

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
“TOR VERGATA”

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E
NATURALI



CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA IN
Analisi Numerica

TITOLO

Limitazioni per il diametro dello spettro di una matrice
e altre applicazioni del Teorema di Schur

Relatore:

Prof. Carmine Di Fiore

Laureanda:

Carlotta Mangiapelo

Controrelatore:

Prof. Carlo Garoni

Matricola:

0269485

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

*A nonno Alvaro,
ovunque tu sia,
sono certa sarai fiero di me.*

Indice

Introduzione	2
1 Richiami di Algebra Lineare	4
1.1 Matrici, autovalori e autovettori	4
1.2 Matrici hermitiane, unitarie, normali	5
1.2.1 Alcune definizioni	5
1.2.2 Decomposizione ai valori singolari di una matrice (SVD)	6
1.2.3 Decomposizione di Schur di una matrice	8
1.3 Norme vettoriali e matriciali	12
1.3.1 Norme vettoriali	12
1.3.2 Norme matriciali	13
2 Il diametro dello spettro di matrici	17
2.1 Definizione di <i>spread</i> di una matrice	17
2.2 Caratterizzazioni e nuove limitazioni per il diametro dello spettro di una matrice	20
2.2.1 Caso di matrici generiche	20
2.2.2 Caso di matrici normali	25
3 Forme di Schur e di Jordan di matrici	32
4 Appendice	64
Riferimenti bibliografici	81

Introduzione

Nel primo capitolo richiamiamo alcuni concetti, quali definizioni e teoremi, su autovalori e autovettori, matrici, norme vettoriali e norme matriciali necessari per la comprensione degli argomenti trattati nei capitoli successivi. In particolare trattiamo del Teorema di Schur, il quale afferma che ogni matrice quadrata con elementi complessi A è triangolarizzabile con una trasformazione per similitudine unitaria, cioè esistono Q , $Q^* = Q^{-1}$, e T triangolare superiore tali che $Q^*AQ = T$.

Nel secondo capitolo analizziamo alcune applicazioni del teorema di Schur nello studio dello *spread* di una matrice e di sue limitazioni, così come sono discusse nel manoscritto di Soumia Soltani e Abdelkader Frakis dell'Università Mustapha Stambouli di Mascara, Algeria, sul quale è stata scritta una relazione con la supervisione del relatore della tesi (vedi Appendice dove sono riportati entrambi gli scritti). Si definisce spread della matrice A , con elementi complessi e di ordine n , il diametro dello spettro di A , ovvero il massimo modulo della differenza tra due autovalori $\lambda_i(A)$ e $\lambda_j(A)$, al variare di $i, j = 1, \dots, n$. Nella prima sezione del secondo capitolo richiamiamo alcune limitazioni per lo spread introdotte da L. Mirsky, E. Deutsch, E. R. Barnes e A. J. Hoffman. Nella seconda sezione mostriamo delle nuove limitazioni, alcune delle quali migliorano le precedenti, e diamo una caratterizzazione e delle limitazioni per lo spread di matrici normali.

Nel terzo capitolo c'è la parte sperimentale della tesi in cui, data A matrice $n \times n$, analizziamo l'esistenza di una matrice triangolare superiore e invertibile R che ci permetta di “passare” con una trasformazione per similitudine dalla forma canonica di Jordan J di A alla forma di Schur T di A e viceversa. Presentiamo, nel particolare, studi preliminari nel caso di matrici di ordine 2, 3 e 4, che mettono in evidenza problemi relativi alla generalizzazione dei risultati alle matrici di ordine k . La trasformazione per similitudine triangolare può diventare problematica quando nella matrice T di Schur di A ci sono almeno tre elementi sulla diagonale (almeno tre autovalori di A) uguali (ad esempio $t_{i,i} = t_{i+1,i+1} = t_{i+2,i+2} = \lambda$), e almeno due elementi nulli sulla sopra-diagonale (ad esempio $t_{i,i+1}, t_{i+1,i+2}$). Alcuni dei problemi messi

in evidenza sono risolti nella Proposizione 3.2 e nei Teoremi 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. Resta da completare lo studio e, successivamente, confrontare i risultati ottenuti con quanto presente in letteratura (vedi ad esempio [5],[7] e i riferimenti bibliografici in essi contenuti).

Gli argomenti trattati nel Capitolo 3 possono trovare applicazione in problemi come il calcolo dell'esponenziale di una matrice, vedi anche [8].

Capitolo 1

Richiami di Algebra Lineare

1.1 Matrici, autovalori e autovettori

Indichiamo con $M_{m,n}(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici $m \times n$.

Dapprima richiamiamo alcuni concetti di base sulla nozione di autovettori e autovalori di una matrice quadrata.

Definizione 1.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è detto *autovalore* di A se $\exists \underline{x} \in \mathbb{C}^n$, diverso dal vettore nullo, tale che $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.

Il vettore $\underline{x}$ è detto *autovettore* associato all'autovalore λ .

Definizione 1.2 L'insieme degli autovalori di una matrice A è detto *spettro* di A e si denota con $\sigma(A)$.

Osserviamo che ogni autovalore di A è soluzione dell'*equazione caratteristica*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

dove p_A è detto *polinomio caratteristico* di A e ha grado n . Gli autovalori di A sono perciò n , ossia tanti quanti le radici di p_A , e non necessariamente distinti.

Definizione 1.3 Definiamo *molteplicità algebrica* $m_a(\lambda)$ dell'autovalore λ la molteplicità che λ ha come radice del polinomio caratteristico.

Definiamo *molteplicità geometrica* $m_g(\lambda)$ la dimensione dell'*autospazio* associato a λ , cioè $\dim \text{Ker}(\lambda I - A)$.

L'*autospazio* associato a λ è l'insieme degli autovettori associati a λ .

Definizione 1.4 Una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *diagonaliz-*

zabile se $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \forall \lambda \in \sigma(A)$. Alternativamente diciamo che A è diagonalizzabile se e solo se $\exists X \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ matrice invertibile tale che

$$X^{-1}AX = D$$

dove D è una matrice diagonale i cui elementi d_{ii} sono gli autovalori di A e la matrice X ha per colonne gli autovettori corrispondenti.

1.2 Matrici hermitiane, unitarie, normali

1.2.1 Alcune definizioni

Ricordiamo alcune definizioni:

Definizione 1.5 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. La matrice $B = A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ è detta *matrice trasposta coniugata* (o *aggiunta*) di A se $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$, essendo $\bar{a}_{ji}$ il complesso coniugato di a_{ji} .

Inoltre, $\forall A_1, A_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ si ha che:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2)^* &= (A_1)^* + (A_2)^* \\ (A_1 A_2)^* &= (A_2)^* (A_1)^* \text{ se } m = n \\ (\alpha A_1)^* &= \bar{\alpha} (A_1)^* \end{aligned}$$

Definizione 1.6 Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *hermitiana* se $A = A^*$. Inoltre A si dice *antihermitiana* se $A^* = -A$.

Ogni matrice quadrata a valori complessi può essere scritta come somma di una matrice hermitiana e una matrice antihermitiana. Vediamo la seguente definizione.

Definizione 1.7 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, allora

$$A = \left(\frac{A + A^*}{2} \right) + \left(\frac{A - A^*}{2} \right) \quad (1.1)$$

dove la matrice $\frac{A+A^*}{2}$ è hermitiana e la matrice $\frac{A-A^*}{2}$ è antihermitiana e sono dette rispettivamente *parte hermitiana* e *parte antihermitiana* di A .

Talvolta la (1.1) è detta *decomposizione cartesiana* di A .

Osservazione 1.1 Moltiplicando e dividendo la parte antihermitiana per l'unità immaginaria i , si osserva che A può essere scritta come

$$A = H + iK = \left(\frac{A + A^*}{2} \right) + i \left(\frac{A - A^*}{2i} \right) \quad (1.2)$$

La matrice $K = \frac{A-A^*}{2i}$ è hermitiana, infatti

$$\left(\frac{A-A^*}{2i} \right)^* = \frac{A^*-A}{-2i} = \frac{A-A^*}{2i}$$

Definizione 1.8 Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *normale* se $AA^* = A^*A$.

Definizione 1.9 Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $AA^* = A^*A = I$, dove I è la matrice identità di ordine n .

Osservazione 1.2 Ogni matrice hermitiana è normale (in generale non vale il viceversa) ed è tale che ogni elemento diagonale è necessariamente reale. Ogni matrice unitaria è anche normale ma non è detto che sia hermitiana. Osserviamo infine che per una matrice hermitiana vale $\overline{A} = A^T$ e per una matrice unitaria vale $A^{-1} = A^*$.

L'insieme delle matrici unitarie di ordine n dotato dell'operazione prodotto è un gruppo (non abeliano) denotato con $\mathcal{O}(n)$, infatti:

1. I matrice identità è l'elemento neutro.
2. Ogni matrice nel gruppo ammette l'inversa che è proprio la sua aggiunta.
3. Il prodotto tra due matrici unitarie è ancora una matrice unitaria. Infatti date U e V matrici unitarie risulta:

$$UV(UV)^* = UVV^*U^* = UIU^* = UU^* = I$$

$$(UV)^*UV = V^*U^*UV = V^*IV = V^*V = I$$

Esempi particolari di matrici unitarie sono le matrici di permutazione, le matrici di Givens e le matrici di Householder. Queste verranno utilizzate nel Capitolo 3 per trasformare una qualsiasi matrice triangolare T in una matrice triangolare del tipo RJR^{-1} con R triangolare invertibile e J forma canonica di Jordan di T .

1.2.2 Decomposizione ai valori singolari di una matrice (SVD)

Ogni matrice può essere ridotta in forma diagonale con elementi diagonali non negativi tramite la moltiplicazione a destra e a sinistra per matrici unitarie. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 1.1 (*Singular Value Decomposition*) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, allora $\exists$ due matrici unitarie $U, V \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ tali che

$$U^*AV = \Sigma$$

dove Σ è diagonale e gli elementi diagonali σ_i , con $i = 1, \dots, n$, sono tali che $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Gli elementi σ_i sono detti *valori singolari* di A e sono reali non negativi e ordinati in modo non crescente. Le colonne di U e di V , dette rispettivamente *vettori singolari sinistri* e *vettori singolari destri* di A , sono rispettivamente gli autovettori di AA^* e A^*A .

