Due Giorni di Algebra Lineare Numerica
www.dima.unige.it/∼dibenede/2gg/home.html
Genova, 16–17 Febbraio 2012

Bernoulli, Ramanujan, Toeplitz e le matrici triangolari

Carmine Di Fiore, Francesco Tudisco, Paolo Zellini

Speaker: Carmine Di Fiore

Usando una delle definizioni dei numeri di Bernoulli, si osserva che essi risolvono particolari sistemi *even* e *odd* triangolari inferiori di Toeplitz (l.t.T.).

In un articolo Ramanujan riporta un sistema lineare triangolare inferiore sparso risolto dai numeri di Bernoulli; si osserva che tale sistema è equivalente a un sistema l.t.T. sparso.

Cercando di ottenere il sistema di Ramanujan l.t.T. dai sistemi l.t.T. odd e even, si è indotti a studiare metodi efficienti per la risoluzione di sistemi l.t.T. generici.

I numeri di Bernoulli sono i numeri razionali che soddisfano la seguente identità

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(0)}{n!}t^n=-\frac{1}{2}t+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}t^{2k}.$$

Ne segue che essi soddisfano le seguenti equazioni lineari

$$-\frac{1}{2}j+\sum_{k=0}^{[\frac{j-1}{2}]}\binom{j}{2k}B_{2k}(0)=0,\ j=2,3,4,\dots,$$

$$j\ \text{ pari }:\quad \begin{bmatrix} \binom{2}{0} & & & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{2} & & & \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & & \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(0)\\ B_2(0)\\ B_4(0)\\ B_6(0)\\ \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$j\ \text{ dispari }:\quad \begin{bmatrix} \binom{1}{0} & & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{2} & & & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & & \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0(0)\\ B_2(0)\\ B_4(0)\\ B_6(0)\\ \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 3/2\\ 5/2\\ 7/2\\ \cdot \end{bmatrix}.$$

In altre parole, i numeri di Bernoulli possono essere ottenuti risolvendo (per sostituzione in avanti) un sistema lineare triangolare inferiore (uno dei due di cui sopra). Per esempio, risolvendo per sostituzione in avanti il primo sistema, ho ottenuto i primi numeri di Bernoulli:

$$B_0(0)=1,\ B_2(0)=\frac{1}{6},\ B_4(0)=-\frac{1}{30},\ B_6(0)=\frac{1}{42},\ B_8(0)=-\frac{1}{30},\ B_{10}(0)=\frac{5}{66},$$
$$B_{12}(0)=-\frac{691}{2730},\ B_{14}(0)=\frac{7}{6}\approx 1.16,\ B_{16}(0)=-\frac{47021}{6630}\approx -7.09,\ \dots$$

I numeri di Bernoulli appaiono nella formula per le somme di Eulero-Maclaurin, e, in particolare, nell'espressione dell'errore della formula di quadratura trapezoidale come somma di potenze pari del passo di integrazione h (l'espressione che giustifica l'efficienza del metodo di quadratura Romberg-Trapezoidale).
I numeri di Bernoulli sono anche spesso coinvolti negli studi sulla funzione Zeta di Riemann. Per esempio, è ben nota la seguente formula di Eulero:

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s},\quad \zeta(2n)=\frac{4^n|B_{2n}(0)|\pi^{2n}}{2(2n)!},\ n\in\ 1,2,3,\dots$$

(vedi anche [Riemann's Zeta Function, H. M. Edwards, 1974]).
L'articolo di Ramanujan cui ci riferiremo in seguito è intitolato "Some properties of Bernoulli's numbers" (1911).

Le matrici dei coefficienti dei due precedenti sistemi lineari triangolari inferiori sono sottomatrici della matrice X mostrata qui sotto:

$$X = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \\ \binom{\mathit{1}}{\mathit{0}} & \binom{1}{1} \\ \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{\mathit{3}}{\mathit{0}} & \binom{3}{1} & \binom{\mathit{3}}{\mathit{2}} & \binom{3}{3} \\ \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{0}} & \binom{4}{1} & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{\mathit{5}}{\mathit{0}} & \binom{5}{1} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{2}} & \binom{5}{3} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{4}} & \binom{5}{5} \\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{0}} & \binom{6}{1} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} & \binom{6}{3} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Si può facilmente osservare che X può essere riscritta come una serie di potenze:

$$X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Y^k, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 & 0 \\ & & & 4 & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Dim:} \quad [X]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!}[Y^{i-j}]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!} j \cdots (i-2)(i-1) = \binom{i-1}{j-1}, \quad 1 \le j \le i \le n.$$

Questa osservazione è il punto da cui partire per dimostrare che

$$\begin{bmatrix} 2 \\ & 12 \\ & & 30 \\ & & & 56 \\ & & & & \cdot \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} \phi^k = \begin{bmatrix} \binom{2}{0} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{2} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ & 3 \\ & & 5 \\ & & & 7 \\ & & & & \cdot \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \phi^k = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{2} \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

dove $\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & 0 \\ & 12 & 0 \\ & & 30 & 0 \\ & & & 56 & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$, $2 = 1 \cdot 2$, $12 = 3 \cdot 4$, $30 = 5 \cdot 6$, $\ldots$.

Quindi i sistemi lineari risolti dai numeri di Bernoulli (di cui sopra) possono essere riscritti come qui di seguito, in termini di ϕ:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{1}{(2k+2)!}\phi^k \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/12 \\ 3/30 \\ 4/56 \\ 5/90 \\ \cdot \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ 1/10 \\ 1/14 \\ 1/18 \\ \cdot \end{bmatrix} =: \mathbf{q}^e, \tag{almosteven}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\phi^k \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1 \\ (3/2)/3 \\ (5/2)/5 \\ (7/2)/7 \\ (9/2)/9 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ \cdot \end{bmatrix} =: \mathbf{q}^o. \tag{almostodd}$$

Adesso trasformiamo ϕ in una matrice di Toeplitz. Si osserva che

$$D\phi D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & d_4 & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & & & \\ & 12 & 0 & & & \\ & & 30 & 0 & & \\ & & & 56 & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & & \\ & d_2^{-1} & & & \\ & & d_3^{-1} & & \\ & & & d_4^{-1} & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2\frac{d_2}{d_1} & 0 & & & & \\ & 12\frac{d_3}{d_2} & 0 & & & \\ & & 30\frac{d_4}{d_3} & 0 & & \\ & & & 56\frac{d_5}{d_4} & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = xZ, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

sse $\quad d_k = \dfrac{x^{k-1}d_1}{(2k-2)!}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, sse

$$D = d_1 D_x, \quad D_x = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{x}{2!} & & & & \\ & & \frac{x^2}{4!} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} & \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

Siamo pronti per introdurre i due sistemi triangolari inferiori di Toeplitz (l.t.T.) *even* e *odd* risolti dai numeri di Bernoulli. Poniamo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ \cdot \end{bmatrix}$$

dove i $B_{2i}(0)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, sono i numeri di Bernoulli.

