

Sia $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ una base per l'insieme dei polinomi di grado $\leq m-1$. Supponiamo che una funzione f è nota nei punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$, $m \geq 2$ (si suppone che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia definita in un intervallo contenente gli x_i).

Si vuole risolvere il problema:

$$\min_{a_i \in \mathbb{R} \atop i=0, \dots, m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi_i(x_k) \right)^2$$

cioè si vuole costruire il polinomio (di grado $\leq m-1$) che meglio approssima la tabella $(x_k, f(x_k))$, $k=0, \dots, m-1$, nel senso dei minimi quadrati.

Si può procedere come nel caso continuo. Ma qui seguiamo un'altra strada. La funzione da minimizzare si può scrivere nella forma

$$\left\| \begin{pmatrix} f(x_0) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi_i(x_0) \\ f(x_1) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi_i(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi_i(x_{m-1}) \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| f(\underline{x}) - A \underline{a} \right\|_2^2 =$$

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_{m-1}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_{m-1}(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_{m-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_{m-1}) & \varphi_1(x_{m-1}) & \dots & \varphi_{m-1}(x_{m-1}) \end{bmatrix}$$

$$= \left\| \overbrace{U_m \dots U_2 U_1}^{Q^\#} f(\underline{x}) - \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \underline{a} \right\|_2^2 =$$

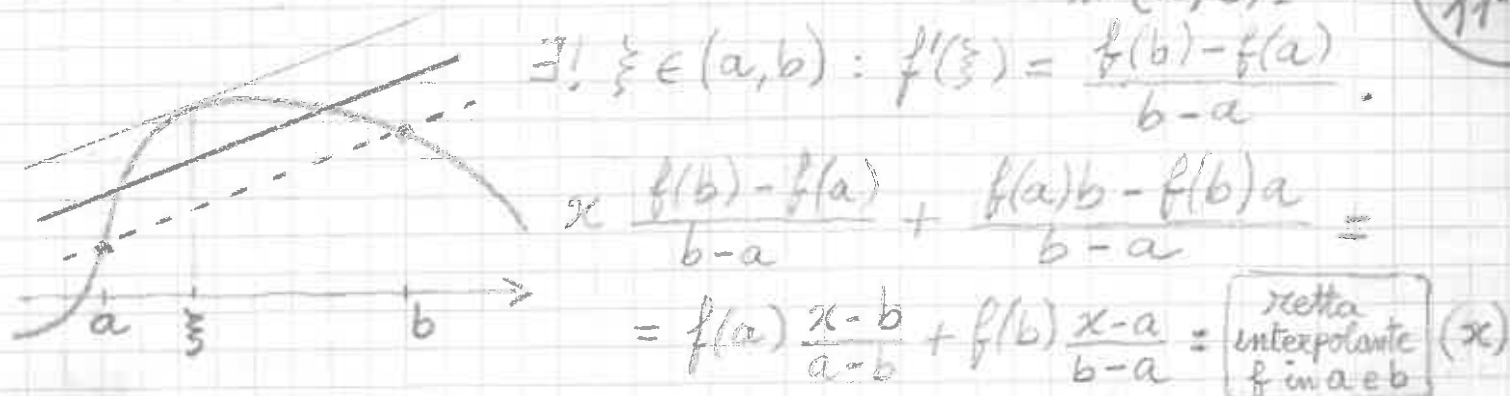
$$\left(\begin{matrix} U_m \dots U_2 U_1 A = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} \text{ } m \times m \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{matrici unitarie} \\ \text{hermitiane } m \times m \end{matrix} \quad \begin{matrix} \tilde{R} \\ 0 \end{matrix} \text{ triangolare superiore} \right)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} I_m^T \\ 0 \end{bmatrix} Q^\# f(\underline{x}) - \tilde{R} \underline{a} \right\|_2^2 + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m+1} \end{bmatrix} Q^\# f(\underline{x}) \right\|_2^2, \text{ quindi } \underline{a} \text{ è minima se } \tilde{R} \underline{a} = \underline{c}.$$

NOTA $A = Q \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\# A = \tilde{R}^\# \tilde{R} \Rightarrow$