Osservazione 1.3 Il teorema è valido anche per matrici rettangolari (vedi [3], anche per la dimostrazione).

Osservazione 1.4 Notiamo che $\Sigma = \Sigma^*$ essendo Σ reale. Inoltre risulta che

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $\lambda_i(A^*A)$ è l' i -esimo autovalore della matrice A^*A . Infatti:

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = V\Sigma^2V^*$$

ossia A^*A è simile alla matrice Σ^2 ovvero $\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(\Sigma^2) \forall i = 1, \dots, n$. Segue quindi la relazione.

Osservazione 1.5 Dall'osservazione 1.4 si ricava che se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è hermitiana con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ allora

$$\sigma_i = |\lambda_i| \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Infatti, essendo $A^*A = A^2$ risulta: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(A^2)} = |\lambda_i| \forall i = 1, \dots, n$.

Una importante applicazione della SVD consiste nell'*approssimazione di matrici* con matrici di rango inferiore.

Infatti, dal Teorema 1.1 abbiamo

$$A = U\Sigma V^*$$

che equivale a una rappresentazione di A del tipo

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i \underline{u_i} \underline{v_i}^*$$

dove con $\underline{u}_i$ e $\underline{v}_i$ indichiamo rispettivamente le colonne di U e di V .

Osserviamo che dal prodotto $\underline{u}_i \underline{v}_i^*$ si ottiene una *diade*, ossia una matrice di rango pari a 1.

Nel caso in cui $n - k$ valori singolari σ_i siano minori di una certa tolleranza stabilita si può effettuare una compressione della matrice A sostituendo tali σ_i con 0. Si ottiene così una nuova matrice

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^*$$

che corrisponde al troncamento di A .

Se A ha $rg(A) \leq n$, ora la nuova matrice è tale che $rg(A_k) \leq k$. Riportiamo, quindi, il seguente teorema:

Teorema 1.2 *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, allora*

$$\|A - A_k\|_{2,F} = \min_{rg(X) \leq k} \|A - X\|_{2,F}$$

In altre parole, tra tutte le matrici di rango minore o uguale a k , A_k è quella che meglio approssima A nelle norme matriciali 2 (o spettrale) e di Frobenius. Vedi Sezione 1.3 più avanti per la definizione di queste norme in $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Una interessante applicazione della decomposizione ai valori singolari consiste nella compressione di immagini digitali.

Consideriamo, ad esempio, una immagine di $n \times n$ pixel in bianco e nero: essa viene memorizzata come una matrice i cui elementi sono numeri interi che corrispondono ad una precisa tonalità di grigio. Nel formato PGM gli interi sono compresi tra 0 e 255 dove 0 corrisponde al nero, 255 al bianco e i valori intermedi corrispondono alle varie intensità di grigio. Dunque, denotata con A tale matrice, si può calcolare la sua SVD e determinare A_k alla quale corrisponderà una nuova immagine. Sappiamo per il teorema appena enunciato che A_k è la migliore approssimante di A di $rg(A) \leq k$. Da questo processo, perciò, si ottiene una nuova immagine la cui qualità risulta inferiore rispetto a quella dell'originale, ma probabilmente sufficiente per riconoscerla (vedi [4]). In altre parole, è stata realizzata una compressione dell'immagine, ovvero una sua versione memorizzabile a poco costo.

1.2.3 Decomposizione di Schur di una matrice

Richiamiamo ora un importante teorema che sarà utile per le trattazioni successive:

Teorema 1.3 (*Decomposizione di Schur*) $\forall A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \exists$ una matrice unitaria $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ tale che $U^*AU = T$ dove T è una matrice triangolare superiore.

In altre parole ogni matrice A è simile, tramite una trasformazione per similitudine unitaria, ad una matrice triangolare superiore.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione n della matrice A .

Per $n = 1$ abbiamo che $A = a$ con $a \in \mathbb{C}$, $U = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e la matrice T è quindi $T = a$ che è triangolare.

Supponiamo che la tesi valga per $n - 1$ e mostriamola per n .

Sia $\lambda \in \sigma(A)$, dove con $\sigma(A)$ indichiamo lo spettro di A , e sia $\underline{x}$ un suo autovettore tale che $\|\underline{x}\| = 1$. Per definizione di autovettore abbiamo: $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.

Siano $\underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ vettori tali che

$$X = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \underline{x} & \underline{x}_2 & \dots & \underline{x}_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

risulti unitaria, ossia: $XX^* = X^*X = I$.

Il prodotto AX è una matrice del tipo:

$$AX = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ A\underline{x} & A\underline{x}_2 & \dots & A\underline{x}_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda\underline{x} & A\underline{x}_2 & \dots & A\underline{x}_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

Allora:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda & | & \dots & | \\ \underline{0} & X^{-1}A\underline{x}_2 & \dots & X^{-1}A\underline{x}_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \underline{c}^* \\ \underline{0} & B \end{bmatrix}$$

con $B \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ e $\underline{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Per ipotesi induttiva sappiamo che $\exists \tilde{U}$ unitaria tale che $\tilde{U}^*B\tilde{U} = \tilde{T}$, con $\tilde{T}$ triangolare superiore di ordine $n - 1$.

Moltiplichiamo $X^{-1}AX$ a destra e a sinistra rispettivamente per le matrici

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \tilde{U} \end{bmatrix} \text{ e } U^* = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \tilde{U}^* \end{bmatrix}, \text{ entrambe unitarie.}$$

Perciò abbiamo:

$$U^*X^{-1}AXU = U^*X^*AXU = P^*AP$$

dove $P = XU$ è unitaria poiché è prodotto di matrici unitarie.

La matrice $T = P^*AP$ è triangolare, infatti svolgendo i prodotti otteniamo:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tilde{U}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \underline{\underline{c}}^* \\ \underline{0} & \underline{\tilde{U}}\tilde{T}\underline{\tilde{U}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tilde{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \underline{\underline{c}}^* \\ \underline{0} & \underline{\tilde{T}}\underline{\tilde{U}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tilde{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \underline{\underline{c}}^*\underline{\tilde{U}} \\ \underline{0} & \underline{\tilde{T}} \end{bmatrix}$$

□

Vediamo ora dei risultati che seguono dal teorema di Schur.

Corollario 1.1 Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è normale allora la matrice T del teorema di Schur è diagonale.

Dimostrazione. Procediamo nuovamente per induzione sulla dimensione n della matrice A .

Per $n = 1$ abbiamo: $A = a$ dove a è un numero complesso e $U = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice T del teorema di Schur è quindi $T = a$ ed è, perciò, diagonale.

Supponiamo che il corollario valga per $n - 1$ e mostriamolo per n . Per il teorema di Schur sappiamo che A è simile ad una matrice triangolare superiore tramite trasformazione unitaria. Sia T tale matrice, mostriamo che è diagonale.

Sia U la matrice unitaria della trasformazione, allora sappiamo che $T = U^*AU$. Ora:

$$TT^* = U^*AUU^*A^*U$$

Poiché U è unitaria e A è normale valgono le seguenti relazioni:

$$UU^* = U^*U = I, \quad AA^* = A^*A$$

Allora possiamo scrivere:

$$TT^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U = U^*A^*AU = U^*A^*UU^*AU = T^*T$$

perciò anche T è normale.

Ora T e T^* sono della forma:

$$T = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & \underline{\underline{t}}^* \\ \hline 0 & \underline{\tilde{T}} \end{array} \right), \quad T^* = \left(\begin{array}{c|c} \bar{t}_{11} & 0 \\ \hline \underline{\underline{t}} & \underline{\tilde{T}}^* \end{array} \right)$$

con $\tilde{T}$ triangolare superiore di ordne $n - 1$.

Vediamo ora che forma hanno le matrici TT^* e T^*T :

$$TT^* = \left(\begin{array}{c|c} t_{11}\bar{t}_{11} + \underline{\underline{t}}^*\underline{\underline{t}} & \underline{\underline{t}}^*\underline{\tilde{T}}^* \\ \hline \underline{\tilde{T}}\underline{\underline{t}} & \underline{\tilde{T}}\underline{\tilde{T}}^* \end{array} \right), \quad T^*T = \left(\begin{array}{c|c} t_{11}\bar{t}_{11} & t_{11}\underline{\underline{t}}^* \\ \hline \underline{\underline{t}}\underline{\underline{t}}^* + \underline{\tilde{T}}^*\underline{\tilde{T}} & \end{array} \right)$$

Le uguagliamo e otteniamo le seguenti relazioni:

$$\underline{t}^* \underline{t} = 0 \quad (1.4)$$

$$\widetilde{T} \widetilde{T}^* = \widetilde{T}^* \widetilde{T} + \underline{t} \underline{t}^* \quad (1.5)$$

Dalla (1.4) segue che $\underline{t} = 0$; questa identità e la (1.5) implicano che $\widetilde{T}$ è normale.

Ora $\widetilde{T} \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{C})$ è normale e triangolare e per ipotesi induttiva risulta diagonale. Perciò T è diagonale:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & \widetilde{T} \end{bmatrix}$$

□

Corollario 1.2 Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è hermitiana allora la matrice triangolare T del teorema di Schur è anch'essa hermitiana. T quindi è diagonale con elementi t_{ii} reali $\forall i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Essendo A una matrice hermitiana quindi normale, dal corollario 1.1 segue che la matrice T è diagonale. Mostriamo ora che è hermitiana. Sia quindi $T = U^* A U$, allora:

$$T^* = (U^* A U)^* = U^* A^* U = U^* A U = T$$

T è quindi hermitiana e, in particolare, i suoi elementi diagonali t_i sono tali che $t_i = \overline{t_i} \forall i = 1 \dots n$, ossia sono reali.

□

Riportiamo un ultimo teorema per la caratterizzazione delle matrici normali:

Teorema 1.4 $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è normale se e solo se è diagonalizzabile da una matrice unitaria.

Ricordiamo che una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile se è simile a una matrice $D \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ diagonale.

Dimostrazione. Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è normale allora la tesi segue dal corollario 1.1.

Viceversa. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ diagonalizzabile da una matrice unitaria U ossia $A = U D U^*$. Mostriamo che è normale:

$$A A^* = U D U^* U D^* U^* = U D D^* U^* = U D^* D U^* = U D^* U^* U D U^* = A^* A$$

□

1.3 Norme vettoriali e matriciali

In questa sezione introduciamo i concetti di norma vettoriale e di norma matriciale ai quali ricorreremo trattando gli argomenti del prossimo capitolo.

