1) Sia $f(x) = 1 - x^3$. Scrivere la parabola che meglio approssima f in $[0,1]$ nel senso dei minimi quadrati in termini della base dei polinomi ortonormale (calcolare i coefficienti della parabola rispetto a tale base).
Scrivere la parabola che interpola f in $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.
Valutare le due parabole in 0 e 1.

2) Sia
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & a & b & c \\ \frac{1}{a}x^2 & x & a & b \\ \frac{1}{a^2}x^3 & \frac{1}{a}x^2 & x & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \; x, b, c, d \in \mathbb{C}$$
invertibile.

Trovare tutti i valori di a, b, c, d, x per cui il metodo di Gauss-Seidel, applicato ad $A\underline{x} = \underline{f}$, $\underline{f} \in \mathbb{C}^4$, converge ad $A^{-1}\underline{f}$ indipendentemente dall'errore iniziale $\underline{\varepsilon}_0 = A^{-1}\underline{f} - \underline{x}_0$.
(Sugg.: prima di invertire M, mettere in evidenza a.)

3) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. Sia $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ la successione di vettori $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \omega(\underline{b} - A\underline{x}_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$, e $\underline{\varepsilon}_k = A^{-1}\underline{b} - \underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ la corrispondente successione di errori.
(i) Osservare che $\underline{\varepsilon}_{k+1} = (I - \omega A)\underline{\varepsilon}_k$.
(ii) Trovare il valore di $\omega \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(\omega) = \|\underline{\varepsilon}_{k+1}\|_2^2$ è minima, chiamarlo ω_k e calcolare $f(\omega_k)$.

<u>Nota</u>: si dimostra che il metodo $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \omega_k(\underline{b} - A\underline{x}_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$ converge a $A^{-1}\underline{b}$ se la matrice $\frac{1}{2}(A + A^T)$ è definita positiva.

4) Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$. Dimostrare che $\mu(A) \geq \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$.
Per quale classe di matrici A può valere l'uguale?
Localizzare il meglio possibile $\sigma(A)$, $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 11 \end{bmatrix}$, e trovare $m > 1$ per cui $\mu(A) > m$.

5) Sia A la matrice dell'esercizio precedente.
(i) Studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel nella risoluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.
(ii) Iniziare a triangolarizzare A con il metodo di Householder.

6) Dimostrare che la fattorizzazione QR di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non è mai unica.