TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

MACROAREA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

"Studio della convergenza del metodo delle potenze"

Relatore: Carmine di Fiore

Canditato: Sara Loss
Matricola: 0245827

Anno accademico: 2017/2018

Metodo delle Potenze (MP)

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v},\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v},\ \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{||\mathbf{a}_1||},\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{||\mathbf{a}_2||},\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \ldots$$

$$\varphi_1 = \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{a}_1}{\mathbf{u}^H\mathbf{v}_0}, \qquad \varphi_2 = \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{a}_2}{\mathbf{u}^H\mathbf{v}_1}, \qquad \varphi_3 = \frac{\mathbf{u}^H\mathbf{a}_3}{\mathbf{u}^H\mathbf{v}_2}, \ldots$$

convergono all'autovalore dominante ed al corrispondente autovettore?

Vedremo i casi:

- **A** definita positiva
- **A** generica
- **A** non negativa ed irriducibile.

MP: Caso A definita positiva ($\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

Teorema: Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definita positiva, siano $0 < \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_{t+1} < \lambda_t = \cdots = \lambda_1$ i suoi autovalori e $\mathbf{x}_i$ autovettori corrispondenti ai λ_i per $i = 1, 2, \ldots, n$ (nota:

$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = diag(\lambda_j),\ j = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{A}^k\mathbf{x}_j = \lambda_j^k\mathbf{x}_j,\ j = 1, \ldots, n$).

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $||\mathbf{v}||_2 = 1$, tale che nella sua rappresentazione: $\mathbf{v} = \sum_{i\leq t} \alpha_i\mathbf{x}_i + \sum_{i>t} \alpha_i\mathbf{x}_i$, il vettore $\mathbf{x} = \sum_{i\leq t} \alpha_i\mathbf{x}_i$ sia non nullo (nota: ciò implica che $\mathbf{v}^H\mathbf{x} = (||\mathbf{x}||_2)^2 \neq 0$, $\mathbf{A}^k\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$,
$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{v} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{x}$ e $0 < \frac{1}{\lambda_1^k}(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^k\mathbf{v}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{v}^H\mathbf{x}$).
Allora:

$$\frac{\mathbf{A}^k\mathbf{v}}{||\mathbf{A}^k\mathbf{v}||_2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} \tag{1}$$

Metodo delle Potenze: Caso A definita positiva

$$\frac{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda_1. \tag{2}$$

Le successioni in (1) e (2) sono ben definite $\forall k \in \mathbb{N}$ e possono calcolate tramite il seguente algoritmo:

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}. \text{ Per k} = 1,\ 2,\ \ldots$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_{k-1} \\ \varphi_k := \dfrac{\mathbf{v}^H \mathbf{a}_k}{\mathbf{v}^H \mathbf{v}_{k-1}}, \quad \mathbf{v}^H \mathbf{v}_{k-1} \neq 0 \ \forall k \\ \mathbf{v}_k := \dfrac{\mathbf{a}_k}{||\mathbf{a}_k||_2} \end{cases} \tag{3}$$

Metodo delle Potenze: Caso A definita positiva

Infatti, $\varphi_k = \dfrac{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{v}}$ (e quindi $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$) e $\mathbf{v}_k = \dfrac{\mathbf{A}^k \mathbf{v}}{||\mathbf{A}^k \mathbf{v}||_2}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ (e quindi $\mathbf{v}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}$). Inoltre:

$$\varphi_k \leq \varphi_{k+1} \leq \lambda_1 = \rho(\mathbf{A}),\ \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la successione φ_k ottenuta in (3) è crescente.

$\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ se e solo se:

$$\frac{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{v}} \leq \frac{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}}$$

Metodo delle Potenze: Caso A definita positiva

cioè se e solo se, moltiplicando entrambi i membri per $(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^k\mathbf{v})(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v})$:

$$(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^k\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{v}^H\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v})(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{v}). \tag{4}$$

Ma la (4) risulta verificata perché equivale alla seguente disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\left(\mathbf{v}^H\mathbf{A}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{A}^{\frac{k+1}{2}}\mathbf{v}\right)^2 \leq \left(||\mathbf{A}^{\frac{k-1}{2}}\mathbf{v}||_2\right)^2\left(||\mathbf{A}^{\frac{k+1}{2}}\mathbf{v}||_2\right)^2.$$

$\square$

Ma se la matrice **A** non è definita positiva?