1.3.1 Norme vettoriali

Definizione 1.10 Si definisce *norma vettoriale* l'applicazione

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

1. $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ e $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$
2. $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$
3. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ (*Disuguaglianza triangolare*)

Esempio 1.1 Vediamo alcuni esempi di norme vettoriali:

1. *Norma-1*

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2. *Norma-2 (Norma euclidea)*

$$\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = (\underline{x}^* \underline{x})^{1/2} = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle^{1/2}$$

3. *Norma-p*

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

per $1 \leq p < \infty$

4. *Norma- ∞ (Norma del massimo)*

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Ricordiamo la definizione di *prodotto scalare* in $\mathbb{C}$ necessaria per presentare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*.

Definizione 1.11 Si definisce *prodotto scalare* una applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che

1. $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{C}^n$ e $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$
2. $\langle \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}, \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \beta \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
3. $\langle \underline{u}, \beta \underline{v} + \gamma \underline{w} \rangle = \overline{\beta} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \overline{\gamma} \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n, \forall \beta, \gamma \in \mathbb{C}$
4. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \overline{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle} \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{C}^n$

Il prodotto scalare definito su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{R}$ è anche detto *prodotto scalare euclideo* ed è così definito:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{y}^* \underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

Possiamo ora enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

Proposizione 1.1 (*Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*)

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2 \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

1.3.2 Norme matriciali

D'ora in poi utilizzeremo lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ per indicare sia la norma vettoriale sia la norma matriciale.

Definizione 1.12 Si definisce *norma matriciale* l'applicazione $\|\cdot\| : M_{n,n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e $\|A\| = 0 \iff A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$

$$4. \|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \forall A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$$

Nota: Intendendo lo spazio $M_{n,n}(\mathbb{C})$ come $M_{n^2,1}(\mathbb{C})$, cioè come uno spazio di vettori $n^2 \times 1$, le matrici possono essere interpretate come vettori e quindi sembrerebbe che possano essere misurate con norme vettoriali. Ma la proprietà 4 non è soddisfatta dalle norme vettoriali. Consideriamo, per esempio,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e la norma vettoriale $\|C\| := \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}|$ che soddisfa le proprietà 1, 2 e 3. Allora la matrice risultante dal prodotto è

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e le norme valgono

$$\|A\| = 1, \quad \|B\| = 1, \quad \|AB\| = 2$$

perciò $2 = \|AB\| \geq \|A\|\|B\| = 1$.

Definizione 1.13 Una *norma matriciale indotta* da una norma vettoriale è così definita:

$$\|A\| = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \left\| A \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Osservazione 1.6 Una caratteristica delle norme matriciali indotte da norme vettoriali è che $\|I\| = 1$.

Esempio 1.2 Di seguito riportiamo delle espressioni alternative di alcune norme matriciali indotte:

1. *Norma-1*

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

2. *Norma-2*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

dove con $\rho(M)$ indichiamo il *raggio spettrale* di $M \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, cioè $\rho(M) = \max_i |\lambda_i(M)|$.

3. Norma- ∞

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Per la dimostrazione di queste espressioni vedi [3].

Osserviamo che $\|A\|_1 = \|A^T\|_{\infty}$ e se A è hermitiana allora $\|A\|_1 = \|A\|_{\infty}$.

Una norma matriciale che sarà fondamentale per lo studio di limitazioni per lo *spread* di matrici è la *norma di Frobenius*:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (1.6)$$

A differenza delle precedenti, non è indotta da nessuna norma vettoriale. Infatti, $\|I\|_F = \sqrt{n} > 1$ (per $n \geq 2$).

La norma di Frobenius può essere tuttavia espressa come segue:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} \quad (1.7)$$

Ricordando la definizione dei valori singolari σ_i di A e che la traccia di una matrice è pari alla somma dei suoi autovalori otteniamo anche:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \quad (1.8)$$

Osservazione 1.7 Sia $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una matrice unitaria e $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una generica matrice. Allora valgono le seguenti identità:

$$\|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|A\|_2 \quad (1.9)$$

$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F \quad (1.10)$$

cioè, le norme matriciali -2 e di Frobenius sono invarianti per trasformazioni unitarie.

Proposizione 1.2 Sia $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una matrice unitaria. Allora

$$\|R_k(U)\|_2 = 1, \quad \|C_k(U)\|_2 = 1$$

dove con $R_k(U)$ e $C_k(U)$ indichiamo rispettivamente la k -esima riga e la k -esima colonna di U .

Dimostrazione. Sia U unitaria, sappiamo che $U^*U = I$.
Partizioniamo U per colonne:

$$U = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \dots & \underline{u}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Allora:

$$U^* = \begin{bmatrix} - & \underline{u}_1^* & - \\ - & \underline{u}_2^* & - \\ & \vdots & \\ - & \underline{u}_n^* & - \end{bmatrix}$$

Poiché vale $U^*U = I$, il generico elemento $(U^*U)_{i,j}$ sarà:

$$(U^*U)_{i,j} = \underline{u}_i^* \underline{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Da questo segue che per ogni colonna di U si ha $\|C_k(U)\|_2 = 1$.

Analogamente, partizionando U per righe, si dimostra che $\|R_k(U)\|_2 = 1$ (usare l'identità $UU^* = I$).

□

Capitolo 2

Il diametro dello spettro di matrici

Alcune prime applicazioni del Teorema di Schur sono legate alle limitazioni del diametro dello spettro di una matrice.

Assumeremo per tutto il capitolo che $n \geq 3$ e lavoreremo con matrici quadrate con elementi complessi.

2.1 Definizione di *spread* di una matrice

Definizione 2.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A . Si definisce *spread* della matrice A la quantità

$$Sp(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme discreto è la massima distanza tra due suoi punti. Possiamo, perciò, affermare che $Sp(A)$ è proprio il diametro dello spettro $\sigma(A)$ della matrice A .

Notiamo che lo spread di una matrice è sempre maggiore o uguale a zero ed è uguale a zero se e soltanto se la matrice A ha autovalori tutti uguali tra loro. Se A è un multiplo $\alpha \in \mathbb{C}$ della matrice identità I oppure, più in generale, è triangolare con α sulla diagonale allora $Sp(A) = 0$, in quanto $\lambda_i(A) = \alpha \forall i = 1, \dots, n$.

Osservazione 2.1 Lo spread di una matrice è invariante per traslazioni. In altre parole, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A ; allora gli autovalori della

matrice $A - \alpha I$ sono della forma $\lambda_i - \alpha \forall i = 1, \dots, n$. Quindi:

$$Sp(A - \alpha I) = \max_{i,j} |(\lambda_i - \alpha) - (\lambda_j - \alpha)| = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A)$$

Lo spread di una matrice venne introdotto da L. Mirsky che ne diede un upper bound:

$$Sp^2(A) \leq 2 \left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n} |tr A|^2 \right) \quad (2.1)$$

E. Deutsch ottenne il seguente risultato:

$$Sp(A) \leq 2 \sqrt[t]{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\|R_k(A - \xi I)\|_1)^t} \quad (2.2)$$

dove $t \geq 1$, $\xi \in \mathbb{C}$, e con $R_k(A - \xi I)$ indichiamo la k -esima riga della matrice $A - \xi I$.

Corollario 2.1

$$Sp(A) \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Segue dalla (2.2) prendendo $\xi = 0$ e $t = 1$.

Infatti, possiamo notare che il secondo membro nella disuguaglianza (2.3) è proprio $\sum_{k=1}^n \|R_k(A)\|_1$. □

Nel caso particolare di matrici hermitiane, R. J. Barnes e A. J. Hoffman ottennero una limitazione inferiore per lo spread di matrici, che riportiamo:

$$\frac{2}{n} \left(2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n} (tr A)^2 \right) \leq Sp^2(A) \quad (2.4)$$

Definizione 2.2 Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Definiamo:

1. $Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |Re(\lambda_i) - Re(\lambda_j)|$
2. $Sp_{Im}(A) = \max_{i,j} |Im(\lambda_i) - Im(\lambda_j)|$

Proposizione 2.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ una matrice normale, allora:

$$Sp_{Re}(A) = Sp\left(\frac{A + A^*}{2}\right) \quad (2.5)$$

$$Sp_{Im}(A) = Sp\left(\frac{A - A^*}{2i}\right) \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Dal Teorema di Schur sappiamo che $\exists U$ matrice unitaria tale che $A = UDU^*$ con D matrice diagonale per l'ipotesi di normalità della matrice A . Inoltre, ogni matrice può essere decomposta nella sua parte hermitiana e nella sua parte antihermitiana. Di conseguenza abbiamo:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{A + A^*}{2} \right) + \left(\frac{A - A^*}{2} \right) \\ &= \left(\frac{UDU^* + UD^*U^*}{2} \right) + \left(\frac{UDU^* - UD^*U^*}{2} \right) \\ &= \frac{U(D + D^*)U^*}{2} + \frac{U(D - D^*)U^*}{2} \end{aligned}$$

Ora D e D^* contengono sulla diagonale rispettivamente gli autovalori λ_i e i loro coniugati $\bar{\lambda}_i$, perciò $\frac{D+D^*}{2}$, che risulta ancora una matrice diagonale, conterrà sulla diagonale la parte reale di ciascun autovalore di A e, similmente, $\frac{D-D^*}{2}$ conterrà la parte immaginaria di tali autovalori moltiplicati per l'unità immaginaria i , cioè:

$$\begin{aligned} \frac{D + D^*}{2} &= \text{diag} \left[\text{Re}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] \\ \frac{D - D^*}{2} &= \text{diag} \left[i \text{Im}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] \end{aligned}$$

Allora, sostituendo otteniamo:

$$= U \text{diag} \left[\text{Re}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] U^* + U \text{diag} \left[i \text{Im}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] U^*$$

Abbiamo perciò mostrato che $\frac{A+A^*}{2}$ e $\frac{A-A^*}{2}$ sono legate rispettivamente a $\frac{D+D^*}{2}$ e $\frac{D-D^*}{2}$ da una trasformazione per similitudine unitaria:

1. $\left(\frac{A+A^*}{2} \right) = U \text{diag} \left[\text{Re}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] U^*$
2. $\left(\frac{A-A^*}{2} \right) = U \text{diag} \left[i \text{Im}(\lambda_k)_{k=1, \dots, n} \right] U^*$

Da questo segue che gli autovalori di $\frac{A+A^*}{2}$ sono uguali a $\text{Re}(\lambda_k) \forall k = 1, \dots, n$ e, analogamente, gli autovalori di $\frac{A-A^*}{2i}$ sono uguali a $\text{Im}(\lambda_k) \forall k = 1, \dots, n$. Ricordando la definizione 2.2 concludiamo quindi che

$$Sp_{\text{Re}}(A) = Sp \left(\frac{A + A^*}{2} \right)$$

e

$$Sp_{\text{Im}}(A) = Sp \left(\frac{A - A^*}{2i} \right)$$

□

Osservazione 2.2 Si può mostrare facilmente che

$$Sp_{Im}(A) = Sp\left(\frac{A - A^*}{2i}\right) = Sp\left(\frac{A - A^*}{2}\right)$$

Osservazione 2.3 Se la matrice unitaria che diagonalizza A è reale allora valgono le seguenti identità:

1. $Sp_{Re}(A) = Sp(Re(A))$
2. $Sp_{Im}(A) = Sp(Im(A))$

dove con $Re(A)$ e $Im(A)$ denotiamo le matrici i cui elementi sono rispettivamente le parti reali e le parti immaginarie degli elementi di A .

