dove

$$M_{k+1}\tilde{y} = I_{k+1}^1 Q_{k+2}^T \begin{bmatrix} \|r_0\| \\ 0 \end{bmatrix}, \; M_{k+1} = R_{k+1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{k+1} \end{bmatrix}$$

con R_1 =il fattore triangolare nella fattorizzazione QR di $H_1 = [h_{11}]$ ($R_1 = [h_{11}]$), $\gamma_1 = \sqrt{(R_1)_{11}^2 + h_{21}^2} - (R_1)_{11}$,

$$Q_2^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_1)_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(R_1)_{11}^2 + h_{21}^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Q_1 =il fattore ortonormale della fattorizzazione QR di $H_1 = [h_{11}]$ ($Q_1 = [1]$);

$$R_2 = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T[h_{12}] \\ h_{22} \end{bmatrix} \\ 0 & \end{array} \right]$$

...

$\to$

$H^1(\Omega)$ è di Hilbert con il prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$. Verifica delle ipotesi di Lax-Milgram per la Formulazione variazionale: $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert; la forma bilineare a è continua se i coefficienti dell'operatore sono in $L^\infty(\Omega)$; ulteriori condizioni su tali coefficienti e il carattere uniformemente ellittico dell'operatore differenziale, assicurano la coercitività di a; la forma lineare F è continua se i dati di Dirichlet e di Neuman sono, rispettivamente, in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.

Definizione dello spazio di Hilbert $H^m(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con relativo prodotto scalare e norma indotta. Il caso $m = 2$. Se $m > d/2$, vale l'inclusione continua $H^m(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$. $H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$\to$ Risolvere il sistema in $\tilde{y}$ e calcolare $V_{k+1}\tilde{y}$ solo quando $\|r_{k+1}\|^2/\|r_0\|^2 < \epsilon$, $r_{k+1} = b - Ax_{k+1}$. Per $k = 0$ GMRES e Richardson coincidono. $\|r_{k+1}\|^2 = \beta_{k+1}^2\|r_k\|^2$. Se A ha parte simmetrica A_S definita positiva, allora

$$\|r_k\| \leq \left(1 - \frac{\lambda_m(A_S)^2}{\lambda_M(A^TA)}\right)^{k/2} \|r_0\|$$

(λ autovalore di $A \Rightarrow \lambda_m(A_S) \leq Re(\lambda)) \Rightarrow \frac{\lambda_m(A_S)^2}{\lambda_M(A^TA)} < 1$). $\to$

Problema astratto: a simmetrica. a anche simmetrica $\Rightarrow V$ di Hilbert anche con $a(\cdot, \cdot)$. Il teorema della proiezione di Hilbert e una radice in più nella stima dell'errore di discretizzazione $\|u - u_h\|$ in termini dell'errore di interpolazione $\|u - \Pi_h u\|$: convergenza di u_h ad u più rapida. Inoltre, A è definita positiva $\Rightarrow$ diversi metodi per il calcolo di u_h e, per i metodi iterativi, informazioni su rapidità di convergenza. Richardson ω variabile: $\|r_k\|_2 \leq (\frac{\mu-1}{\mu+1})^k \|r_0\|_2$ (e risultati simili per altri metodi: G $\|e_k\|_A \leq (\frac{\mu-1}{\mu+1})^k \|e_0\|_A$; GC $\|e_k\|_A \leq 2(\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1})^k \|e_0\|_A$).

$\to$ Nell'unica ipotesi $\det(A) \neq 0$, per ogni k, l'algoritmo di GMRES è ben definito a meno che $x_{k+1} = A^{-1}b$; inoltre GMRES impiega al piu n passi per convergere. $\to$

Definire una successione $\{V_h\}_h$ di sottospazi di $H^1_{0,\Gamma_D}(\Omega)$ che verifica l'ipotesi di consistenza (finite element spaces). $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligono. Triangolazione τ_h di Ω. Lo spazio $\mathbb{P}_1(T)$, $T \in \tau_h$, dei polinomi di grado 1 in x_1, x_2 ristretti al triangolo T. L'elemento finito di Courant (Lagrange di ordine 1), l'elemento finito interpolatorio nei punti medi, un elemento finito non interpolatorio. Corrispondenti "operatori di interpolazione" continui e non continui. Il sottospazio

$$V_h^* = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \tau_h\}$$

di $H^1(\Omega)$. Base nodale di V_h^* ed operatore di interpolazione di Lagrange su V_h^*.

