A $m \times m$ in $\mathbb{C}$

1) $\left[\begin{array}{c} \underline{z}^H A \underline{z} \in \mathbb{R} \\ \forall \underline{z} \in \mathbb{C}^m \end{array} \right] \Leftrightarrow A = A^H$

2) $A = A^H \Rightarrow \lambda_i(A) \in \mathbb{R}$

Teor. di SCHUR $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $\exists Q$ UNITARIA t.c. $Q^H A Q = T$ TRIANGOLARE SUPERIORE
e T è DIAGON. se e solo se $A A^H = A^H A$

3) A D.P. (SEMI D.P.) $\Leftrightarrow$ $A = A^H$ e $\lambda_i(A) > 0$ $(\lambda_i(A) \geq 0)$

4)
$$A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+\varepsilon_2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+\varepsilon_{m-1} & -1 \\ 0 & & & -1 & 1+\varepsilon_m \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_i \geq 0$$

a) A è SEMI D.P.

b) A è D.P. se e solo se almeno uno degli ε_i è positivo.

5) Dato $\underline{u} \in \mathbb{C}^m$ Disegnare in $\mathbb{C}$ l'insieme
$$\{\alpha \in \mathbb{C} : 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = |\alpha|^2 \|\underline{u}\|_2^2\}$$
(SUGGERIMENTO: $\alpha = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ ..)

6) Dimostrare che, data $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$,
$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right)$$

7) $\rho(A) \leq \|A\|$ per ogni norma matriciale $\|\cdot\|$.

8) a) Osservare che $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è indefinita, cioè
$$[\bar{x} \; \bar{y}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$
può essere sia positivo che negativo che zero.

b) Dimostrare che ogni matrice di permutazione diversa dall'identica è INDEFINITA.

9) Dimostrare che $\{\text{UNITARIE}\} \cap \{\text{D.P.}\} = I$,
$\{\text{HERMITIANE}\} \cap \{\text{D.P.}\} = \{\text{D.P.}\}$,
$\{\text{ANTI HERMITIANE}\} \cap \{\text{D.P.}\} = \emptyset$

10) OSSERVARE CHE LE COLONNE E LE RIGHE DI U UNITARIA SONO ORTONORMALI