Enunciamo ora un teorema che presenta contemporaneamente una maggiorazione e una minorazione dello spread di una generica matrice quadrata A a valori complessi.

Teorema 2.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, allora

$$\max\{Sp_{Re}(A), Sp_{Im}(A)\} \leq Sp(A) \leq \sqrt{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)} \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Mostriamo la prima maggiorazione:

$$Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |Re(\lambda_i) - Re(\lambda_j)| = \max_{i,j} |Re(\lambda_i - \lambda_j)| \leq \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A)$$

Analogamente si procede con $Sp_{Im}(A)$.

La seconda maggiorazione segue osservando che

$$Sp^2(A) \leq \max_{i,j} (Re(\lambda_i - \lambda_j))^2 + \max_{i,j} (Im(\lambda_i - \lambda_j))^2 = Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)$$

□

2.2 Caratterizzazioni e nuove limitazioni per il diametro dello spettro di una matrice

2.2.1 Caso di matrici generiche

In questa sezione mostreremo delle nuove limitazioni per lo spread di una matrice, alcune delle quali andranno a migliorare i bound introdotti precedentemente.

Teorema 2.2 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Allora

$$Sp(A) \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \|C_i(A - \xi I)\|_2, \sum_{i=1}^n \|R_i(A - \xi I)\|_2 \right\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C} \quad (2.8)$$

dove con $R_i(A - \xi I)$ e $C_i(A - \xi I)$ indichiamo rispettivamente l' i -esima riga e l' i -esima colonna della matrice $A - \xi I$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$Sp(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Consideriamo la decomposizione ai valori singolari di A , ossia $A = U\Sigma V^*$, dove U e V sono matrici unitarie e Σ è una matrice diagonale con elementi diagonali σ_i reali e non negativi $\forall i = 1, \dots, n$. Sappiamo che $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i = tr\Sigma$ (vedi [1, p. 560], [2, p. 42], [9, p. 19], [6, p. 176]). D'altra parte, considerando la matrice $S = VU^*$ (che è unitaria in quanto prodotto di unitarie), osserviamo che le matrici Σ , SA e AS sono tutte simili tra loro, perciò:

$$tr\Sigma = tr(U^*AV) = tr(SA) = tr(AS)$$

Allora, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e ricordando che la norma euclidea di ogni riga e colonna di una matrice unitaria è pari a 1, otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq tr(SA) = \sum_{k=1}^n \langle R_k(S), C_k(A) \rangle \leq \sum_{k=1}^n \|R_k(S)\|_2 \|C_k(A)\|_2 = \sum_{k=1}^n \|C_k(A)\|_2$$

dove con $R_k(A)$ e $C_k(A)$ indichiamo rispettivamente la k -esima riga e la k -esima colonna della matrice A .

Analogamente, utilizzando questa volta $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq tr(AS)$ otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{k=1}^n \|R_k(A)\|_2$$

Dal momento che $Sp(A)$ è invariante per traslazioni, concludiamo che

$$Sp(A) = Sp(A - \xi I) \leq \left\{ \sum_{i=1}^n \|C_i(A - \xi I)\|_2, \sum_{i=1}^n \|R_i(A - \xi I)\|_2 \right\}$$

□

Osservazione 2.4 La disuguaglianza (2.8) fornisce una stima migliore sia della (2.3) sia della (2.2) per $t = 1$ e per $\xi \in \mathbb{C}$ generico, per la presenza della norma euclidea.

Esempio 2.1 Consideriamo la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 101 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Utilizzando la (2.3) otteniamo $Sp(A) \leq 110$.
2. Utilizzando la (2.2) con $t = 1$ e $\xi = 2$ otteniamo $Sp(A) \leq 104$.
3. Utilizzando la (2.8) con $\xi = 2$ otteniamo $Sp(A) \leq 101.42$.

Effettivamente abbiamo $Sp(B) \approx 100.01$.

La disuguaglianza introdotta nel Teorema 2.1 può essere generalizzata con due teoremi che enuncieremo di seguito. Per mostrarli è necessario il seguente lemma preliminare:

Lemma 2.1 Siano i numeri a, b e α tali che $a, b \geq 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Valgono le seguenti disuguaglianze:

1. $(\alpha a^r + (1 - \alpha)b^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\alpha a^s + (1 - \alpha)b^s)^{\frac{1}{s}}$ per $0 < r \leq s$.
2. $(a^s + b^s)^{\frac{1}{s}} \leq (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}$ per $0 < r \leq s$.

Teorema 2.3 Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e $q \geq 2$.

Allora

$$Sp^q(A) \leq 2^{\frac{q}{2}-1} (Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)) \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.1 sappiamo che $Sp(A) \leq \sqrt{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}$. Dividiamo entrambi i membri per $\sqrt{2}$ e otteniamo:

$$\frac{Sp(A)}{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Utilizziamo la 1. del Lemma 2.1. e otteniamo:

$$\frac{Sp(A)}{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Possiamo quindi concludere:

$$Sp^q(A) \leq 2^{\frac{q}{2}-1}(Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A))$$

□

Teorema 2.4 Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e $0 < q \leq 2$. Allora

$$Sp^q(A) \leq Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A) \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Similmente alla dimostrazione precedente, consideriamo la disuguaglianza del Teorema 2.1 e il secondo risultato del Lemma 2.1 e otteniamo:

$$Sp(A) \leq \left(Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ossia

$$Sp^q(A) \leq Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)$$

□

Enunciamo ora un lemma che ci sarà utile per le dimostrazioni successive e che mette in luce la relazione tra gli autovalori di una matrice e la sua norma di Frobenius.

Lemma 2.2 Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Allora

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2 \quad (2.11)$$

Inoltre se A è normale vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. Mostriamo la relazione utilizzando il Teorema di Schur:

$$\|A\|_F^2 = \|UTU^*\|_F^2 = \|UT\|_F^2 = \|T\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2 + \sum_{i < j} |t_{ij}|^2$$

Ricordando che gli elementi diagonali t_{ii} sono proprio gli autovalori λ_i di $A \forall i = 1, \dots, n$, otteniamo:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \sum_{i < j} |t_{ij}|^2$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2$$

Inoltre, se A è normale si ha l'uguaglianza poiché la matrice T è diagonale ($\sum_{i < j}^n |t_{ij}|^2 = 0$). □

Presentiamo ora due dimostrazioni alternative dell'upper bound di Mirsky, una delle quali utilizza il Lemma 2.2.

Teorema 2.5 *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Allora*

$$Sp^2(A) \leq 2 \left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n} |tr A|^2 \right) \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Vediamo la prima.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A e supponiamo che $0 < Sp(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|$. Allora $i_0 \neq j_0$ e

$$Sp^2(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|^2 \leq (|\lambda_{i_0}| + |\lambda_{j_0}|)^2 \leq 2(|\lambda_{i_0}|^2 + |\lambda_{j_0}|^2) \leq 2 \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq 2\|A\|_F^2$$

Dal momento che lo spread di matrici è invariante per traslazioni, possiamo concludere:

$$Sp^2(A) = Sp^2\left(A - \frac{tr A}{n} I\right) \leq 2 \left\| A - \frac{tr A}{n} I \right\|_F^2$$

Con semplici passaggi algebrici otteniamo che

$$\left\| A - \frac{tr A}{n} I \right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{1}{n} |tr A|^2$$

Allora

$$Sp^2(A) \leq 2 \left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n} |tr A|^2 \right)$$

Vediamo la seconda dimostrazione.

Siano λ_i e α_i rispettivamente gli autovalori di A e $B \forall i = 1, \dots, n$. Definiamo i seguenti vettori colonna:

$$\underline{u} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)^T \quad \underline{v} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)^T \quad \underline{w} = (\alpha_n, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1)^T$$

Senza perdita di generalità, assumiamo che $Sp(A) = |\lambda_1 - \lambda_n|$ e $Sp(B) = |\alpha_1 - \alpha_n|$ e consideriamo i seguenti prodotti scalari:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda_1 \alpha_1^* + \lambda_2 \alpha_2^* + \dots + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^* + \lambda_n \alpha_n^*$$

e

$$\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle = \lambda_1 \alpha_n^* + \lambda_2 \alpha_2^* + \dots + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^* + \lambda_n \alpha_1^*$$

Osserviamo che $\|\underline{v}\|_2 = \|\underline{w}\|_2$. Inoltre

$$\frac{1}{2} |\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle| \leq \max\{|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|, |\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle|\}$$

e osserviamo che $Sp(A)Sp(B) = |\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle|$.

Applichiamo ora la disuguaglianza di Cauchy:

$$Sp(A)Sp(B) = |\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle| \leq 2\|\underline{u}\|_2\|\underline{v}\|_2 = 2\sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} \leq 2\|A\|_F\|B\|_F$$

La tesi segue ponendo $A = B$ e concludendo come nella prima dimostrazione tramite la proprietà di invarianza sotto traslazione dello spread.

□

2.2.2 Caso di matrici normali

Analizziamo ora lo spread nel caso particolare di matrici normali.

Prima di procedere, introduciamo il seguente teorema valido per generiche matrici.