Successione regolare di triangolazioni. Seminorma di Sobolev $|\cdot|_{m,\Omega}$. Maggiorazione dell'errore di interpolazione in $\mathbb{P}_1$ per funzioni v di $H^2(\Omega)$. Consistenza di $\{V_h\}_h$, $V_h = V_h^* \cap H^1_{0,\Gamma_D}$, e, quindi, convergenza di u_h alla soluzione u del problema variazionale. Ordine di convergenza lineare se $u \in H^2(\Omega)$. Se la successione di triangolazioni è regolare allora A è sparsa. (Anche se A fosse definita positiva, non conviene utilizzare i metodi di Gauss o di Cholesky per risolvere il sistema $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}$ perché questi metodi generano fattori non sparsi anche se A lo è).

Disuguaglianza di Poincaré in $H^1_0(\Omega)$. Risoluzione col metodo degli elementi finiti dei problemi:

1) $-u'' = f$ in $\Omega = (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ (base di Lagrange in $\mathbb{R}$).

2) $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $u = 0$ su $\partial\Omega$ (base di Lagrange in $\mathbb{R}^2$).

Esercizio: ripetere 2) con l'equazione $-\Delta u + u_{x_1} = f$.

Esercizio: scrivere una approssimazione mediante elementi finiti del problema non omogeneo $-\Delta u = f$ in Ω, $u = \varphi$ su $\partial\Omega$ dove Ω è un generico poligono di $\mathbb{R}^2$.

$\to$ Una classe di metodi iterativi per risolvere $Ax = b$ dipendente da una matrice definita positiva H e da una successione di vettori "direzione" $\{u_k\}$. Definizione di una successione di errori non crescente nella norma $\|\cdot\|_H$

$$\begin{array}{l} e_{k+1} = e_k - \omega_k u_k, \\ \omega_k = (e_k, u_k)_H / \|u_k\|_H^2, \ (v_1, v_2)_H = v_1^T H v_2, \\ \|e_{k+1}\|_H = \min_\omega \|e_k - \omega u_k\|_H, \\ \text{iff, posto } e_k = x - x_k, \ x = A^{-1}b, \\ F(x_{k+1}) = \min_\omega F(x_k + \omega u_k), \\ F(y) = \frac{1}{2} y^T H y - y^T H A^{-1} b \end{array} \qquad (*)$$

e sue proprietà.

A definita positiva: $H = A$, $u_k = e_{s_k}$. $(r_{k+1})_{s_k} = 0$. Due scelte di s_k per cui lo schema (*) è convergente: i metodi di Rilassamento e Gauss-Seidel. $\to$

Elemento di riferimento $\hat{T}$. Trasformazione $\mathbf{x} = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$, da $\hat{T}$ a T. Le quantità $\|B\|$, $\|B^{-1}\|$ e $\det B$ in termini della geometria di T. La seminorma di sobolev su T in funzione di quella su $\hat{T}$ e viceversa (Lemma). Interpolare su T andando a interpolare su $\hat{T}$.

Esercizio: l'elemento finito bilineare continuo di Lagrange.

Successione di triangolazioni quasi uniformi. Come cresce la seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ di $v \in V_h^* = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_k \ \forall T \in \tau_h\}$ al crescere della norma in L^2 ($\|\cdot\|_{0,\Omega}$). Relazione tra la norma in L^2 di una combinazione lineare degli elementi della base nodale di V_h^* e la norma euclidea del vettore dei coefficienti della combinazione.

La matrice A del sistema lineare $A\mathbf{u}_h = \mathbf{f}$ ottenuto discretizzando in $V_h = V_h^* \cap H_0^1(\Omega)$ (con base nodale $\{\varphi_j\}$) il problema di convezione diffusione $-\nu\Delta u + \beta\cdot\nabla u = f$ in Ω, $u = 0$ su $\partial\Omega$. Identità coinvolgenti le parti simmetrica e antisimmetrica di A nel caso ν costante. Studio della distribuzione degli autovalori di A nel piano complesso: il numero di condizionamento di A è almeno dell'ordine di $\frac{1}{h^2}$, $\forall\beta$ (dimostrazione completa solo per $\beta = 0$, in cui A coincide con la matrice del problema 2).

$\to$ A generica: $H = A^TA$, $u_k = r_k$. Il metodo di Richardson.

A definita positiva: $H = A$, $u_k = r_k$. Il metodo del Gradiente (G) o steepest descent. $r_{k+1}^T r_k = 0$. Convergenza. Misura della rapidità di convergenza: $\|e_k\|_A \le \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^k \|e_0\|_A$.

Note in generale: A definita positiva $\Rightarrow$ 1) $A^{-1}b$ =minimo globale per $F(y) = \frac{1}{2}y^TAy - y^Tb$. 2) Gli insiemi di livello di F sono gli intorni di $A^{-1}b$ nella metrica $\|v_1 - v_2\|_A$, ovvero gli iperellissoidi con assi paralleli agli autovettori di A e rapporti tra semiassi proporzionali ai raporti tra gli autovalori di A. A malcondizionata $\Rightarrow$ almeno una sezione dell'iperellissoide è molto allungata. 3) $\nabla F(y) = Ay - b$. [4) $F(x_k + \frac{r_k^T u_k}{u_k^T A u_k} u_k) \le F(x_k + \omega u_k)$, $\forall\omega$.]