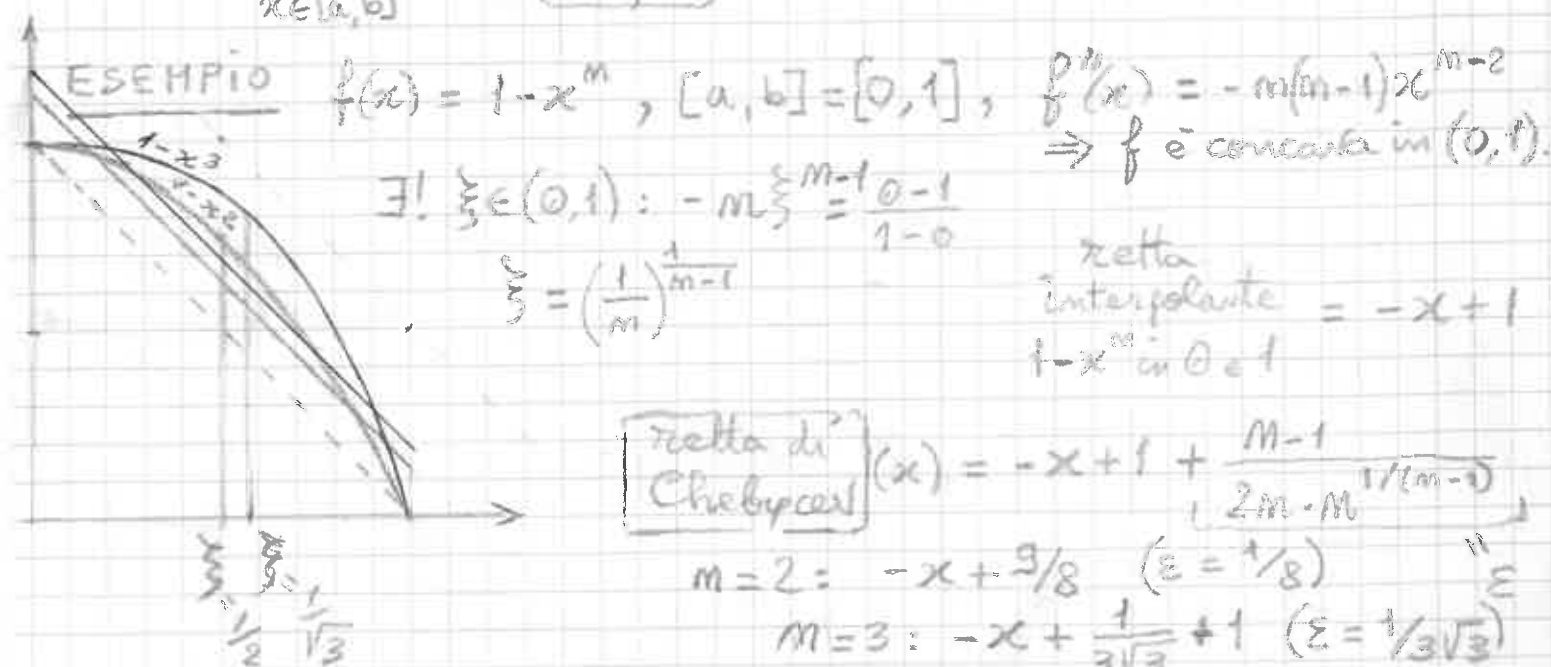
$\Rightarrow \det(\tilde{R}) \neq 0$ se le colonne di A sono lin. indep. ma queste lo sono perché i polinomi φ_i sono indep.

RETTE di CHEBYCEV in $[a,b]$ $f \in C^1([a,b])$, f convessa o concava in (a,b) .
 $\exists! \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\boxed{\text{Retta di Chebycev}}(x) = \boxed{\text{Retta interpolante } f \text{ in } a \text{ e } b}(x) + \frac{1}{2} \left(f(\xi) - \boxed{\text{Retta interpolante } f \text{ in } a \text{ e } b}(\xi) \right)$$

NOTA $\exists x_0 < x_1 < x_2 : f(x_i) - \boxed{\text{retta di Chebycev}}(x_i) = (-1)^{i+1} \varepsilon$ dove
 $\varepsilon = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \boxed{\text{retta di Chebycev}}(x)|$ (tali punti sono a, ξ, b).