Teorema 2.6 *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Allora*

$$1. \quad Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA).$$

$$2. \quad Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Im}(zA).$$

Dimostrazione. Mostriamo la prima identità, per la seconda si procede analogamente.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A .

$$\max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA) = \max_{|z|=1} \max_{j,k} |Re[z(\lambda_j - \lambda_k)]| = \max_{j,k} \max_{|z|=1} |Re[z(\lambda_j - \lambda_k)]|$$

Cerchiamo z_0 che realizza il primo massimo.

Essendo λ_j e λ_k in $\mathbb{C}$ allora $\lambda_j - \lambda_k \in \mathbb{C}$ e tale differenza può essere rappresentata nella forma polare $\lambda_j - \lambda_k = \rho_{jk} e^{i\theta_{jk}}$ con $\rho_{jk} = |\lambda_j - \lambda_k|$ e θ_{jk}

l'argomento di $\lambda_j - \lambda_k$.

Scelgo z_0 tale che abbia $|z_0| = 1$ e che realizzi il massimo. Se prendiamo

$$z_0 = e^{-i\theta_{jk}}$$

si ha che

$$z_0(\lambda_j - \lambda_k) = \rho_{jk} e^{i\theta_{jk}} e^{-i\theta_{jk}} = \rho_{jk} = |\lambda_j - \lambda_k|$$

Mostriamo ora che realizza il massimo:

$$|Re[z(\lambda_j - \lambda_k)]| \leq |z(\lambda_j - \lambda_k)| = |\lambda_j - \lambda_k| = |Re[z_0(\lambda_j - \lambda_k)]|$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$.

Allora

$$\max_{j,k} \max_{|z|=1} |Re[z(\lambda_j - \lambda_k)]| = \max_{j,k} |Re[z_0(\lambda_j - \lambda_k)]| = \max_{j,k} |\lambda_j - \lambda_k| = Sp(A)$$

Segue quindi la tesi $Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA)$.

□

Quando la matrice A è normale il risultato precedente può essere specificato come segue.

Teorema 2.7 *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale e sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$. Allora*

1. $Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right).$
2. $Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA - \bar{z}A^*}{2i}\right).$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.6 abbiamo che $Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA)$.

Inoltre, per la Proposizione 2.1 $Sp_{Re}(zA) = Sp\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right).$

Allora, sostituendo otteniamo:

$$Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right)$$

Si procede analogamente per mostrare che $Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA - \bar{z}A^*}{2i}\right).$

□

Riportiamo ora dei risultati che forniscono delle limitazioni inferiori per lo spread di matrici normali, la cui dimostrazione richiede l'applicazione del Teorema 2.7 appena enunciato.

Teorema 2.8 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale e sia $A = H + iK$ la sua decomposizione cartesiana cioè $H = \frac{A+A^*}{2}$ e $K = \frac{A-A^*}{2i}$. Allora

$$Sp(A) = \max_{\alpha^2+\beta^2=1} Sp(\alpha H + \beta K) \quad (2.13)$$

In particolare

1. $\frac{1}{2}Sp(A + A^*) \leq Sp(A)$.
2. $\frac{1}{2}Sp(A - A^*) \leq Sp(A)$.
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}Sp\left(\frac{(1-i)A+(1+i)A^*}{2}\right) \leq Sp(A)$.

Dimostrazione. Dal Teorema 2.7 risulta

$$Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right)$$

D'altra parte, scrivendo $z = \cos \theta + i \sin \theta$, con semplici passaggi algebrici troviamo

$$\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} = (\cos \theta)H - (\sin \theta)K$$

Infine, ponendo $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = -\sin \theta$ otteniamo

$$Sp(A) = \max_{\alpha^2+\beta^2=1} Sp(\alpha H + \beta K)$$

Notiamo che

$$Sp(A) = \max_{\alpha^2+\beta^2=1} Sp(\alpha H + \beta K) \geq Sp(\alpha H + \beta K) \quad \forall \alpha, \beta : \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Allora, con particolari scelte di α e β mostriamo i tre lower bound:

1. per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ si mostra la 1;
2. per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si mostra la 2;
3. per $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si mostra la 3.

□

Teorema 2.9 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale e sia $A = H + iK$ la sua decomposizione cartesiana. Allora

$$Sp(A) \leq \sqrt{2(\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2)} \quad (2.14)$$

Dimostrazione. Per l'identità nel Teorema 2.8 abbiamo

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} Sp(\alpha H + \beta K) \\ &\leq \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{2} \|\alpha H + \beta K\|_F \\ &\leq \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{2} (|\alpha| \|H\|_F + |\beta| \|K\|_F) \end{aligned}$$

Presi i vettori

$$\begin{pmatrix} |\alpha| \\ |\beta| \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \|H\|_F \\ \|K\|_F \end{pmatrix}$$

osserviamo che $|\alpha| \|H\|_F + |\beta| \|K\|_F$ ne è il prodotto scalare.

Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo:

$$\max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{2} (|\alpha| \|H\|_F + |\beta| \|K\|_F) \leq \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{2} \left(\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \sqrt{\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2} \right)$$

Essendo $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, il secondo membro è pari a $\sqrt{2} \sqrt{\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2}$.

Segue quindi

$$Sp(A) \leq \sqrt{2(\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2)}$$

□

Concludiamo questo paragrafo con un teorema che fornisce una stima più fine dello spread introdotta da Mirsky nel caso di matrici normali.

Teorema 2.10 *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale. Allora*

$$Sp(A) \leq \sqrt{\|A\|_F^2 + |tr(A^2)|} - \frac{2}{n} |tr A|^2 \quad (2.15)$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.7 abbiamo che

$$Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right)$$

Passiamo ai quadrati e maggioriamo con l'upper bound di Mirsky in (2.12):

$$\begin{aligned} Sp^2(A) &= \max_{|z|=1} Sp^2\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right) \\ &\leq \max_{|z|=1} \left[2 \left\| \frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right\|_F^2 - \frac{2}{n} \left| tr\left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2}\right) \right|^2 \right] \\ &= \max_{|z|=1} \left[\frac{1}{2} tr[(zA + \bar{z}A^*)(\bar{z}A^* + zA)] - \frac{2}{n} |Re(tr zA)|^2 \right] \\ &= \max_{|z|=1} \left[\|A\|_F^2 + Re(z^2 tr(A^2)) - \frac{2}{n} |tr A|^2 \right] \end{aligned}$$

(si lasciano al lettore i calcoli per ottenere l'ultima uguaglianza).

Con un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione del Teorema 2.6, abbiamo che $tr(A^2) = |tr(A^2)|e^{i\theta_{tr(A^2)}}$ e possiamo, quindi, prendere $z_0^2 = e^{-i\theta_{tr(A^2)}}$ in modo tale che realizzi il massimo. Per tale valore abbiamo:

$$\max_{|z|=1} \left[\|A\|_F^2 + Re(z^2 tr(A^2)) - \frac{2}{n} |tr A|^2 \right] \leq \|A\|_F^2 + |tr(A^2)| - \frac{2}{n} |tr A|^2$$

Segue la tesi

$$Sp(A) \leq \sqrt{\|A\|_F^2 + |tr(A^2)| - \frac{2}{n} |tr A|^2}$$

□

Osservazione 2.5 Possiamo affermare che la (2.15) migliora l'upper bound di Mirsky in quanto

$$|tr(A^2)| \leq \|A\|_F^2 \quad (2.16)$$

Dimostrazione. Per mostrare la (2.16) osserviamo che gli autovalori di A^2 sono $\lambda_i^2(A) \forall i = 1, \dots, n$, perciò:

$$|tr(A^2)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(A) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i^2(A)| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(A)|^2$$

Ricordiamo che vale

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2$$

Possiamo, perciò, concludere che

$$|tr(A^2)| \leq \|A\|_F^2$$

□

Alternativamente possiamo mostrare la (2.16) utilizzando le definizioni di traccia e di norma di Frobenius:

Dimostrazione. Sappiamo che $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$. Utilizziamo la definizione di traccia:

$$|tr(A^2)| = \left| \sum_{i=1}^n (A^2)_{ii} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |a_{ki}| = \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}| |a_{ki}|$$

Osserviamo che per due generici indici r e s vale

$$|a_{rs}|^2 + |a_{sr}|^2 \geq |a_{rs}a_{sr}| + |a_{sr}a_{rs}| = 2|a_{rs}a_{sr}|$$

Da questo segue

$$\begin{aligned} |tr(A^2)| &\leq \sum_{i,k=1}^n |a_{ik}||a_{ki}| = \sum_{i=k} |a_{ik}||a_{ki}| + \sum_{i < k} |a_{ik}||a_{ki}| + \sum_{i > k} |a_{ik}||a_{ki}| \\ &\leq \sum_{i=k} |a_{ik}||a_{ki}| + \sum_{i < k} \frac{1}{2}(|a_{ik}|^2 + |a_{ki}|^2) + \sum_{i > k} \frac{1}{2}(|a_{ik}|^2 + |a_{ki}|^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \|A\|_F^2 \end{aligned}$$

□

Riportiamo ora un corollario del Teorema 2.10.

Corollario 2.2 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale. Allora

$$Sp^2(A) \leq \|A\|_F^2 + |tr(A^2)| \quad (2.17)$$

Inoltre, se A è tale che $A^2 = 0$ allora

$$Sp^2(A) \leq \|A\|_F^2 \quad (2.18)$$

Concludiamo questa sezione considerando una dimostrazione alternativa, ma incompleta, della limitazione superiore di Deutsch nel caso $t = 1$ e $\xi = 0$ espresso tramite gli elementi della matrice considerata.

Teorema 2.11 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Allora

$$Sp(A) \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.19)$$

Dimostrazione. (“quasi” completa, in quanto rimane escluso dalla trattazione un caso). Consideriamo $\lambda, \mu \in \sigma(A)$. Supponiamo $\lambda \in K_i$ con K_i i -esimo cerchio di Gerschgorin e i indice tale che $|x_i| = \|x\|_\infty$ con $Ax = \lambda x$; similmente, supponiamo $\mu \in K_j$ con K_j j -esimo cerchio di Gerschgorin e j indice tale che $|y_j| = \|y\|_\infty$ con $Ay = \mu y$. Sappiamo che

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}|, \quad |\mu - a_{jj}| \leq \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}|$$

Consideriamo il modulo della differenza tra i due autovalori λ e μ di A . Se dimostriamo che $|\lambda - \mu| \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ avremo come conseguenza la (2.19).

$$\begin{aligned}
 |\lambda - \mu| &= |\lambda - a_{ii} + a_{ii} - a_{jj} + a_{jj} - \mu| \leq |\lambda - a_{ii}| + |a_{jj} - \mu| + |a_{ii} - a_{jj}| \\
 &\leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{ik}| + \sum_{k=1, k \neq j}^n |a_{jk}| + |a_{ii} - a_{jj}| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| + \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \leq \sum_{l,k=1}^n |a_{lk}|
 \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è valida se $i \neq j$.