Metodo delle potenze: Caso A generica

Utilizzando la forma canonica di Jordan, $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, di $\mathbf{A}$ e la seguente espressione che esprime l'azione di $\mathbf{A}^k$ sulle colonne $i+1, \ldots, i+s$ della matrice $\mathbf{X}$ corrispondenti al generico blocco di Jordan di ordine s con λ come autovalore:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x}_{i+j} =$$

$$\begin{cases} \binom{k}{k}\lambda^0 \mathbf{x}_{i+j-k} + \binom{k}{k-1}\lambda \mathbf{x}_{i+j-k+1} + \cdots + \binom{k}{0}\lambda^k \mathbf{x}_{i+j} & k < i+j-1 \\ \binom{k}{i+j-1}\lambda^{k-(i+j)+1}\mathbf{x}_1 + \binom{k}{(i+j)-2}\lambda^{k-(i+j)+2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \binom{k}{0}\lambda^k \mathbf{x}_{i+j} & k \geq i+j-1 \end{cases} \tag{5}$$

$(j = 1, \ldots, s)$
si ottiene il seguente Teorema:

Teorema: Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ generica e supponiamo che uno degli autovalori di $\mathbf{A}$, λ_1, domini sugli altri, cioè $|\lambda_1| > |\lambda_j|$, $\forall \lambda_j \neq \lambda_1$ e che $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) =: t$. Allora, ne segue che esiste $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ non singolare (cioè $det\mathbf{X} \neq 0$) tale che:

Metodo delle potenze: Caso A generica

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & & & \lambda & \\ & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} =: \mathbf{J}$$

dove $\mathbf{J}$ è una matrice diagonale a blocchi (nota: ci possono essere più blocchi diagonali con lo stesso λ), in particolare si ha che: $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_1 \mathbf{x}_j,\ \mathbf{A}^k\mathbf{x}_j = \lambda_1^k \mathbf{x}_j,\ j = 1, \dots, m_{a,g}(\lambda_1)$ e, fissato $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}),\ \lambda \neq \lambda_1$, per $l = 1, \dots, m_g(\lambda)$ si ha:

Metodo delle potenze: Caso A generica

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} & & & \\ \mathbf{x}_{i_l+1} & \dots & \dots & \mathbf{x}_{i_l+s_l} \\ & & & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} & & & \\ \mathbf{x}_{i_l+1} & \dots & \dots & \mathbf{x}_{i_l+s_l} \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times s_l}$$

con s_l: $1 \leq s_l < n$.
Ne segue che $\mathbf{A}\mathbf{x}_{i_l+1} = \lambda \mathbf{x}_{i_l+1}$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_{i_l+j} = \lambda \mathbf{x}_{i_l+j} + \mathbf{x}_{i_l+j-1}$, $j = 2, \dots, s_l$. Quindi vale (5) con $i \leftrightarrow i_l$ e $s \leftrightarrow s_l$.

Metodo delle potenze: Caso A generica

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $||\mathbf{v}|| = 1$, tale che nella rappresentazione di $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i$, il vettore $\mathbf{x} = \sum_{m=1}^{t} \alpha_m \mathbf{x}_m$ sia non nullo (nota: ciò implica $\mathbf{A}^k \mathbf{v}$ non nullo, $\forall k = 1, 2, 3, \ldots$).

Sia anche $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, tale che $\mathbf{u}^H \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (nota: $\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{A}^k \mathbf{v} \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathbf{x}$, $\frac{1}{\lambda_1^k} (\mathbf{u}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}) \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathbf{u}^H \mathbf{x}$ e quindi $\exists k^* \in \mathbb{N}$ per cui sono non nulli $\forall k > k^*$). Allora:

$$\frac{|\lambda_1|^k}{\lambda_1^k} \frac{\mathbf{A}^k \mathbf{v}}{||\mathbf{A}^k \mathbf{v}||} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} \tag{6}$$

$$\frac{\mathbf{u}^H \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{v}}{\mathbf{u}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda_1 \tag{7}$$

dove la successione in (6) è ben definita ed $\exists k^* \in \mathbb{N}$ tale che la successione (7) è ben definita $\forall k > k^*$, ed entrambe le successioni