Allora il sistema (almosteven) $\sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{1}{(2k+2)!}\phi^k \mathbf{b} = \mathbf{q}^e$ è equivalente al sistema $\sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{1}{(2k+2)!}(D_x \phi D_x^{-1})^k (D_x \mathbf{b}) = D_x \mathbf{q}^e$, cioè al seguente sistema l.t.T. *even*:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{x^k}{(2k+2)!} Z^k (D_x \mathbf{b}) = D_x \mathbf{q}^e. \tag{even}$$

Idem, il sistema (almostodd) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\phi^k \mathbf{b} = \mathbf{q}^o$ è equivalente al sistema $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(D_x \phi D_x^{-1})^k (D_x \mathbf{b}) = D_x \mathbf{q}^o$, cioè al seguente sistema l.t.T. *odd*:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!} Z^k (D_x \mathbf{b}) = D_x \mathbf{q}^o. \tag{odd}$$

Ne segue che *i numeri di Bernoulli possono essere calcolati usando un solver di sistemi lineari l.t.T.*. Tale solver produce il seguente vettore $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = D_x \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \cdot B_0(0) \\ \frac{x}{2!} B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!} B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^s}{(2s)!} B_{2s}(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} B_{2n-2}(0) \\ \cdot \end{bmatrix},$$

dal quale si ottiene il vettore dei primi n numeri di Bernoulli:

$$\{\mathbf{b}\}_n = \{D_x^{-1} \mathbf{z}\}_n.$$

Perché può essere utile scegliere x positivo diverso da 1 ?
Una opportuna scelta di x può rendere possibile e più stabile il calcolo, attraverso un l.t.T. solver, degli elementi z_i di $\mathbf{z}$ anche per i molto grandi. Infatti, poiché

$$\frac{x^i}{(2i)!} B_{2i}(0) \approx (-1)^{i+1} p_i, \quad p_i = \frac{x^i}{(2i)!} 4\sqrt{\pi i} \frac{i^{2i}}{(\pi e)^{2i}}, \quad \frac{p_{i+1}}{p_i} \to \frac{x}{4\pi^2},$$

si ha che $|\frac{x^i}{(2i)!} B_{2i}(0)| \to 0$ $(+\infty)$ se $x < 4\pi^2$ $(x > 4\pi^2)$, entrambe situazioni non ok. Invece, per $x \approx 4\pi^2 = 39.47..$ la successione $|\frac{x^i}{(2i)!} B_{2i}(0)|$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, è (dovrebbe essere) limitata sia inferiormente che superiormente. ...

$|\frac{x^2}{(4)!} B_4(0)| \leq 1$ sse $|x| \leq 26.84$
$|\frac{x^4}{(8)!} B_8(0)| \leq 1$ sse $|x| \leq 33.2$
$|\frac{x^8}{(16)!} B_{16}(0)| \leq 1$ sse $|x| \leq 36.2$
$|\frac{x^{16}}{(32)!} B_{32}(0)| \leq 1$ circa sse $|x|^{16} \leq \frac{1}{1293} \frac{(8.54)^{32}}{4 \cdot 7.09}$ sse $|x| \leq 37.82$
$|\frac{x^s}{(2s)!} B_{2s}(0)| \leq 1$ circa sse $|\frac{x^s}{(2s)!} 4\sqrt{\pi s} \frac{s^{2s}}{(\pi e)^{2s}}| \leq 1$ sse $|x|^s \leq \frac{(2s)!}{s^{2s}} \frac{(\pi e)^{2s}}{4\sqrt{\pi s}}$ ...

Insomma, il parametro x dovrebbe essere utilizzato per rendere più stabile il l.t.T. solver.

Ramanujan in un articolo osserva che i numeri di Bernoulli $B_2(0)$, $B_4(0)$, $B_6(0), \ldots$, soddisfano il seguente sistema triangolare inferiore *sparso* di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 1 &&&&&&&&& \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 &&&&&&&& \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 &&&&&&& \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 1 &&&&&& \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{143}{4} & 0 & 0 & 1 &&&&& \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{286}{3} & 0 & 0 & 1 &&&& \\ 0 & 0 & \frac{204}{5} & 0 & 0 & 221 & 0 & 0 & 1 &&& \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{1938}{7} & 0 & 0 & \frac{3230}{7} & 0 & 0 & 1 && \\ 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{7106}{5} & 0 & 0 & \frac{3553}{4} & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ B_8(0) \\ B_{10}(0) \\ B_{12}(0) \\ B_{14}(0) \\ B_{16}(0) \\ B_{18}(0) \\ B_{20}(0) \\ B_{22}(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/30 \\ 1/42 \\ 1/45 \\ -1/132 \\ 4/455 \\ 1/120 \\ -1/306 \\ 3/665 \\ 1/231 \\ -1/552 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

(per essere esatti, poiché i numeri di Bernoulli per Ramanujan sono i moduli dei nostri, le sue equazioni, ottenute per via analitica, sono leggermente diverse).

Per esempio, dalle equazioni di cui sopra ho facilmente calcolato i numeri di Bernoulli $B_{18}(0), B_{20}(0), B_{22}(0)$ (a partire da quelli già calcolati):

$$B_{18}(0) = \frac{43867}{798} \approx 54.97, \quad B_{20}(0) = -\frac{174611}{330} \approx -529.12, \quad B_{22}(0) = \frac{854513}{138} \approx 6192.12.$$

Problema.
È possibile ottenere tale sistema di Ramanujan, triangolare inferiore di equazioni sparse, dai nostri sistemi lineari l.t.T. even e odd ? È possibile ottenere altre equazioni sparse (possibilmente più sparse di quelle di Ramanujan) che definiscono i numeri di Bernoulli ?