Rimane da mostrare la (2.19) nel caso in cui i due indici i e j coincidono. □

Nota: Quest'ultima dimostrazione evidenzia il seguente problema: se $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ sono tali che $|\lambda - \mu| = Sp(A)$ può accadere che gli indici i e j definiti nella dimostrazione devono necessariamente coincidere? Cioè, può accadere che $|x_k| < |x_i|$, $\forall k \neq i$, e $|y_k| < |y_i|$, $\forall k \neq i$? Quando accade, la matrice A ha qualche proprietà particolare?

Capitolo 3

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Dal Teorema di Schur sappiamo che ogni matrice A è simile tramite una trasformazione unitaria Q ad una matrice T triangolare superiore, cioè

$$Q^*AQ = T$$

Ovviamente esiste R invertibile tale che $R^{-1}TR = J$, dove J è la forma canonica di Jordan di T e quindi di A . Dagli studi presenti in questo capitolo si dedurrà che, se Q è scelta in modo opportuno, tale R è triangolare e facilmente calcolabile. Questa affermazione è dimostrata rigorosamente in una ampia classe di casi.

Prima di procedere, ricordiamo che, data $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, per ogni autovalore $\lambda \in \sigma(A)$ è possibile trovare $q_\lambda \leq n$, una matrice $X_\lambda \in M_{n,q_\lambda}(\mathbb{C})$ di rango q_λ e una matrice J_λ di ordine $q_\lambda \times q_\lambda$ del tipo

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tali che

$$AX_\lambda = X_\lambda J_\lambda$$

Inoltre, allo stesso λ possono corrispondere più terne q_λ , X_λ e J_λ con tali proprietà e con le X_λ tra di loro indipendenti e, precisamente, tante quant'è la molteplicità geometrica di λ .

Come conseguenza vale il seguente teorema:

Teorema di Jordan Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $\exists X$ matrice invertibile tale che

$$X^{-1}AX = J$$

dove J è la matrice della forma canonica di Jordan di A diagonale a blocchi, con blocchi diagonali J_λ , relativi allo stesso autovalore λ e al variare di $\lambda \in \sigma(A)$, e X è ottenuta mettendo insieme le X_λ per lo stesso λ e poi facendo variare λ in $\sigma(A)$. J è unica a meno di ordinamento dei blocchi.

Dalla forma canonica di Jordan si può facilmente ricavare la decomposizione di Schur, come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 3.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e sia J la sua forma canonica di Jordan. Allora $\exists Q \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ unitaria e $R \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ matrice triangolare superiore invertibile tali che

$$Q^*AQ = RJR^{-1} =: T$$

dove T è una matrice triangolare superiore.

Inoltre, $\forall i$ per cui $J_{i,i+1} = 0$, $J_{i,i} = \lambda$, $J_{i+1,i+1} = \mu$ ($\lambda, \mu \in \sigma(A)$) si ha che

$$T_{i,i+1} = (\mu - \lambda) \frac{R_{i,i+1}}{R_{i+1,i+1}};$$

in particolare, $T_{i,i+1} = 0$ se $\lambda = \mu$.

Dimostrazione. Per il teorema di Jordan sappiamo che $\exists X \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $X^{-1}AX = J$. Fattorizziamo X con una matrice unitaria Q e con una matrice triangolare superiore R : $X = QR$ (vedi [3]).

Sostituendo otteniamo:

$$(QR)^{-1}AQR = R^{-1}Q^{-1}AQR = J$$

$$Q^{-1}AQ = Q^*AQ = RJR^{-1}$$

Indichiamo il prodotto Q^*AQ con T . Allora:

$$T = RJR^{-1}$$

Essendo l'insieme delle matrici triangolari superiori un anello, abbiamo che R , J , R^{-1} ed il loro prodotto sono tutte matrici triangolari superiori. Ne segue quindi che la matrice T è triangolare superiore.

Per l'ultima affermazione dell'enunciato, si partizionano J e R come segue:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

dove J_1 e R_{11} sono $i \times i$.

Si osserva che

$$T = \begin{bmatrix} R_{11}J_1R_{11}^{-1} & -R_{11}J_1R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1} + R_{12}J_2R_{22}^{-1} \\ 0 & R_{22}J_2R_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

e infine che

$$(-R_{11}J_1R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1} + R_{12}J_2R_{22}^{-1})_{i,1} = (\mu - \lambda) \frac{[R_{12}]_{i,1}}{[R_{22}]_{1,1}} = (\mu - \lambda) \frac{R_{i,i+1}}{R_{i+1,i+1}}$$

□

Definizione 3.1 Una matrice T triangolare superiore simile alla sua forma canonica di Jordan J tramite trasformazione per similitudine triangolare si dice T_{Ok} . Altrimenti si dice $T_{\overline{Ok}}$.

Dal teorema precedente segue che, scegliendo opportunamente la trasformazione unitaria, la matrice T della decomposizione di Schur di A può essere T_{Ok} .

Problema: Supponiamo di conoscere Q unitaria e T triangolare superiore, che potrebbe non essere T_{Ok} , tali che $Q^*AQ = T$. Come ricaviamo J con struttura di Jordan e X invertibile tali che $X^{-1}AX = J$?

Basterebbe trovare R invertibile tale che

$$TR = RJ$$

(tale R esiste sempre) dove J ha struttura di tipo Jordan; allora X sarebbe QR . In altre parole cerchiamo una matrice R che ci permetta di “passare” dalla forma di Schur alla forma canonica di Jordan della matrice A . Quando $T \neq T_{Ok}$ non è possibile scegliere R triangolare superiore. Tuttavia, in questo caso, esiste una trasformazione per similitudine unitaria P che porta T in T_{Ok} , $P^*TP = T_{Ok}$; quindi R deve essere il prodotto di P e di una matrice triangolare superiore.

Precisiamo ulteriormente questo risultato nella seguente proposizione.

Proposizione 3.1 Siano T_1 e T_2 due matrici triangolari superiori di Schur di A , cioè tali che $T_1 = Q_1^*AQ_1$ e $T_2 = Q_2^*AQ_2$ per due matrici unitarie Q_1 e Q_2 . Allora T_1 è una trasformazione per similitudine unitaria di T_2 . Ne segue che data una qualsiasi matrice di Schur T di A che è $T_{\overline{Ok}}$, $\exists P$ unitaria tale che P^*TP è T_{Ok} .

Dimostrazione.

$$A = Q_1T_1Q_1^* = Q_2T_2Q_2^* \Rightarrow T_1Q_1^*Q_2 = Q_1^*Q_2T_2$$

$$\Rightarrow T_1 = (Q_1^* Q_2) T_2 (Q_1^* Q_2)^*.$$

Per la rimanente affermazione è sufficiente osservare che per il Teorema 3.1 $\exists Q$ unitaria e R triangolare superiore invertibile tali che

$$Q^* A Q = R J R^{-1} = T_{Ok}.$$

□

Consideriamo la seguente matrice triangolare superiore $n \times n$ partizionata a blocchi:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

dove

- T_{11} è triangolare superiore con elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tutti distinti.
- T_{22} è triangolare superiore con elementi diagonali tutti uguali a $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda \neq \lambda_i \forall i = 1, \dots, k$.
- T_{33} è triangolare superiore con elementi diagonali tutti uguali a $\mu \in \mathbb{C}$, con $\mu \neq \lambda$ e $\mu \neq \lambda_i \forall i = 1, \dots, k$.

Cerchiamo una matrice R invertibile (possibilmente triangolare superiore) tale che vale

$$T R = R J$$

dove

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{array}{ccc} \lambda & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{array}{ccc} \mu & y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{array} \end{array} \right)$$

con $x_i, y_j \in \{0, 1\} \forall i, j$.

Osservazione 3.1 Trovata R in questo caso, in cui T ha la struttura di cui sopra, si risolve facilmente il caso generale in cui T ha una struttura generica.

Partizioniamo la matrice R così come è partizionata T :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix}$$

(Si prova a scegliere R , se non triangolare come T , almeno triangolare superiore a blocchi come T).

Il problema della ricerca di R si riduce allora ad imporre che i suoi blocchi R_{ij} soddisfino sei uguaglianze matriciali.

Dalla relazione $TR = RJ$ otteniamo infatti:

- **Prima colonna a blocchi della matrice prodotto:**

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}R_{11} = R_{11} \\ \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array} \right. \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

- **Seconda colonna a blocchi della matrice prodotto:**

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}R_{12} + T_{12}R_{22} = R_{12} \\ T_{22}R_{22} = R_{22} \\ \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array} \right. \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Terza colonna a blocchi della matrice prodotto:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}R_{13} + T_{12}R_{23} + T_{13}R_{33} = R_{13} \\ T_{22}R_{23} + T_{23}R_{33} = R_{23} \\ T_{33}R_{33} = R_{33} \end{array} \right. \begin{bmatrix} \mu & y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Determiniamo, se possibile, i vari blocchi $R_{ij} \forall i, j = 1, 2, 3$.

Iniziamo dimostrando che, una volta note R_{11} , R_{22} , R_{33} , x_i e y_j soddisfacenti la prima uguaglianza della prima colonna, la seconda uguaglianza della seconda colonna e la terza uguaglianza della terza colonna, le rimanenti R_{12} , R_{23} e R_{13} risultano definite univocamente e facilmente calcolabili. Ne seguirà che T è T_{Ok} se e solo se le matrici T_{ii} per $i = 1, 2, 3$ sono T_{Ok} .