Chebycev di x^m in $[-1,1]$

$$\min \left\{ \max_{x \in [-1,1]} |x^m - p(x)| : p \text{ polinomi di grado } \leq m-1 \right\} = \max_{x \in [-1,1]} \left| x^m - \left(x^m - \frac{1}{2^{m-1}} T_m(x) \right) \right|$$

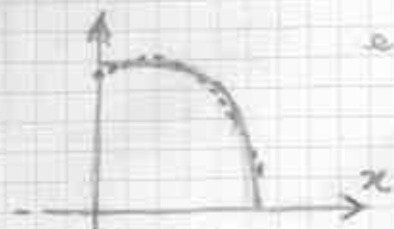
dove $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \dots = 1/2^{m-1}$

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k=1, 2, \dots, m-1.$$

TEOREMA (CHEBYCEV) Il problema $\min \left\{ \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| : \partial p \leq m-1 \right\}$ ha una unica soluzione $\Pi(x)$ caratterizzata dalla proprietà:

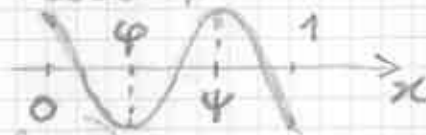
$$\exists x_0 < x_1 < \dots < x_m, x_i \in [a,b] : f(x_i) - \Pi(x_i) = (-1)^{i+1} \varepsilon, \quad \varepsilon = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi(x)|.$$

Ci si aspetta che la parabola che meglio approssima $1-x^m$ in $[0,1]$ nel senso MIN-MAX ha un grafico del tipo:



e un GRAFICO DELL'ERRORE del tipo:

$$(1-x^m) - (c+bx+ax^2)$$



(per la teoria di Chebyshev).

Quindi dobbiamo cercare $a, b, c, \mu > 0, 0 < \varphi < \psi < 1$ tali che

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 1-c &= \mu, \quad \textcircled{2} \quad 1-\varphi^m - (c+b\varphi+a\varphi^2) = -\mu, \\ \textcircled{3} \quad 1-\psi^m - (c+b\psi+a\psi^2) &= \mu, \quad \textcircled{4} \quad -(c+b+a) = -\mu, \\ \textcircled{5} \quad -m\varphi^{m-1} - b - 2a\varphi &= 0, \quad \textcircled{6} \quad -m\psi^{m-1} - b - 2a\psi = 0. \end{aligned}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \Rightarrow a = -\frac{m}{2} \frac{\psi^{m-1} - \varphi^{m-1}}{\psi - \varphi}, \quad b = m\varphi\psi \frac{\psi^{m-2} - \varphi^{m-2}}{\psi - \varphi}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \Rightarrow c = \frac{1}{2}(1-a-b), \quad \mu = \frac{1}{2}(a+b+1)$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3}: \varphi^m + \psi^m + m\varphi\psi \frac{\psi^{m-2} - \varphi^{m-2}}{\psi - \varphi} (\varphi + \psi - 1) - \frac{m}{2} \frac{\psi^{m-1} - \varphi^{m-1}}{\psi - \varphi} (\varphi^2 + \psi^2 - 1) = 1$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3}: \psi^m - \varphi^m + m\varphi\psi (\psi^{m-2} - \varphi^{m-2}) \left(1 + \frac{1}{\psi - \varphi}\right) - \frac{m}{2} (\psi^{m-1} - \varphi^{m-1}) \left(\psi + \varphi + \frac{1}{\psi - \varphi}\right) = -1$$

Sommando le ultime due:

$$0 = 2\psi^2 \left\{ \left(1 - \frac{m}{2}\right) \psi^{m-2} + \frac{m}{2} (\psi^{m-3}\varphi + \psi^{m-4}\varphi^2 + \dots + \psi\varphi^{m-3} + \varphi^{m-2}) \right\}.$$