Si noti che la matrice di Ramanujan, chiamiamola R, ha elementi non nulli esattamente nei posti dove la matrice di Toeplitz

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k \, (Z^3)^k, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 &&& \\ 1 & 0 && \\ & 1 & 0 & \\ && \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ha elementi non nulli. Ma R non è una matrice di Toeplitz !

... pausa per alcuni mesi ...

Si noti che il vettore delle indeterminate nel sistema di Ramanujan è Z^T volte il nostro vettore $\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 && \\ & 0 & 1 & \\ && 0 & \cdot \\ &&& \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = Z^T \mathbf{b}.$$

Quindi, il sistema di Ramanujan può essere riscritto come segue

$$R(Z^T \mathbf{b}) = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = [\, f_1 \, f_2 \, f_3 \, \cdot \,]^T.$$

Osservazione

La matrice di Ramanujan R soddisfa la seguente identità, coinvolgente una matrice triangolare inferiore sparsa *di Toeplitz* $\tilde{R}$:

$$R\begin{bmatrix} \frac{2!}{x} & & & \\ & \frac{4!}{x^2} & & \\ & & \frac{6!}{x^3} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2!}{x} & & & \\ & \frac{4!}{x^2} & & \\ & & \frac{6!}{x^3} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\tilde{R}, \quad \tilde{R} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{2\,x^{3s}}{(6s+2)!(2s+1)} Z^{3s}.$$

$\Rightarrow$

$$RZ^T\mathbf{b} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = [f_1\; f_2\; f_3\; \cdot]^T \qquad \text{sse}$$

$$R\begin{bmatrix} \frac{2!}{x} & & & \\ & \frac{4!}{x^2} & & \\ & & \frac{6!}{x^3} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & & & \\ & \frac{x^2}{4!} & & \\ & & \frac{x^3}{6!} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f} \qquad \text{sse}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2!}{x} & & & \\ & \frac{4!}{x^2} & & \\ & & \frac{6!}{x^3} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\tilde{R}\begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & & & \\ & \frac{x^2}{4!} & & \\ & & \frac{x^3}{6!} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f} \qquad \text{sse}$$

$$\tilde{R}\begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & & & \\ & \frac{x^2}{4!} & & \\ & & \frac{x^3}{6!} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & & & \\ & \frac{x^2}{4!} & & \\ & & \frac{x^3}{6!} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

In altre parole, *il sistema di Ramanujan è equivalente al seguente sistema sparso l.t.T.*:

$$\tilde{R}\,(Z^T D_x \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & & & \\ & \frac{x^2}{4!} & & \\ & & \frac{x^3}{6!} & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \text{dove}$$

$$\tilde{R} = L(\mathbf{a}^R) = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
\frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\
0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
\frac{2}{14!5}x^6 & 0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & \frac{2}{14!5}x^6 & 0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{14!5}x^6 & 0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\frac{2}{20!7}x^9 & 0 & 0 & \frac{2}{14!5}x^6 & 0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & & \\
0 & \frac{2}{20!7}x^9 & 0 & 0 & \frac{2}{14!5}x^6 & 0 & 0 & \frac{2}{8!3}x^3 & 0 & 0 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{8!3}x^3 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{14!5}x^6 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{20!7}x^9 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si noti la nuova notazione : } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} a_0 & & & \\ a_1 & a_1 & & \\ a_2 & a_1 & a_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

TEOREMA

Notazioni: Z è la matrice lower shift

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$L(\mathbf{a})$ è la matrice triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $\mathbf{a}$, i.e.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \, Z^i = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$d(\mathbf{z})$ è la matrice diagonale con z_i come elementi diagonali.
Poniamo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad D_x = \operatorname{diag}\left(\frac{x^i}{(2i)!}, \; i = 0, 1, 2, \ldots\right), \; x \in \mathbb{R},$$

dove $B_{2i}(0)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, sono i numeri di Bernoulli.

Allora *i vettori* $D_x\mathbf{b}$ *e* $Z^T D_x \mathbf{b}$ *risolvono i seguenti sistemi lineari l.t.T.*

$$L(\mathbf{a})\,(D_x\mathbf{b}) = D_x\mathbf{q}, \quad L(\mathbf{a})\,(Z^T D_x\mathbf{b}) = d(\mathbf{z}) Z^T D_x \mathbf{q},$$

dove i vettori $\mathbf{a} = (a_i)_{i=0}^{+\infty}$, $\mathbf{q} = (q_i)_{i=0}^{+\infty}$, e $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^{+\infty}$, possono assumere rispettivamente i valori:

$$a_i^R = \delta_{i=0 \bmod 3} \frac{2x^i}{(2i+2)!(\frac{2}{3}i+1)}, \quad q_i^R = \frac{1}{(2i+1)(i+1)}(1 - \delta_{i=2 \bmod 3}\frac{3}{2}), \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$z_i^R = 1 - \delta_{i=0 \bmod 3} \frac{1}{\frac{2}{3}i+1}, \; i = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$a_i^e = \frac{2x^i}{(2i+2)!}, \quad q_i^e = \frac{1}{2i+1}, \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$z_i^e = \frac{i}{i+1}, \; i = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$a_i^o = \frac{x^i}{(2i+1)!}, \; i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \; q_0^o = 1, \; q_i^o = \frac{1}{2}, \; i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$z_i^o = \frac{2i-1}{2i+1}, \; i = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Problema (riguardante il calcolo dei numeri di Bernoulli).