Poiché

$$M \begin{bmatrix} \lambda & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = M \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda I \right)$$

la prima equazione della seconda colonna a blocchi può essere riformulata come segue

$$(T_{11} - \lambda I)R_{12} + T_{12}R_{22} = R_{12} \begin{bmatrix} 0 & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Analogamente operiamo per la prima e seconda equazione della terza colonna a blocchi e otteniamo:

$$(T_{11} - \mu I)R_{13} + T_{12}R_{23} + T_{13}R_{33} = R_{13} \begin{bmatrix} 0 & y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$(T_{22} - \mu I)R_{23} + T_{23}R_{33} = R_{23} \begin{bmatrix} 0 & y_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Notiamo che le matrici $T_{11} - \lambda I$, $T_{11} - \mu I$ e $T_{22} - \mu I$ sono invertibili poiché $\lambda \neq \lambda_i \forall i$, $\mu \neq \lambda_i \forall i$ e $\mu \neq \lambda$. Segue quindi che è possibile calcolare le matrici R_{12} , R_{13} e R_{23} . Verifichiamo nei dettagli questa affermazione.

Supponiamo di conoscere R_{22} e gli elementi x_i sopra la diagonale tali che

$$T_{22}R_{22} = R_{22} \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Allora dall'equazione (3.1) possiamo determinare una dopo l'altra le colonne della matrice R_{12} .

- *Prima colonna:* $(T_{11} - \lambda I)R_{12}^{(1)} = -T_{12}R_{22}^{(1)} + R_{12}\underline{0} = -T_{12}R_{22}^{(1)}$.
- *Seconda colonna:* $(T_{11} - \lambda I)R_{12}^{(2)} = -T_{12}R_{22}^{(2)} + R_{12}x_1\mathbf{e}_1 = -T_{12}R_{22}^{(2)} + x_1R_{12}^{(1)}$.
Nota: $R_{12}^{(1)}$ è stato calcolato nel passo precedente.
- *j-esima colonna:* $(T_{11} - \lambda I)R_{12}^{(j)} = -T_{12}R_{22}^{(j)} + R_{12}x_{j-1}\mathbf{e}_{j-1} = -T_{12}R_{22}^{(j)} + x_{j-1}R_{12}^{(j-1)}$.

In generale, quindi, tutte le colonne di R_{12} possono essere determinate dall'algoritmo

$$(T_{11} - \lambda I)R_{12}^{(j)} = -T_{12}R_{22}^{(j)} + x_{j-1}R_{12}^{(j-1)}, \quad j = 1, \dots, \text{ord}(T_{22}) \quad (3.5)$$

dove $x_0 R_{12}^{(0)} = \underline{0}$ con $\text{ord}(T_{22})$ indichiamo l'ordine di T_{22} .

Con due analoghe procedure è possibile determinare R_{23} dalla (3.3) e R_{13} dalla (3.2), supponendo di conoscere la matrice R_{33} e gli elementi sopra la diagonale y_i tali che

$$T_{33}R_{33} = R_{33} \begin{bmatrix} \mu & y_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Rimangono da determinare R_{11} , R_{22} , R_{33} , x_i e y_i . Iniziamo con il blocco R_{11} : essendo gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti diversi tra loro, la matrice T_{11} risulta diagonalizzabile ed avremo quindi che la forma canonica di Jordan associata presenta tutti zeri sulla sopra-diagonale. Deve valere quindi

$$T_{11}R_{11} = R_{11} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Denotiamo con (*) la relazione di cui sopra. Allora, indicati con r gli elementi della matrice R_{11} , si può dimostrare che (*) è verificata

- per $r_{i,i}$ arbitrari non nulli per $i = 1, \dots, k$.
- per il generico elemento $r_{i,i+s}$

$$r_{i,i+s} = \frac{t_{i,i+1}r_{i+1,i+s} + t_{i,i+2}r_{i+2,i+s} + \dots + t_{i,i+s-1}r_{i+s-1,i+s} + t_{i,i+s}r_{i+s,i+s}}{\lambda_{i+s} - \lambda_i}$$

per $s = 1, \dots, k-1$ e $i = 1, \dots, k-s$ (si lascia al lettore la verifica).

Ad esempio, per $n = 4$ si ha:

$$R = R_{11} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \frac{t_{1,2}r_{2,2}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{t_{1,2}r_{2,3} + t_{1,3}r_{3,3}}{\lambda_3 - \lambda_1} & \frac{t_{1,2}r_{2,4} + t_{1,3}r_{3,4} + t_{1,4}r_{4,4}}{\lambda_4 - \lambda_1} \\ 0 & r_{2,2} & \frac{t_{2,3}r_{3,3}}{\lambda_3 - \lambda_2} & \frac{t_{2,3}r_{3,4} + t_{2,4}r_{4,4}}{\lambda_4 - \lambda_2} \\ 0 & 0 & r_{3,3} & \frac{t_{3,4}r_{4,4}}{\lambda_4 - \lambda_3} \\ 0 & 0 & 0 & r_{4,4} \end{bmatrix}$$

Nota: Se T_{11} è di Toeplitz, cioè $[T_{11}]_{i,j} = [T_{11}]_{i+1,j+1} \forall i, j$, allora anche R_{11} è di Toeplitz ogni volta che $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ è costante, $\forall i = 1, \dots, k-1$ (scegliere

$$r_{i+1,i+1} = r_{i,i} \quad \forall i).$$

Determiniamo ora R_{22} e $x_i \in \{0,1\}$ tali che vale (3.4) (R_{33} e y_i tali che vale la (3.6) si determinano analogamente).

Come effettuato precedentemente, analizziamo la relazione (3.4) per colonne. Supponiamo che l'ordine delle matrici sia $k \geq 2$ e rinominiamo, per semplicità, R_{22} con R e T_{22} con T . La (3.4) può essere ridotta alla seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t_{k-1,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} R = R \begin{bmatrix} 0 & x_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & x_{k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

• *Prima colonna:*

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t_{k-1,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \\ \vdots \\ r_{k,1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} r_{1,1} \text{ arbitrario} \\ \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2,1} \\ \vdots \\ r_{k,1} \end{bmatrix} = \underline{0} \end{cases}$$

Notiamo che se gli elementi $t_{i,i+1}$ sono diversi da 0 $\forall i = 1, \dots, k-1$ allora otteniamo che $r_{i,1} = 0 \forall i = 2, \dots, k$. Quindi r_{11} va scelto non nullo (altrimenti R sarebbe singolare).

• *Seconda colonna:*

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t_{k-1,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,2} \\ r_{2,2} \\ \vdots \\ r_{k,2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \\ \vdots \\ r_{k,1} \end{bmatrix}$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = x_1 r_{k,1} \\ r_{1,2} \text{ arbitrario} \\ \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2,2} \\ \vdots \\ r_{k,2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ \vdots \\ r_{k-1,1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Notiamo che, sotto l'ipotesi $t_{i,i+1} \neq 0 \forall i = 1, \dots, k-1$, la prima equazione è verificata (per il passo precedente $r_{k,1} = 0$) per qualsiasi scelta di $x_1 \in \{0, 1\}$; x_1 però va scelto uguale a 1 poiché, altrimenti, per la seconda equazione si avrebbe $r_{22} = \dots = r_{k2} = 0$ e R sarebbe singolare. Inoltre, scegliendo $x_1 = 1$ si ha $r_{22} = \frac{r_{11}}{t_{12}}$ e $r_{32} = \dots = r_{k2} = 0$.

- j -esima colonna ($j \leq k$):

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-1,k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,j} \\ r_{2,j} \\ \vdots \\ r_{k,j} \end{bmatrix} = x_{j-1} \begin{bmatrix} r_{1,j-1} \\ r_{2,j-1} \\ \vdots \\ r_{k,j-1} \end{bmatrix}$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = x_{j-1} r_{k,j-1} \\ r_{1,j} \text{ arbitrario} \\ \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2,j} \\ \vdots \\ r_{k,j} \end{bmatrix} = x_{j-1} \begin{bmatrix} r_{1,j-1} \\ \vdots \\ r_{k-1,j-1} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Come nei passi precedenti, notiamo che sotto l'ipotesi $t_{i,i+1} \neq 0 \forall i = 1, \dots, k-1$, la prima equazione è verificata (per il passo precedente $r_{k,j-1} = 0$) per qualsiasi scelta di $x_{j-1} \in \{0, 1\}$, che però va scelto uguale a 1 altrimenti per la seconda equazione si avrebbe $r_{2,j} = \dots = r_{k,j} = 0$ e R sarebbe singolare; scegliendo $x_{j-1} = 1$ si ha $r_{j+1,j} = \dots = r_{k,j} = 0$ e $r_{j,j} = \frac{r_{j-1,j-1}}{t_{j-1,j}}$.

Possiamo concludere che se $t_{i,i+1} \neq 0 \forall i = 1, \dots, k$ la matrice $R = R_{22}$ tale che vale la (3.4) esiste ed è triangolare superiore e, inoltre, gli x_i devono essere tutti uguali a 1.

Come mostrato nel seguente Teorema, vale anche il viceversa.

Teorema 3.2 *Sia R una matrice invertibile e siano $x_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, \dots, k-1$ tali che vale la (3.7) (ove le due diagonalì di zeri possono essere sostituite con due diagonalì di λ). Allora, $t_{i,i+1} \neq 0 \forall i = 1, \dots, k-1$ se e solo se R è triangolare superiore e $x_i = 1 \forall i = 1, \dots, k-1$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Già mostrata.

$\Leftarrow$) Studiamo il generico elemento $(i, i+1)$ del prodotto matriciale al primo membro della (3.7):

$$[0, \dots, 0, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,k}] \begin{bmatrix} r_{1,i+1} \\ \vdots \\ r_{i,i+1} \\ r_{i+1,i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0, \dots, 0, r_{i,i}, \dots, r_{i,k}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i = 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo l'equazione:

$$t_{i,i+1} r_{i+1,i+1} = r_{i,i}$$

Essendo R invertibile e triangolare superiore abbiamo che $r_{i,i}$ e $r_{i+1,i+1}$ sono non nulli e $x_i = 1$ per ipotesi. Segue quindi che necessariamente $t_{i,i+1} \neq 0$. $\square$

Dopo aver analizzato il caso in cui la sopra-diagonale presenta tutti elementi diversi da zero, studiamo cosa succede se qualche $t_{i,i+1}$ è nullo. Già sappiamo che o T è T_{O_k} oppure T è simile ad una T_{O_k} tramite una trasformazione unitaria. Verifichiamolo direttamente quando T ha ordine 2, 3, 4.