Quindi $z = \psi/\varphi > 1$ deve essere tale che

$$z^{m-2} - \frac{m}{m-2} (-z^{m-3} + z^{m-4} + \dots + z + 1) = 0 \quad *$$

Es. $m=3: \psi/\varphi = 3$
 $m=4: \psi/\varphi = 1+\sqrt{3}$
 $m=5: \psi/\varphi = ?$

Invece, sottraendo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi^m + m\varphi\psi \frac{\psi^{m-2} - \varphi^{m-2}}{\psi - \varphi} (\varphi - 1) - \frac{m}{2} \frac{\psi^{m-1} - \varphi^{m-1}}{\psi - \varphi} (\varphi^2 - 1) &= 1 \\ \psi = z\varphi \Rightarrow \frac{m}{2} (z^{m-2} + \dots + z - \frac{m-2}{m}) \varphi^m - m z (1 + z + \dots + z^{m-3}) \varphi^{m-1} &+ \frac{m}{2} (1 + z + \dots + z^{m-2}) \varphi^{m-2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Es. $m=4 (z=1+\sqrt{3}): \varphi = \frac{1+\sqrt{10+6\sqrt{3}}}{6\sqrt{3}+9} = 0.284..$

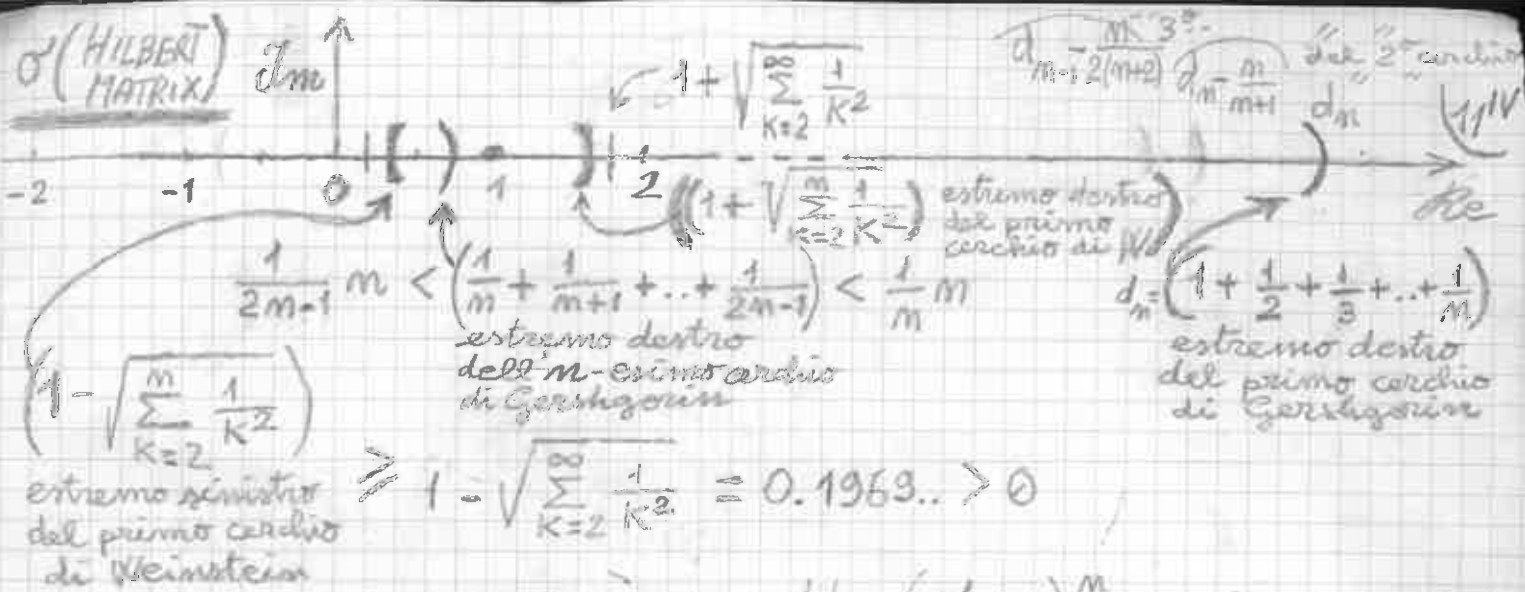
$4\varphi^3 - 9\varphi^2 + 6\varphi - 1 = 0$