Si può ottenere il sistema sparso l.t.T. di Ramanujan

$$L(\mathbf{a}^R)D_x\mathbf{b} = D_x\mathbf{q}^R,$$

come conseguenza dei sistemi l.t.T. even e odd

$$L(\mathbf{a}^e)D_x\mathbf{b} = D_x\mathbf{q}^e, \quad L(\mathbf{a}^o)D_x\mathbf{b} = D_x\mathbf{q}^o \quad ?$$

$\rightarrow$ trovare $\hat{\mathbf{a}}^e$, $\hat{\mathbf{a}}^o$ tale che $L(\hat{\mathbf{a}}^e)L(\mathbf{a}^e) = L(\mathbf{a}^{(1)}) = L(\hat{\mathbf{a}}^o)L(\mathbf{a}^o)$,
i.e. tale che $L(\mathbf{a}^e)\hat{\mathbf{a}}^e = \mathbf{a}^{(1)} = L(\mathbf{a}^o)\hat{\mathbf{a}}^o$,

con $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{a}^R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \bullet \\ \cdot \end{bmatrix}$ oppure $\mathbf{a}^{(1)}$ più sparso di $\mathbf{a}^R$.

Importante: il calcolo di tali vettori $\hat{\mathbf{a}}^e$, $\hat{\mathbf{a}}^o$ e $\mathbf{a}^{(1)}$ dovrebbe richiedere molte meno operazioni di quante sono richieste per risolvere i sistemi originali (densi) even e odd.

Un problema più generale: è possibile trasformare efficientemente una matrice l.t.T. generica in una matrice l.t.T. più sparsa ?

$\rightarrow$ Questione: dati a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, è possibile ottenere "in modo economico" $\hat{a}_i$ e $a_i^{(1)}$ tali che

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ a_1^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ a_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix} = \gamma, \ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{b-1} \quad ?$$

Se la risposta è si, allora avremo che un generico sistema l.t.T denso può essere trasformato efficientemente in un sistema l.t.T. sparso:

$$L(\mathbf{a})\mathbf{z} = \mathbf{c} \quad \text{iff} \quad L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})\mathbf{c} \quad \text{iff} \quad L(\gamma)\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})\mathbf{c}.$$

DEFINIZIONI:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{+\infty}, \quad L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad E^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^s-1},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad E\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ u_1 \\ \mathbf{0} \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad L(E\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \mathbf{0} & I & & & & \\ u_1 & \mathbf{0}^T & 1 & & & \\ \mathbf{0} & u_1 I & \mathbf{0} & I & & \\ u_2 & \mathbf{0}^T & u_1 & \mathbf{0}^T & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}.$$

LEMMA: Se $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$, allora

$$L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})L(\mathbf{v}), \quad L(E^s\mathbf{u})E^s\mathbf{v} = E^sL(\mathbf{u})\mathbf{v}, \quad \forall\, s \in \mathbb{N}\,.$$

PROBLEMA: Dato $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$, trovare $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \cdot \end{bmatrix}$ tali che

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ a_1^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad L(\mathbf{a})L(\hat{\mathbf{a}}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})\,.$$

Questioni:

È possibile ottenere “in modo economico” $\hat{a}_i$ e $a_i^{(1)}$?

Esistono formule esplicite per $\hat{a}_i$ e $a_i^{(1)}$?

Per il momento, vediamo nei dettagli, con due esempi, come *le soluzioni del Problema di cui sopra possono condurre a metodi efficienti per la risoluzione di sistemi lineari l.t.T. generici.*

ESEMPIO: $n = 8$ $\quad (n = b^k,\ b = 2,\ k = 3)$

$$
\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ \cdot \end{bmatrix},\ L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&& \\
a_1 & 1 &&&&&&& \\
a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\
a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\
a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\
a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&& \\
0 &&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&& \\
& 0 &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&& 0 &&&&&& \\
&&& 1 &&&&& \\
&&& 0 &&&&& \\
&&&& \cdot &&&&
\end{bmatrix}.
$$

step 1: Dato $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)}$ trova $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ tale che

$$
L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&& \\
a_1 & 1 &&&&&&& \\
a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\
a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\
a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\
a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \cdot \end{bmatrix}
=: E\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ a_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},
$$

$$
L(\mathbf{a})L(\hat{\mathbf{a}}) = L(E\mathbf{a}^{(1)});
$$

step 2: Dato $\mathbf{a}^{(1)}$ trova $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che

$$
L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&& \\
a_1^{(1)} && 1 &&&&&& \\
& a_1^{(1)} && 1 &&&&& \\
a_2^{(1)} && a_1^{(1)} && 1 &&&& \\
& a_2^{(1)} && a_1^{(1)} && 1 &&& \\
a_3^{(1)} && a_2^{(1)} && a_1^{(1)} && 1 && \\
& a_3^{(1)} && a_2^{(1)} && a_1^{(1)} && 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}
=: E^2\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},
$$

$$
\underline{L(E\mathbf{a}^{(1)})}L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)});
$$

step $3 = \log_2 8$: Dato $\mathbf{a}^{(2)}$ trova $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$ tale che

$$
L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& 1 &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 1 &&&&& \\
a_1^{(2)} &&&& 1 &&&& \\
& a_1^{(2)} &&&& 1 &&& \\
&& a_1^{(2)} &&&& 1 && \\
&&& a_1^{(2)} &&&& 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}
=: E^3\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},
$$

$$
\underline{L(E^2\mathbf{a}^{(2)})}L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}).
$$

$$
\Rightarrow \qquad L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})\big[\, L(\mathbf{a}) \,\big] = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}) = \begin{bmatrix} I_8 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix},
$$

in pratica, abbiamo effettuato una specie di eliminazione di Gauss.

Quante operazioni aritmetiche (a.o.) ?