Metodo delle potenze: Caso A generica

in (6) e (7) si possono calcolare tramite il seguente algoritmo:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}, \quad \begin{cases} \mathbf{a}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_{k-1} \\ \varphi_k := \dfrac{\mathbf{u}^H \mathbf{a}_k}{\mathbf{u}^H \mathbf{v}_{k-1}}, & \text{se } \mathbf{u}^H \mathbf{v}_{k-1} \neq 0 \\ \mathbf{v}_k := \dfrac{\mathbf{a}_k}{||\mathbf{a}_k||} & \text{k=1, 2, } \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Infatti, $\varphi_k = \dfrac{\mathbf{u}^H \mathbf{A}^k \mathbf{v}}{\mathbf{u}^H \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{v}}$ (e quindi $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$) e $\mathbf{v}_k = \dfrac{\mathbf{A}^k \mathbf{v}}{||\mathbf{A}^k \mathbf{v}||}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ (e quindi $\dfrac{|\lambda_1|^k}{\lambda_1^k} \mathbf{v}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$).

Costo: prodotto $\mathbf{A} \cdot$ *vettore*.

Velocità di convergenza: $\left(\max_{j:\lambda_j \neq \lambda_1} \left(\dfrac{|\lambda_j|}{|\lambda_1|} \right) \right)^k p(k)$

Corollari: Il Teorema precedente, per **A** definita positiva, ed il Teorema per **A** diagonalizzabile già presente in letteratura.

Metodo delle potenze: Caso A non negativa ed irriducibile

$\mathbf{A} \geq 0$ ($a_{i,j} \geq 0, \ \forall i, j$), irriducibile $\Bigg(\nexists$ **P** di permutazione:

$\mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R} \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix}$, **M** ed **N** matrici quadrate $\Bigg)$;

$\rho(\mathbf{A}) = \max_j |\lambda_j(\mathbf{A})|$.

Teorema di Perron-Frobenius:

$\exists! \mathbf{z} > \mathbf{0} : \ ||\mathbf{z}||_1 = 1, \ \mathbf{Az} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{z}$, $\rho(\mathbf{A}) > 0$ e $\rho(\mathbf{A})$ è semplice come autovalore di **A**

(cioè $m_g(\rho(\mathbf{A})) = m_a(\rho(\mathbf{A})) = 1$) .

Se $\rho(\mathbf{A})$ è dominante, $\rho(\mathbf{A}) = \lambda_1 = |\lambda_1| > |\lambda_j|, \ j = 2, \ldots, n$, allora $\rho(\mathbf{A})$ e $\mathbf{z}$ si possono calcolare col metodo delle potenze:

Metodo delle potenze: Caso A non negativa ed irriducibile

Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non negativa ed irriducibile. Partendo da $\mathbf{v}$, $||v||_1 = 1$, positivo, ed applicando il Teorema con $||.|| = ||.||_1$ ed $\mathbf{u} = \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$, nella sola ipotesi che $\lambda_1 = \rho(\mathbf{A})$ sia dominante, si ha che l'algoritmo:

$$\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}, \quad \begin{cases} \mathbf{a}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_{k-1}, & \text{nota: } \mathbf{a_k} > 0 \\ \varphi_k := \dfrac{\mathbf{e}^T\mathbf{a}_k}{\mathbf{e}^T\mathbf{v}_{k-1}}, & \text{nota: } \mathbf{e}^T\mathbf{v}_{k-1} > 0 \ \forall k \\ \mathbf{v}_k := \dfrac{\mathbf{a}_k}{||\mathbf{a}_k||_1} & \qquad \text{k=1,2,...} \end{cases} \tag{9}$$

genera $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1 = \rho(\mathbf{A})$ e $\mathbf{v}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_1} = \dfrac{\alpha\mathbf{z}}{||\alpha\mathbf{z}||_1} = \mathbf{z}$.

$(\rho(\mathbf{A}), \mathbf{z})$ coppia di Perron.

Costo: prodotto $\mathbf{A} \cdot$ *vettore*.

Velocità di convergenza: $\left(\max\limits_{j\geq 2}\left(\dfrac{|\lambda_j|}{\rho(\mathbf{A})}\right)\right)^k p(k)$

Metodo delle potenze: Caso A non negativa ed irriducibile

Nota: Se $\rho(\mathbf{A})$ non è dominante il metodo delle potenze applicato alla matrice $\mathbf{A}$ non è convergente.