$3(2\sqrt{3}+3)\varphi^4 - 4(5+3\sqrt{3})\varphi^3 + 6(2+\sqrt{3})\varphi^2 - 1 = 0$

$(\varphi-1)^2 (4\varphi^2 - 5\varphi + 1) = 0$

Per: $12\varphi(\varphi-1)(2\sqrt{3}+3)\varphi - (2+\sqrt{3}) = 0$

$(\varphi-1)^2 (4\varphi^2 - 5\varphi + 1) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4}$



La matrice in considerazione è $H_m = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^m$. Poiché nel primo cerchio di Weinstein ci deve essere almeno un autovettore di H_m , si può dire che $\max_{i=1, \dots, m} d_i(H_m) \geq 0.1969...$ per ogni m .

Poiché nell'ultimo cerchio di Weinstein c'è almeno un autovettore di H_m , si può dire che $\min_{i=1, \dots, m} d_i(H_m) \leq \frac{1}{2m-1} + \sqrt{\sum_{k=m}^{2m-2} \frac{1}{k^2}}$.

Usando la formula di Eulero-Mclaurin, si dimostra che

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{j=1}^K B_{2j}(\theta) \left(\frac{1}{m^{2j+1}} - \frac{1}{n^{2j+1}} \right) + u_{K+1}$$

ove $|u_{K+1}| \leq 2 |B_{2K+2}(\theta)| \left(\frac{1}{m^{2K+3}} - \frac{1}{n^{2K+3}} \right)$

Questa uguaglianza può servire? ...

Questo studio è nato dall'osservazione che

$$\det H_1 = 1, \det H_2 = \frac{1}{12}, \det H_3 = \frac{1}{12 \cdot 180} = \frac{1}{2160} = \frac{1}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5}$$

$$\det H_4 = \frac{1}{12 \cdot 180 \cdot 2880} = \frac{1}{6048000} = \frac{1}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$\det H_m = \prod_{i=1}^m d_i(H_m)$ sembra diventare sempre più piccolo $\Rightarrow$ almeno uno degli autovettori di H_m si avvicina a zero molto

$$\mu_2(AB) \leq \|A\| \|B\|$$

$$\leq \frac{\max_i \lambda_i \max_i \nu_i}{\min_i \lambda_i \min_i \nu_i}$$

(11)

2º exercício, FOLHA 11

$$M = \begin{bmatrix} a & \pi_2 \cdots \pi_m \\ c_2 & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \\ c_m & 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ c_2 & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \\ c_m & 0 & 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & \pi_2 \cdots \pi_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_2/b & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \\ c_m/b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & \pi_2 \cdots \pi_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A + \underbrace{e_1}_{\underline{u}} \underbrace{[(a-b)\pi_2 \cdots \pi_m]}_{\underline{v}^H}$$

$$\det(A + \underline{u} \underline{v}^H) = \det(A(I + A^{-1} \underline{u} \underline{v}^H)) = \det(A) (1 + \underline{v}^H A^{-1} \underline{u})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_2/b & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \\ -c_m/b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/b \\ -c_2/b^2 \\ \vdots \\ -c_m/b^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}^H A^{-1} \underline{u} = \frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{b^2} \sum_{i=2}^m c_i \pi_i$$

$$\Rightarrow \det M = b^m \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b^2} \sum_{i=2}^m c_i \pi_i \right) =$$

$$\tilde{M} = A^{-1} \frac{1}{1 + \underline{v}^H A^{-1} \underline{u}} A \underline{u} \underline{v}^H A^{-1} = b^{m-2} \left(ab - \sum_{i=2}^m c_i \pi_i \right) \quad (\text{vale } \forall m \geq 1)$$

$$\tilde{M}^{-1} = A^{-1} \left(\frac{b^2}{ab - \sum_{i=2}^m c_i \pi_i} \right) \frac{1}{b^2} \begin{bmatrix} b \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_m \end{bmatrix} \frac{1}{b} \left[(a-b - \frac{1}{b} \sum_{i=2}^m c_i \pi_i) \pi_2 \cdots \pi_m \right]$$