In realtà, dati gli $a_i = a_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, 7$, dobbiamo calcolare

$$\hat{a}_i = \hat{a}_i^{(0)},\ a_i^{(1)}\ \Big| \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ a_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},\ \varphi_8 \text{ a.o.},$$

$$\hat{a}_i^{(1)},\ a_1^{(2)}\ \Big| \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1^{(1)} & 1 & & & \\ a_2^{(1)} & a_1^{(1)} & 1 & & \\ a_3^{(1)} & a_2^{(1)} & a_1^{(1)} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ \hat{a}_3^{(1)} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(2)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},\ \varphi_4 \text{ a.o.},$$

$$\hat{a}_1^{(2)}\ \Big| \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ a_1^{(2)} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(2)} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},\ \varphi_2 \text{ a.o..}$$

Il caso generale: $n = 2^k$

Dati gli $a_i = a_i^{(0)}$, per $i = 1, \ldots, n-1 = 2^k - 1$, dobbiamo calcolare

$$\hat{a}_i^{(j)},\ a_i^{(j+1)}\ \Bigg| \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1^{(j)} & 1 & & & & & \\ a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{\frac{n}{2^j}-1}^{(j)} & \cdot & \cdot & a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\frac{n}{2^j} \times \frac{n}{2^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(j)} \\ \hat{a}_2^{(j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_{\frac{n}{2^j}-1}^{(j)} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(j+1)} \\ 0 \\ \cdot \\ a_{\frac{n}{2^{j+1}}-1}^{(j+1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},\ \varphi_{\frac{n}{2^j}} \text{ a.o.},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k-2, k-1 \ \ (j = k-1: \text{ solo } \hat{a}_i^{(j)})$$

Costo totale: $\sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{\frac{n}{2^j}} \leq$?

Osservazione. Si noti che, al passo j, gli scalari $a_i^{(j+1)}$ sono gli $\frac{n}{2^{j+1}}$ elementi non nulli di un prodotto matrice $\frac{n}{2^j} \times \frac{n}{2^j}$ $(2^{k-j} \times 2^{k-j})$ l.t.T. per vettore. Se supponiamo tale prodotto matrice vettore calcolabile con al più $c\, 2^{k-j}(k-j)$ a.o., per qualche costante c, allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{\frac{n}{2^j}} &\leq c \sum_{j=0}^{k-2} 2^{k-j}(k-j) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{CostCompOf}\,(\,\hat{a}_i^{(j)}\,) \\ &\leq O(2^k k) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{CostCompOf}\Big(\hat{a}_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, \frac{n}{2^j} - 1\Big) = \,? \end{aligned}$$

Calcolare la prima colonna di $L(\mathbf{a})^{-1}$ $(n = 2^3 = 8)$

Sia $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, v_2 \cdot]^T$ un qualsiasi vettore. Dall'identità

$$L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})\big[\,L(\mathbf{a})\,\big] = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}) = \begin{bmatrix} I_8 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

e dal Lemma, segue che

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v} \text{ iff} \\ &\quad L(E^3a^{(3)})\mathbf{z} &&= L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})E^2\mathbf{v} \\ & &&= L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E^2L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v} \\ & &&= L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

In altre parole, il sistema $L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v}$ è equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} I_8 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ \cdot \end{bmatrix} = L(E^3a^{(3)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \{\mathbf{z}\}_8 &= \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_8\{\mathbf{v}\}_8 \\ &= \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_{8,4}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_4\{E\}_{4,2}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_2\{\mathbf{v}\}_2. \end{aligned}$$

Quindi il vettore

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ \hat{a}_1 & 1 &&&&&& \\ \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&&&& \\ \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&&& \\ \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&& \\ \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 && \\ \hat{a}_6 & \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 & \\ \hat{a}_7 & \hat{a}_6 & \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 &&& \\ 0 &&& \\ & 1 && \\ & 0 && \\ && 1 & \\ && 0 & \\ &&& 1 \\ &&& 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 &&& \\ \hat{a}_1^{(1)} & 1 && \\ \hat{a}_2^{(1)} & \hat{a}_1^{(1)} & 1 & \\ \hat{a}_3^{(1)} & \hat{a}_2^{(1)} & \hat{a}_1^{(1)} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \\ & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{a}_1^{(2)} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quante operazioni aritmetiche (a.o.) ?

Caso $n = 2^k$

È evidente che il procedimento sopra descritto richiede il calcolo di prodotti matrice $2^j \times 2^j$ l.t.T. per vettore, con $j = 1, \ldots, k$ (i vettori sono sparsi per $j = 2, \ldots, k$). Se supponiamo tali prodotti matrice vettore calcolabili con al più $c\,2^j j$ a.o., per qualche costante c, allora il procedimento richiede al più

$$c\sum_{j=1}^{k} 2^j j \leq O(2^k k)$$

operazioni aritmetiche.

ESEMPIO: $n = 9$ $\;(n = b^k,\, b = 3,\, k = 2)$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ \cdot \end{bmatrix}, \; L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 1 &&&& \\ 0 &&&& \\ 0 &&&& \\ & 1 &&& \\ & 0 &&& \\ & 0 &&& \\ && 1 && \\ && 0 && \\ && 0 && \\ &&& \cdot & \end{bmatrix}.$$

step 1: Dato $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)}$ trova $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ tale che

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \\ \cdot \end{bmatrix} =: E\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{a})L(\hat{\mathbf{a}}) = L(E\mathbf{a}^{(1)});$$

step $2 = \log_3 9$: Dato $\mathbf{a}^{(1)}$ trova $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ a_1^{(1)} &&& 1 &&&&&& \\ & a_1^{(1)} &&& 1 &&&&& \\ && a_1^{(1)} &&& 1 &&&& \\ a_2^{(1)} &&& a_1^{(1)} &&& 1 &&& \\ & a_2^{(1)} &&& a_1^{(1)} &&& 1 && \\ && a_2^{(1)} &&& a_1^{(1)} &&& 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} =: E^2\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$\underline{L(E\mathbf{a}^{(1)})}L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)});$$

$$\Rightarrow \qquad L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})\big[\,L(\mathbf{a})\,\big] = L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) = \begin{bmatrix} I_9 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

in pratica, abbiamo effettuato una specie di eliminazione di Gauss.

Quante operazioni aritmetiche (a.o.) ?