Applicandolo però ad $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$, $\alpha > 0$, è sempre convergente e produce: $\rho(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})$ e $\mathbf{z} > \mathbf{0}$, $||\mathbf{z}||_1 = 1$, tali che:

$$(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{z} = \rho(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{z}$$

(perché $\rho(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}),\ \alpha > 0$, è sempre autovalore dominante di $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ se $\mathbf{A} \geq 0$ ed irriducibile).
Da cui segue:

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}) - \alpha,\ \mathbf{A}\mathbf{z} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{z}.$$

$\Longrightarrow$ che la coppia di Perron di $\mathbf{A}$ non negativa ed irriducibile è sempre calcolabile con il metodo delle potenze.

Problema

Nel caso $\mathbf{A}$ non negativa ed irriducibile, ci si può chiedere se la successione di numeri reali φ_k, generata dal metodo delle potenze, converge a $\rho(\mathbf{A})$, autovalore dominante di $\mathbf{A}$, in modo monotono (come accadeva nel caso $\mathbf{A}$ definita positiva), cioè:

$$\varphi_k = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{a}_k}{\mathbf{e}^T \mathbf{v}_{k-1}} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_{k-1}}{\mathbf{e}^T \mathbf{v}_{k-1}} \lesseqgtr \varphi_{k+1} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{e}^T \mathbf{v}_k} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{e}^T \mathbf{v}_k} \qquad ?$$

$$(\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_{k-1})(\mathbf{e}^T \mathbf{v}_k) \lesseqgtr (\mathbf{e}^T \mathbf{v}_{k-1})(\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k) \qquad ?$$

(nota: $\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$).

Problema (caso n=2)

Su diverse matrici 2×2 si è verificata la seguente:

Proposizione (Congettura): Se nel MP si sceglie $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{e}$, allora $\forall k \geq 1$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} det(\mathbf{A})^k det(\mathbf{A} - \mathbf{QAQ}) &= \frac{1}{4}(ad - bc)^{k-1}[(b-c)^2 - (a-d)^2] \\
&= (\varphi_k - \varphi_{k+1})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v}) \\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v}}{\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{v}}{\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v}}\right)(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v}) \\
&= (\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v})^2 - (\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{v})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

$$\left(\text{nota: } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Quindi essendo $(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{v}) > 0$, si ha che $\varphi_k - \varphi_{k+1} \lesseqgtr 0$ se e solo se:

$$\frac{1}{4} det(\mathbf{A})^k det(\mathbf{A} - \mathbf{QAQ}) = \frac{1}{4}(ad - bc)^{k-1}[(b-c)^2 - (a-d)^2] \lesseqgtr 0.$$

Problema (caso n=2)

Segue che:

- Se $(ad-bc)[(b-c)^2-(a-d)^2]=0 \Rightarrow$ $\varphi_k=\varphi_{k+1}=\rho(\mathbf{A}),\ \forall k.$
- Se $(ad-bc)>0$ e $[(b-c)^2-(a-d)^2]\neq 0 \Rightarrow \varphi_k$ monotona. In particolare:
  - se $[(b-c)^2-(a-d)^2]>0 \Rightarrow \varphi_k$ decrescente
  - se $[(b-c)^2-(a-d)^2]<0 \Rightarrow \varphi_k$ crescente.
- Se $(ad-bc)<0$ e $[(b-c)^2-(a-d)^2]\neq 0 \Rightarrow \varphi_k$ alternata.

Problema (caso n=2)

Si è anche osservato (su diverse matrici 2×2) che potrebbe valere il seguente Lemma, che lega tra loro determinanti di particolari matrici 2×2 associate ad $\mathbf{A}^k$ e ad $\mathbf{A}^{k-1}$.

Lemma (Congettura): Si ha che:

$$\begin{aligned}
det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{e} & \mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e} & \mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{e} \end{bmatrix}\right) &= (\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{e})^2 - (\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{e})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e}) \\
&= (ad - bc)[(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e})^2 - (\mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{e})(\mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{e})] \\
&= det(\mathbf{A})det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e} & \mathbf{e}^T\mathbf{A}^k\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{e} & \mathbf{e}^T\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{e} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Se tale risultato fosse vero, la Proposizione precedente risulterebbe dimostrata facilmente per induzione.

Bibliografia

[1] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, (1998).

[2] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, (2013).

[3] Richard S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer, (1999).