ANALISI NUMERICA 3 (Matematica)
ANALISI NUMERICA (Informatica)
A.A. 2005/2006

CORSO TENUTO DA C. DI FIORE (difiore@mat.uniroma2.it)

La formula di quadratura dei trapezi e il metodo di estrapolazione di Romberg. Polinomi e numeri di Bernoulli: proprieta' e applicazioni (p.e. somme delle potenze dei primi numeri naturali). La formula di Eulero-McLaurin. Calcolo di somme di serie, della costante di Eulero-Mascaroni e dell'errore della formula dei trapezi (i.e. giustificazione dell'efficienza del metodo di Romberg). Stima dell'errore di una formula di quadratura. Formule di quadratura adattive.

Autovalori, principali definizioni e proprieta'. Diagonalizzazione di una matrice A simmetrica 3x3. Generalizzazione: matrici di Givens e il metodo di Jacobi per il calcolo degli autovalori e degli autovettori di A simmetrica nxn (costo per passo, convergenza, variante ciclica).
Il condizionamento del problema degli autovalori di A nxn generica; Teorema di Bauer-Fike per matrici A diagonalizzabili; il caso di matrici A normali (ovvero diagonalizzabili da unitarie). Un teorema di localizzazione tipo Gershgorin per A normali: applicazioni.
Calcolare gli autovalori di A nxn tridiagonale o di Hessenberg con il metodo di Newton. Il caso A tridiagonale con A_{i,i+1}A_{i+1,i}>0: localizzazione degli autovalori (che sono, in questo caso, reali e distinti) con il teorema di Sturm.
Trasformare una matrice A in una matrice di Hessenberg B mediante trasformazioni per similitudine di Givens; complessita'; il caso A simmetrica.
Ottimalita' delle trasformazioni di Givens: il condizionamento di B non e' piu' grande di quello di A.
Il metodo delle potenze inverse per il calcolo dell'autovettore corrispondente ad un autovalore di cui si conosce una approssimazione.

Teoria di Perron-Frobenius per matrici A nxn non negative irriducibili.
Il raggio spettrale di A, rho(A), e' un autovalore semplice di A ed esiste ed e' unico un vettore z>0 tale che Az=rho(A)z, |z|_1=1.
Se A>0 allora gli altri autovalori hanno modulo piu' piccolo di rho(A) (Teorema di Perron) e il metodo delle potenze per approssimare rho(A) e z e' convergente.
Se A e' anche stocastica per colonne allora rho(A)=1 e la successione di vettori generata dal metodo delle potenze z_{k+1}=Az_k, z_0>0 |z_0|=1, converge a z.
(Se A e' non negativa, irriducibile e stocastica per colonne, e' ancora vero che rho(A)=1 e esiste ed e' unico z>0 |z|_1=1 tale che z=Az, ma il metodo delle potenze puo' non convergere a z).

La matrice di transizione di Google P^T del grafo
associato al web. Il problema del calcolo
del vettore "page rank" p tale che p=P^Tp.
Modifica di P per poter applicare la teoria di Perron-Frobenius (ovvero
rendere il vettore p ben definito) e per rendere
convergente il metodo delle potenze per il calcolo di p.
Complessita' per passo del metodo delle potenze.

Rapporto incrementale esatto e approssimato: metodi coerenti Phi per
l'integrazione numerica di problemi differenziali di Cauchy (ODE).
Il metodo di Eulero; metodi di Taylor di ordine maggiore di 1.
Definizione di convergenza dei metodi
Phi; un teorema di convergenza. Apparente non convergenza per errori di
arrotondamento: scelta ottimale di h.
Ulteriori importanti proprieta' su
Phi: 1) per h fissato >0 la soluzione discreta deve avere lo stesso
andamento della soluzione esatta;
2) tale passo h deve essere adeguato all'andamento (piccolo solo in
presenza di picchi).
Inefficienza, da questo punto di vista, di Eulero su certi
problemi. Rimedio: il metodo di Eulero implicito.
Eulero ed Eulero implicito per problemi di Cauchy con due equazioni;
applicazione al problema di van der Pol.
Implementazione e vantaggi dei metodi impliciti.
I metodi Runge Kutta come alternativa efficiente dei metodi di Taylor.

Il metodo delle differenze finite per problemi differenziali al contorno
lineari del secondo ordine. Esistenza, unicita', convergenza quadratica e
calcolo (con LL^T) della soluzione discreta.

Il metodo delle differenze finite per PDE. Equazione del calore
(problema parabolico in dim 1).
Schema esplicito, esistenza e unicita', calcolo (calcolare per ogni
istante t_j un prodotto matrice-vettore A.z), svantaggi (per non far
propagare eventuali errori, passo temporale molto piu' piccolo di quello
spaziale).
Schema implicito, esistenza e unicita', calcolo (risolvere per ogni
istante t_j un sistema Ax=z (LL^T una sola volta)),
vantaggi (passo temporale indipendente da quello spaziale).

La mezza luna metallica. Un esempio di problema parabolico (in dim 2) che
diventa un problema ellittico di cui, pur essendo nota la soluzione analitica,
e' conveniente usare la soluzione discreta proposta dal metodo delle
differenze finite.

Il problema ellittico di Poisson: ben definizione della soluzione discreta
alle differenze finite. Calcolo di essa con metodi diretti e,
piu' convenientemente, iterativi.

Un problema iperbolico: l'equazione della corda in R.