In realtà, dati gli $a_i = a_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, 8$, dobbiamo calcolare

$$\hat{a}_i = \hat{a}_i^{(0)},\ a_i^{(1)} \mid \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \varphi_9 \text{ a.o.},$$

$$\hat{a}_i^{(1)} \mid \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1^{(1)} & 1 & & \\ a_2^{(1)} & a_1^{(1)} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 \text{ a.o..}$$

Il caso generale: $n = 3^k$

Dati $a_i = a_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n-1 = 3^k - 1$, dobbiamo calcolare

$$\hat{a}_i^{(j)},\ a_i^{(j+1)} \ \Big| \ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1^{(j)} & 1 & & & & & \\ a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{\frac{n}{3^j}-1}^{(j)} & \cdot & \cdot & a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\frac{n}{3^j} \times \frac{n}{3^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(j)} \\ \hat{a}_2^{(j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{a}_{\frac{n}{3^j}-1}^{(j)} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(j+1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ a_{\frac{n}{3^{j+1}}-1}^{(j+1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \varphi_{\frac{n}{3^j}} \text{ a.o.},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k-2, k-1 \quad (j = k-1 : \text{ solo } \hat{a}_i^{(j)})$$

Costo totale: $\sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{\frac{n}{3^j}} \leq ?$

Osservazione. Si noti che, ad ogni passo j, gli scalari $a_i^{(j+1)}$ sono gli $\frac{n}{3^{j+1}}$ elementi non nulli di un prodotto matrice $\frac{n}{3^j} \times \frac{n}{3^j}$ $(3^{k-j} \times 3^{k-j})$ l.t.T. per vettore. Se supponiamo tale prodotto matrice vettore calcolabile con al più $c\,3^{k-j}(k-j)$ a.o., per qualche costante c, allora

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{\frac{n}{3^j}} &\leq c \sum_{j=0}^{k-2} 3^{k-j}(k-j) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{CostCompOf}\,(\,\hat{a}_i^{(j)}\,) \\ &\leq O(3^k k) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{CostCompOf}\Big(\,\hat{a}_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, \frac{n}{3^j} - 1\Big) = ? \end{aligned}$$

Calcolare la prima colonna di $L(\mathbf{a})^{-1}$ (caso $n = 3^2 = 9$):

Sia $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, v_2\, \cdot]^T$ un qualsiasi vettore. Dall'identità

$$L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})\big[\,L(\mathbf{a})\,\big] = L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) = \begin{bmatrix} I_9 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

e dal Lemma, segue che

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E\mathbf{v} \ \text{ iff} \\ &\quad L(E^2 a^{(2)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E\mathbf{v} \\ &\quad\phantom{L(E^2 a^{(2)})\mathbf{z}} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Cioè, il sistema $L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E\mathbf{v}$ è equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} I_9 & O \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_9 \\ \cdot \end{bmatrix} = L(E^2a^{(2)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \{\mathbf{z}\}_9 &= \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_9\{E\}_9\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_9\{\mathbf{v}\}_9 \\ &= \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_9\{E\}_{9,3}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_3\{\mathbf{v}\}_3. \end{aligned}$$

Quindi il vettore

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ \hat{a}_1 & 1 &&&&&&& \\ \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&&&&& \\ \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&&&& \\ \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&&& \\ \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 &&& \\ \hat{a}_6 & \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 && \\ \hat{a}_7 & \hat{a}_6 & \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 & \\ \hat{a}_8 & \hat{a}_7 & \hat{a}_6 & \hat{a}_5 & \hat{a}_4 & \hat{a}_3 & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 && \\ 0 && \\ 0 && \\ & 1 & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ && 1 \\ && 0 \\ && 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 && \\ \hat{a}_1^{(1)} & 1 & \\ \hat{a}_2^{(1)} & \hat{a}_1^{(1)} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quante operazioni aritmetiche (a.o.) ?

Caso $n = 3^k$

È evidente che il procedimento descritto sopra richiede il calcolo di prodotti matrice $3^j \times 3^j$ l.t.T. per vettore, per $j = 1, \ldots, k$ (i vettori sono sparsi per $j = 2, \ldots, k$). Quindi, se supponiamo tali prodotti matrice vettore calcolabili con al più $c\,3^j j$ a.o., per qualche costante c, allora il procedimento richiede al più

$$c\sum_{j=1}^{k} 3^j j \leq O(3^k k)$$

operazioni aritmetiche.

Per il caso generale $n = b^k$ vedi l'Appendice.

→ PROBLEMA

Rispondere a punti interrogativi nella seguente uguaglianza:

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ ? \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

- Non c'è una unica risposta ai ?.
- Ci deve essere una risposta che permette di ottenere dai sistemi even e odd un sistema risolto dai numeri di Bernoulli la cui matrice dei coefficienti ha diagonali nulle che si alternano con quelle non nulle. Trovarla ...
- *Se c'è una risposta per cui i primi 2^j elementi di $\hat{\mathbf{a}}$ possono essere calcolati con al più $O(2^j j)$ operazioni aritmetiche, per ogni $j \leq k$, allora si ha un algoritmo di costo $O(2^k k)$ per la risoluzione di sistemi triangolari inferiori di Toeplitz $2^k \times 2^k$ generici.*

Ecco qui di seguito una risposta per cui *i primi 2^j elementi di $\hat{\mathbf{a}}$ possono essere calcolati a costo zero*:

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \\ a_4 \\ -a_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a_2 - a_1^2 \\ 0 \\ 2a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2 \\ 0 \\ 2a_6 - 2a_1a_5 + 2a_2a_4 - a_3^2 \\ 0 \\ 2a_8 - 2a_1a_7 + 2a_2a_6 - 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)},$$

$$L(\mathbf{a})\big(\mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^i a_i \mathbf{e}_{i+1}\big) = \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{i=0 \bmod 2}\big(2a_i + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j a_j a_{i-j}\big)\mathbf{e}_{i+1}.$$

→ PROBLEMA

Rispondere ai punti interrogativi nella seguente uguaglianza:

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

- Non c'è una unica risposta ai ? .
- Ci deve essere una risposta che permette di ottenere il sistema di Ramanujan di Toeplitz, risolto dai numeri di Bernoulli, come conseguenza dei sistemi even e odd. Trovarla ...
- *Se c'è una risposta per cui i primi 3^j elementi di $\hat{\mathbf{a}}$ possono essere calcolati con al più $O(3^j j)$ operazioni aritmetiche, per ogni $j \leq k$, allora si ha un algoritmo di costo $O(3^k k)$ per la risoluzione di sistemi triangolari inferiori di Toeplitz $3^k \times 3^k$ generici.*

Ecco qui di seguito una risposta :

