

• Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definita positiva e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$ tali che $A = LU$. Sia $D = \begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$. Dimostrare che $U = DL^H$ (11)
(NOTA: $D_{ii} > 0, \forall i$)

• Sia $M = \begin{bmatrix} a & x_2 & \dots & x_m \\ c_2 & b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ c_m & 0 & & b \end{bmatrix}$, $b \neq 0$. (i) Trovare una formula per $\det(M)$.
(ii) Nel caso $\det(M) \neq 0$, calcolare M^{-1} .

• Risolvere il problema

$$\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{C}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2.$$

• Se $|a_{1m}|$ è sufficientemente piccolo, allora il metodo di Gauss-Seidel può essere usato per risolvere un sistema del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{1m} \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \text{ Perché?}$$

• Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b \\ 1 & 1 & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a+c = b+1 \end{matrix}$$

(i) Dimostrare che il metodo di Gauss-Seidel, applicato ad $Ax = \underline{b}$, non converge.

(ii) Osservare che, invece, il metodo di Jacobi può convergere per qualche valore di $\underline{b}$, ad esempio per $\underline{b} = -\frac{5}{12}$.

• Osservare che la matrice $A = I + \underline{e}\underline{e}^T$, $\underline{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, è definita positiva e studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel nella risoluzione di $Ax = \underline{b}$, $\underline{b} \in \mathbb{C}^n$.

• $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & -1/2 & 0 \\ -1/16 & 0 & 1 & -3/4 \\ -1/5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel, nella risoluzione di $Ax = \underline{b}$.

• $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & B & \\ a_{m1} & & & \end{bmatrix}$, $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$: Esprimere la matrice di iterazione del metodo di G.S. applicato ad A in termini della matrice di iterazione del metodo di G.S. applicato a B .