La direzione del metodo G è quella di discesa più ripida per F in un intorno di x_k ($u_k = r_k = b - Ax_k = -\nabla F(x_k)$). La posizione di x_{k+1}: spiegazione grafica di G [ma anche dei metodi con $H = A$, u_k generico (vedi 4)), ad es. il seguente GC].

A definita positiva: $H = A$, $u_k = r_k + \beta_{k-1}u_{k-1}$. Il metodo del gradiente coniugato (GC). $r_{k+1}^T u_k = 0$. GC per $n = 2$ converge in due passi. L'algoritmo GC per n generico. Espressioni alternative per $\tau_k = \frac{u_k^T r_k}{u_k^T A u_k}$ e β_k. Se i primi $p+1$ residui sono non nulli, allora sono anche ortogonali e le prime $p+1$ direzioni sono A-ortogonali ("coniugate"). GC converge in al più n passi. GC verifica la seguente proprietà di minimo: $\|r_k\|_{A^{-1}}^2 = \min \|p_k(A)\|_{A^{-1}}^2$, $\partial p_k \le k$, $p_k(0) = 1$ (Nota: per GMRES con A definita positiva stesso risultato, ma con $\|\cdot\|_2$), ovvero la proprietà:

$$\begin{aligned} \|x - x_k\|_A^2 &= \min \|p_k(A)(x - x_0)\|_A^2,\ p_k \in \Pi_k^1 \\ &\le \max_i |p_k(\lambda_i)|^2 \|x - x_0\|_A^2,\ \forall\, p_k \in \Pi_k^1 \end{aligned}$$

dove $\Pi_k^1 = \{$polinomi di grado esattamente k che in 0 valgono $1\}$. Ne segue il Lemma di base per i Teoremi sulla rapidità di convergenza di GC, applicabile se è noto un insieme $S \subset \mathbb{R}^+$ contenente gli autovalori di A ed un polinomio $p_k \in \Pi_k^1$ ed una costante M_k per cui $|p_k| \le M_k$ in S. Proprietà principali dei polinomi di Chebychev. La soluzione del problema $\min_{p_k\in\Pi_k^1} \max_{x\in[a,b]} |p_k(x)|$. $\to$

Base gerarchica o multi-livello di $V_{h_J} \subset H_0^1(\Omega)$, $h_J = h_0 2^{-J}$, Ω poligono di $\mathbb{R}^2$, come alternativa alla base nodale ($k = 1$). [$V_{h_{j+1}} = V_{h_j} \oplus W_{h_j}$, $i = J-1, \ldots, 0$]. Trasformazioni da una base all'altra. Matrice e complessità della trasformazione. Teorema di Yserentant: relazione tra la seminorma in H^1 di una combinazione lineare degli elementi della base gerarchica e la norma euclidea del vettore dei coefficienti della combinazione.

$\to$ I Teoremi sulla rapidità di convergenza di GC:

caso $S = [\lambda_m, \lambda_M]$: $\|e_k\|_A \le 2(\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1})^k \|e_0\|_A$.

caso $S = [\lambda_m, \overline{\lambda}] \cup \{\lambda_i : \lambda_i > \overline{\lambda}\}$: $\|e_k\|_A \le 2(\frac{\sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_m}}-1}{\sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_m}}+1})^{k-r_{\overline{\lambda}}} \|e_0\|_A$, dove $r_{\overline{\lambda}} = |\{\lambda_i : \lambda_i > \overline{\lambda}\}|$.

GC converge in un numero di passi al più uguale al numero degli autovalori distinti di A. $\rightarrow$

Applicazione del risultato di Yserentant. Nella discretizzazione su V_{h_J} del problema di Poisson, la rappresentazione di u_{h_J} in termini della base gerarchica conduce ad un sistema lineare $\tilde{A}\tilde{\mathbf{u}}_{h_J} = \tilde{\mathbf{f}}$, dove la matrice $\tilde{A}$ (anche se non è sparsa) ha numero di condizionamento dell'ordine di $(\log_2(1/h_J))^2$. Tale sistema è, quindi, meglio condizionato del sistema $A\mathbf{u}_{h_J} = \mathbf{f}$, ottenuto utilizzando la base nodale, dove $\mathrm{cond}_2(A) = O(1/h_J^2)$. Inoltre, R.-E. applicato a $\tilde{A}\tilde{\mathbf{u}}_{h_J} = \tilde{\mathbf{f}}$ è più rapido che applicato a $A\mathbf{u}_{h_J} = \mathbf{f}$ e può essere implementato ad un costo pressoché uguale.