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 + a_1^2 \\ 2a_3 - a_1 a_2 \\ -a_4 - a_1 a_3 + a_2^2 \\ -a_5 + 2a_1 a_4 - a_2 a_3 \\ 2a_6 - a_1 a_5 - a_2 a_4 + a_3^2 \\ -a_7 - a_1 a_6 + 2a_2 a_5 - a_3 a_4 \\ -a_8 + 2a_1 a_7 - a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_4^2 \\ 2a_9 - a_1 a_8 - a_2 a_7 + 2a_3 a_6 - a_4 a_5 \\ -a_{10} - a_1 a_9 + 2a_2 a_8 - a_3 a_7 - a_4 a_6 + a_5^2 \\ -a_{11} + 2a_1 a_{10} - a_2 a_9 - a_3 a_8 + 2a_4 a_7 - a_5 a_6 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)},$$

$a_1^{(1)} = 3a_3 - 3a_1 a_2 + a_1^3,$
$a_2^{(1)} = 3a_6 - 3a_1 a_5 - 3a_2 a_4 + 3a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_4 + a_2^3?,$
$a_3^{(1)} = 3a_9 - 3a_1 a_8 - 3a_2 a_7 + 6a_3 a_6 - 3a_1 a_2 a_6 - 3a_1 a_3 a_5 - 3a_2 a_3 a_4 + 3a_1^2 a_7 + 3a_1 a_4^2 - 3a_4 a_5 + 3a_5 a_2^2 + a_3^3, \ \ldots$

$$\hat{a}_i = -\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} a_r a_{i-r} + \delta_{i=0 \bmod 2} a_{\frac{i}{2}}^2 + 3 \begin{cases} \sum_{s \geq \frac{3-i}{6}}^{0} a_{\frac{i-3}{2}+3s} a_{\frac{i+3}{2}-3s} & i \text{ odd} \\ \sum_{s \geq \frac{6-i}{6}}^{0} a_{\frac{i-6}{2}+3s} a_{\frac{i+6}{2}-3s} & i \text{ even} \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

Tali $\hat{a}_i$, per $i = 0, 1, \ldots, 3^j - 1$, possono essere calcolati con al più $O(3^j j)$ operazioni aritmetiche ? →

$$
\left(
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
1 \\
& 0 \\
& a_1 & 0 \\
&&& 3 \\
&& a_2 && 0 \\
&&&& 3a_1 & 0 \\
&&& a_3 &&& 3 \\
&&&&& 3a_2 && 0 \\
&&&& a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&& a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&& a_6 &&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&&&&& 3a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&& a_7 &&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&&&&& 3a_6 &&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&&&&& a_8 &&& 3a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&&&&& 3a_7 &&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&&&&& a_9 &&& 3a_6 &&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&&&&&&&& 3a_8 &&& 3a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&&&&& a_{10} &&& 3a_7 &&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&&&&&&&& 3a_9 &&& 3a_6 &&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&&&&&&&& a_{11} &&& 3a_8 &&& 3a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&&&&&&&& 3a_{10} &&& 3a_7 &&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&&&&&&&& a_{12} &&& 3a_9 &&& 3a_6 &&& 3a_3 &&& 3 \\
&&&&&&&&&&&&&& 3a_{11} &&& 3a_8 &&& 3a_5 &&& 3a_2 && 0 \\
&&&&&&&&&&&&& a_{13} &&& 3a_{10} &&& 3a_7 &&& 3a_4 &&& 3a_1 & 0 \\
&&&&&&&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right]
-
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
{} \\
& 1 \\
&& 1 \\
&& a_1 & 1 \\
&&& a_1 & 1 \\
&&& a_2 & a_1 & 1 \\
&&&& a_2 & a_1 & 1 \\
&&&& a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&& a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&& a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&& a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&& a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&& a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&& a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&& a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&& a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&& a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&& a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&& a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&& a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&& a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&& a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&& a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&& a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&&& a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&&& a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&&&& a_{12} & a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\
&&&&&&&&&&&&&& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right]
\right)
\left[\begin{array}{c}
1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \\ a_{17} \\ a_{18} \\ a_{19} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{26} \\ \cdot
\end{array}\right]
$$

$\rightarrow$ Si può calcolare il prodotto matrice $3^j \times 3^j$ (27×27) per vettore qui sopra effettuando al più $O(3^j j)$ operazioni aritmetiche ?

Se si, allora avremmo un metodo in grado di risolvere sistemi lineari triangolari inferiori di Toeplitz $3^k \times 3^k$ con al più $O(3^k k)$ operazioni aritmetiche.

Se no, allora provare a cercare un'altra soluzione $\hat{\mathbf{a}}$ del sistema $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = [1\,0\,0 \bullet 0\,0\,\cdot]^T$ per cui il vettore $\{\hat{\mathbf{a}}\}_{3^j}$ si possa calcolare da $\{\mathbf{a}\}_{3^j}$ con al più $O(3^j j)$ operazioni aritmetiche ...

FINE

APPENDIX Introduce low complexity l.t.T. linear system solvers:

$$L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ . & . & . & . \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(0)} := \mathbf{a}$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(0)}$, $\mathbf{a}^{(1)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(0)})\hat{\mathbf{a}}^{(0)} = E\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \ \text{ so that}$$

$$L(\mathbf{a}^{(0)})L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)}) = L(E\mathbf{a}^{(1)}).$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E^2\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^2-1},$$
$$\underline{L(E\mathbf{a}^{(1)})}L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)}).$$

(use Lemma). Find $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$, $\mathbf{a}^{(3)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E^3\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^3-1},$$
$$\underline{L(E^2\mathbf{a}^{(2)})}L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}).$$

... Find $\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}$, $\mathbf{a}^{(k-1)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(k-2)})\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)} = E\mathbf{a}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^{k-2}\mathbf{a}^{(k-2)})E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)} = E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1},$$
$$\underline{L(E^{k-2}\mathbf{a}^{(k-2)})}L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}) = L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)}).$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)}$, $\mathbf{a}^{(k)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(k-1)})\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)} = E\mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)})E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)} = E^{k}\mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ . \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k}-1},$$
$$\underline{L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)})}L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)}) = L(E^{k}\mathbf{a}^{(k)}).$$

Then

$$\begin{bmatrix} \overbrace{I}^{b^k} & O \cdot \\ \begin{bmatrix} a_1^{(k)} & \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \cdot\, \cdot \end{bmatrix} = L(E^k\mathbf{a}^{(k)}) = L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}) \cdots L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})L(\mathbf{a}^{(0)}).$$

This implies that

$$L(\mathbf{a}^{(0)})\mathbf{z} = \mathbf{c} \ \text{ iff } \ L(E^k\mathbf{a}^{(k)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) \cdots L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\mathbf{c}.$$

Moreover, if

$$\mathbf{c} = E^{k-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \mathbf{0} \\ v_1 \\ \mathbf{0} \\ v_2 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1},$$

where $\mathbf{v} = (v_i)_{i=0}^{+\infty}$ is any vector (for example $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$), then by using the Lemma, we obtain the following result:

$$\begin{gathered} L(\mathbf{a}^{(0)})\mathbf{z} = \mathbf{c} \ \text{ iff} \\ \begin{bmatrix} I_{b^k} & O \cdot \\ \begin{bmatrix} a_1^{(k)} & \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \cdot\, \cdot \end{bmatrix}\mathbf{z} = L(E^k\mathbf{a}^{(k)})\mathbf{z} = \\ L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E \cdots EL(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\mathbf{v}. \end{gathered}$$

In other words, the vector $\{\mathbf{z}\}_n$, $n = b^k$, such that

$$\{L(\mathbf{a})\}_n\{\mathbf{z}\}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{b^k-1} & \cdot & a_1 & 1 \end{bmatrix}\{\mathbf{z}\}_n = \begin{bmatrix} v_0 \\ \mathbf{0} \\ v_1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ v_{b-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1}$$

(for example $\{L(\mathbf{a})\}_n^{-1}\{\mathbf{e}_1\}_n$, $v_0 = 1$, $v_i = 0$ $i \geq 1$), can be represented as follows

$$\begin{aligned} \{\mathbf{z}\}_n &= \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})\}_n\{E\}_n\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_n\{E\}_n \cdots \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})\}_n\{E\}_n\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_n\{\mathbf{v}\}_n \\ &= \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})\}_n\{E\}_{n,\frac{n}{b}}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_{\frac{n}{b}}\{E\}_{\frac{n}{b},\frac{n}{b^2}} \cdots \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})\}_{\frac{n}{b^{k-2}}}\{E\}_{\frac{n}{b^{k-2}},\frac{n}{b^{k-1}}}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_{\frac{n}{b^{k-1}}}\{\mathbf{v}\}_b \end{aligned}$$

FIRST: Compute the first n entries of $\hat{\mathbf{a}}^{(0)}$ and the first $\frac{n}{b}$ entries of $\mathbf{a}^{(1)}$ (cost φ_{b^k}); compute the first $\frac{n}{b}$ entries of $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ and the first $\frac{n}{b^2}$ entries of $\mathbf{a}^{(2)}$ (cost $\varphi_{b^{k-1}}$); ... compute the first $\frac{n}{b^{k-2}}$ entries of $\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}$ and the first $\frac{n}{b^{k-1}}$ entries of $\mathbf{a}^{(k-1)}$ (cost φ_{b^2}); compute the first $\frac{n}{b^{k-1}}$ entries of $\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)}$ (cost φ_b). Total cost of this FIRST operation: $\sum_{j=0}^{k-1}\varphi_{\frac{n}{b^j}}$.
SECOND: To such cost add $\sum_{j=1}^{k}\text{cost}\big((b^j \times b^j\ l.t.T)\cdot\ (b^j\ vector)\big)$ (the vector is sparse if $j = 2,\dots,k$; the cost for $j = 1$ is zero if $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$). See also the next page.

Amount of operations.
In the following $n = b^k$ and $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}$:

FIRST: For $j = 0, \dots, k-1$ compute, by performing $\varphi_{\frac{n}{b^j}}$ arithmetic operations, the vectors $I^1_{\frac{n}{b^j}}\hat{\mathbf{a}}^{(j)}$ and $I^1_{\frac{n}{b^{j+1}}}\mathbf{a}^{(j+1)}$, i.e. scalars $\hat{a}_i^{(j)}$ and $a_i^{(j+1)}$ such that

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1^{(j)} & 1 & & & \\ a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a^{(j)}_{\frac{n}{b^j}-1} & \cdot & a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 \end{bmatrix}}_{\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(j)} \\ \hat{a}_2^{(j)} \\ \cdot \\ \hat{a}^{(j)}_{\frac{n}{b^j}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ a_1^{(j+1)} \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ a^{(j+1)}_{\frac{n}{b^{j+1}}-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, k-1$$

(note that there is no $a_i^{(k)}$ to be computed).
Case $b = 2$. In this case, since $\hat{a}_i^{(j)} = (-1)^i a_i^{(j)}$, only $\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}$ l.t.T. by vector products, $j = 0, \dots, k-2$, need to be computed (the $a_i^{(j+1)}$ are the $\frac{n}{b^{j+1}}$ nonzero entries of the resulting vectors).

SECOND: Compute the $b \times b$ l.t.T. by vector product $\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_{\frac{n}{b^{k-1}}} \begin{bmatrix} v_0 \\ \cdot \\ v_{b-1} \end{bmatrix}$, and $\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}$ l.t.T. by vector products of type

$$\underbrace{\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(j)})\}_{\frac{n}{b^j}}}_{\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \bullet \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad j = k-2, \dots, 1, 0.$$

COMMENTS
So, in case $b = 2$, we have to perform $2^j \times 2^j$ l.t.T. by vector products, for $j = 1, \dots, k$, twice. If we assume the cost of a $2^j \times 2^j$ l.t.T. by vector product bounded by $c2^j j$ (c constant), then the total cost of the above operations is smaller than $O(2^k k) = O(n \log_2 n)$. As a consequence we have obtained, in particular, a l.t.T. linear system solver of complexity $O(n \log_2 n)$

Analogously, for $b = 3$, if we assume both φ_{3^j} and the cost of a $3^j \times 3^j$ l.t.T. by vector product bounded by $c3^j j$, then the total cost of the above operations is smaller than $O(3^k k) = O(n \log_3 n)$. ...
But is φ_{3^j} bounded by $c3^j j$? ...

For me:
http://www.imsc.res.in/∼rao/ramanujan/collectedindex.html
http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html
http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html