$\rightarrow$ Per il sistema $Ax = b$, A definita positiva, definizioni di precondizionatore di A (E non singolare t.c $E^{-1}AE^{-T}$ ha uno spettro più ristretto di quello di A) e di sistema precondizionato $\tilde{A}y = \tilde{b}$, $\tilde{A} = E^{-1}AE^{-T}$, $\tilde{b} = E^{-1}b$. $\tilde{A}$ è simile a $P^{-1}A$ se $P = EE^T \Rightarrow$ anche P è detto precondizionatore. (Nota: utilizzando la base gerarchica si è precondizionato il sistema ottenuto con la base standard tramite $E = S^T$ con $S =$matrice del cambiamento di base.)

Definizione più completa di precondizionatore, che tiene conto dei risultati ottenuti sulla rapidità di convergenza di GC. Versioni trasformata e non trasformata del metodo del gradiente coniugato precondizionato. Nella seconda versione, ad ogni passo k, oltre che calcolare $A \cdot u_k$ occorre risolvere il sistema $Pz = r_{k+1}$.

Il metodo del Gradiente Coniugato per sistemi di Toeplitz $Ax = b$. Complessità per passo (matrici circolanti, matrice di Fourier, FFT).

Esempio 1: A ha, per ogni n, autovalori distribuiti uniformemente in (0,4) (formula esplicita degli autovalori e degli autovettori, trasformata seno) $\Rightarrow$ GC lento. Rimedio: usare Cholesky (ma Cholesky non è più un rimedio se A è la matrice del problema di Poisson, si perde la sparsità di A).

Esempio 2: A è definita positiva per $t^2 < 1$. Per un Teorema ($\sum |t_k| < \infty$, $t(\theta) = \sum t_k e^{\mathbf{i}k\theta} \Rightarrow eig(A) \in [\min t, \max t]$), gli autovalori di A sono, $\forall n$, in un intervallo di $\mathbb{R}^+$ fissato $\Rightarrow \mu$ limitato. Ma $t^2 \approx 1$ implica μ grande. ($n = 32$, $t = 1/2$: dopo 10 passi la riduzione dell'errore è solo 10^{-3} e tale stima è veritiera).

Precondizionatori P di A: $P \approx A$, $Pz = r_{k+1}$ basso costo. $P \in \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} = \{$circolanti $n \times n\}$ ($\Rightarrow$ costo($P^{-1}r_{k+1}$)= $O(n \log n)$). Il precondizionatore P_{GS} di Gilbert Strang: su Esempio 1 non ok (non è definito positivo), su Esempio 2 ok (gli autovalori di $P_{GS}^{-1}A$ sono, $\forall\, n$, solo 5 $\Rightarrow$ al più 5 passi di GC per convergere). Il precondizionatore $P_{TC} = \mathcal{L}_A$ di T. Chan:

$$\|P_{TC} - A\|_F = \min \|X - A\|_F, \quad X \in \mathcal{L} \;\; (P_{TC} = \mathcal{L}_A).$$

$P_{TC} = \mathcal{L}_A$ è sempre definito positivo; è definito anche per A non Toeplitz. Calcolo di $\mathcal{L}_A$ per $n = 4$ (Esercizio: n generico). Sull'Esempio 2, in cui $t(\theta)$ è positivo, per un Teorema, gli autovalori di $P_{TC}^{-1}A$ si raggruppano su 1. ($n = 32$, $t = 1/2$: si possono ottenere stime migliori della standard (che non è veritiera) sulla velocità di convergenza; se n'è ottenuta una). Sull'Esempio 2 non è detto, essendo $t(\theta) \geq 0$.

L'algebra $\mathcal{L}$ associata alla trasformata seno come alternativa delle circolanti. Esercizio: scrivere $\mathcal{L}_A$ per $A =$Toeplitz. Definito $\mathcal{L}$ per n generico, si dimostra che (nelle stesse ipotesi del caso circolante) gli autovalori di $\mathcal{L}_A^{-1}A$ si raggruppano su 1.

Teorema di Perron per $dx(t)/dt = h(x(t))$, $x(0) = x_0$, Re(eig(Jac h)) < 0. Minimizzare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con metodi per l'integrazione numerica di ODE ($h = -\nabla f$). Il metodo di Richardson per $Ax = b$ come metodo di Eulero applicato al problema $dx(t)/dt = b - Ax(t)$, $x(0) = x_0$.

Per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normale con autovalori $\alpha > 0$ e $\alpha + \mathbf{i}\beta_j$, l'errore $e_k = x - x_k$ del metodo di Richardson soddisfa la disuguaglianza: $\|e_{k+1}\|_2 \leq \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)^{1/2} \|e_k\|_2$. $\rightarrow$