Caso 2x2

Possiamo affermare che la matrice $T = \begin{bmatrix} \lambda & t_{1,2} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ è sempre T_{O_k} . Infatti con semplici calcoli è possibile mostrare che la Jordan della (3.4) sarà:

$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se $t_{1,2} = 0$. In tal caso, otteniamo che R , può essere generica invertibile e quindi, in particolare, triangolare invertibile;

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se $t_{1,2} \neq 0$. In questo caso, invece, troviamo R necessariamente triangolare superiore con gli elementi $r_{1,1} \neq 0$, $r_{1,2}$ arbitrari e $r_{2,2} = \frac{r_{1,1}}{t_{1,2}}$.

Queste considerazioni e i ragionamenti fatti nel caso di una generica matrice triangolare superiore $n \times n$, dopo averla partizionata in modo che i blocchi diagonali abbiano autovalori tutti distinti o tutti uguali, ci permettono di enunciare la seguente

Proposizione 3.2 Ogni matrice triangolare superiore T di ordine n con $m_a(\lambda) \leq 2 \forall \lambda \in \sigma(T)$ può essere portata in forma di Jordan con una trasformazione per similitudine triangolare e, quindi, è T_{Ok} .

Caso 3x3

Siano a_i scalari qualsiasi diversi da zero e b_i scalari arbitrari con $i = 1, 2, 3$. Ci chiediamo se $\exists R$ invertibile e triangolare superiore tale che $TR = RJ$,

con $J = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x, y \in \{0, 1\}$ e T definita come segue

$$1. T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T \text{ è } T_{Ok} \text{ con } R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{11}\frac{b_1}{a_1a_2} + a_1r_{23} & r_{13} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & r_{23} \\ 0 & 0 & \frac{r_{11}}{a_1a_2} \end{bmatrix} \text{ e matrice di Jordan}$$

$$\text{associata } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ per il Teorema 3.2.}$$

$$2. T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T \text{ è } T_{Ok} \text{ con } R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1}r_{33} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} \text{ e matrice di Jordan associata}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} con $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{22}\frac{b_1}{a_1} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & \frac{r_{22}}{a_1} \end{bmatrix}$ e matrice di Jordan associata

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Questo è il primo esempio di matrice che può essere $T_{\overline{Ok}}$, infatti:

$$T \text{ è } T_{Ok} \text{ se e solo se } b_1 = 0.$$

Quando $b_1 = 0$, T è T_{Ok} con R qualsiasi invertibile (anche non trian-

golare) e con matrice di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $b_1 \neq 0$ non esiste R triangolare superiore invertibile tale che $TR =$

RJ , comunque si scelga $J = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x, y \in \{0, 1\}$; R va ricercata

tra le matrici non triangolari.

Tuttavia, per la Proposizione 3.1 possiamo ricondurre T , quando è $T_{\overline{Ok}}$, ad una matrice T_{Ok} con una trasformazione per similitudine unitaria. Nel nostro caso basta una permutazione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

infatti

$$P^*TP = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che è proprio la T_{Ok} del caso 2.

Caso 4x4

Se tra le matrici 3×3 abbiamo trovato solo un caso di T che è $T_{\overline{Ok}}$, la situazione si complica non appena aumenta l'ordine della matrice. Vedremo che talvolta, non basta una trasformazione per similitudine di permutazione

per ricondurre una T che è $T_{\overline{Ok}}$ ad una T_{Ok} , ma sarà necessario usare anche trasformazioni per similitudine di Givens.

Procediamo analizzando il caso di matrici 4×4 ; come nel caso precedente, siano a_i scalari qualsiasi diversi da zero e b_i scalari arbitrari con $i = 1, 2, 3$.

$$1. \quad T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} con

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & a_1 a_2 r_{34} + (\frac{b_3}{a_2 a_3} + \frac{b_1}{a_1 a_2}) r_{11} & a_1 r_{24} + b_1 r_{34} + \frac{b_2}{a_1 a_2 a_3} r_{11} & r_{14} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & a_2 r_{34} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} r_{11} & r_{24} \\ 0 & 0 & \frac{r_{11}}{a_1 a_2} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{11}}{a_1 a_2 a_3} \end{bmatrix}$$

e con matrice di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ per il Teorema 3.2.

$$2. \quad T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} con $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & -\frac{b_1 r_{11}}{a_1^2 a_2} + \frac{r_{12}}{a_1} & (\frac{b_1 b_3}{a_1 a_2} - \frac{b_2}{a_1}) r_{44} \\ 0 & 0 & \frac{r_{11}}{a_1 a_2} & -\frac{b_3}{a_2} r_{44} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{bmatrix}$ e con matrice

di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$3. \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} con $R = \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{b_1}{a_2} r_{22} & b_1 r_{34} + \frac{b_2 r_{22}}{a_2 a_3} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & a_2 r_{34} + \frac{b_3 r_{22}}{a_2 a_3} & r_{24} \\ 0 & 0 & \frac{r_{22}}{a_2} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{22}}{a_3 a_2} \end{bmatrix}$ e con matrice di

Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

T è T_{Ok} se e solo se $a_1b_3 + a_3b_1 = 0$

Quando $a_1b_3 + a_3b_1 = 0$, T è T_{Ok} con matrice

$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & a_1r_{24} + b_1r_{34} + \frac{b_2}{a_3}r_{33} & r_{14} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & \frac{b_3}{a_3}r_{33} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{33}}{a_3} \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $a_1b_3 + b_1a_3 \neq 0$ allora T è T_{Ok} ; sappiamo però che T è comunque simile unitariamente ad una T_{Ok} . Mostriamo che tale T_{Ok} è la 2.

A tale scopo utilizziamo nell'ordine una trasformazione unitaria tramite matrice di Givens che combina la seconda e terza riga per annullare l'elemento $t_{3,4}$ di T ed una tramite matrice di permutazione della terza e quarta colonna. Siano quindi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con

$$\alpha = \frac{b_3}{\sqrt{b_3^2 + a_3^2}}, \quad \beta = -\frac{a_3}{\sqrt{b_3^2 + a_3^2}}$$

in modo tale che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $[G^*T]_{3,4} = 0$ (per semplicità supporremo che gli elementi coinvolti nella trasformazione siano reali).

Allora:

$$G^*TG = \begin{bmatrix} 0 & a_1\alpha - b_1\beta & a_1\beta + b_1\alpha & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{b_3^2 + a_3^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $a_1\alpha - b_1\beta = \frac{a_1b_3+b_1a_3}{\sqrt{b_3^2+a_3^2}} \neq 0$. Sia ora

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e otteniamo

$$P^*(G^*TG)P = \begin{bmatrix} 0 & a_1\alpha - b_1\beta & b_2 & a_1\beta + b_1\alpha \\ 0 & 0 & \sqrt{b_3^2 + a_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che risulta essere la T_{Ok} del caso 2 (essendo $a_1\alpha - b_1\beta \neq 0$ e $\sqrt{b_3^2 + a_3^2} \neq 0$).

$$5. \quad T = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} se e solo se $b_3 = 0$

$$\text{Quando } b_3 = 0, T \text{ è } T_{Ok} \text{ con } R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & \frac{r_{11}}{a_1} & -\frac{b_1}{a_1}r_{33} & -\frac{b_1}{a_1}r_{34} - \frac{b_2r_{44}}{a_1} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$\text{e con matrice di Jordan associata } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $b_3 \neq 0$, allora T è $T_{\overline{Ok}}$ ma è simile alla T_{Ok} della 2. tramite la trasformazione unitaria con matrice P di permutazione della terza e quarta colonna di T

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo

$$P^*TP = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$6. T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} se e solo se $b_1 = 0$

Quando $b_1 = 0$, T è T_{Ok} con $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \frac{b_2}{a_3}r_{33} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & \frac{b_3}{a_3}r_{33} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{33}}{a_3} \end{bmatrix}$ e con matrice

di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $b_1 \neq 0$, allora T è $T_{\overline{Ok}}$ ma è simile alla T_{Ok} della 3. tramite la trasformazione unitaria con matrice P di permutazione della prima e seconda riga di T

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo modo

$$P^*TP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} se e solo se $b_1 = b_2 = b_3 = 0$

Quando $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, T è T_{Ok} con $R =$ qualsiasi invertibile (anche

non triangolare) e con matrice di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se almeno uno tra i b_i è non nullo la T è $T_{\overline{Ok}}$. Studiamo i vari sottocasi:

- b_1 arbitrario, $b_2 \neq 0$, $b_3 = 0$: possiamo scambiare nell'ordine la seconda e quarta colonna (TP) e la seconda e quarta riga (P^*TP). Otteniamo la T_{Ok} del caso 5.
- b_2 arbitrario, $b_1 \neq 0$, $b_3 = 0$: possiamo scambiare nell'ordine la seconda e terza colonna (TP) e la seconda e terza riga (P^*TP). Otteniamo la T_{Ok} del caso 5.
- $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, b_3 arbitrario: possiamo scambiare nell'ordine la prima e terza riga (P^*T) e la prima e terza colonna (P^*TP). Otteniamo la T_{Ok} del caso 6.
- $b_1 = 0$, $b_3 \neq 0$, b_2 arbitrario: possiamo scambiare nell'ordine la seconda e terza riga (P^*T) e la seconda e terza colonna (P^*TP). Otteniamo la T_{Ok} del caso 6.
- $b_1 \neq 0$, b_2 arbitrario, $b_3 \neq 0$: possiamo scambiare nell'ordine la seconda e terza colonna e la seconda e terza riga. Otteniamo la T_{Ok} del caso 4.

$$8. T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T è T_{Ok} se e solo se $b_2 = \frac{b_1 b_3}{a_2}$ ($b_1 b_3 - b_2 a_2 = 0$)

Quando $b_2 = \frac{b_1 b_3}{a_2}$, T è T_{Ok} con $R = \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{b_1}{a_2} r_{22} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & \frac{r_{22}}{a_2} & -\frac{b_3}{a_2} r_{44} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{bmatrix}$ e con

matrice di Jordan associata $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se $b_2 \neq \frac{b_1 b_3}{a_2}$ la T è $T_{\overline{Ok}}$, ma è simile tramite una trasformazione unitaria ad una T_{Ok} . Studiamo i vari sottocasi:

- $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$: possiamo effettuare due permutazioni. La prima, permutando nell'ordine la prima e seconda riga e la prima e seconda colonna; la seconda, permutando nell'ordine la terza e quarta colonna e la terza e quarta riga. Otteniamo la T del caso 7.

- $b_1 = 0, b_2 \neq 0, b_3$ arbitrario: possiamo scambiare nell'ordine la prima e seconda riga e la prima seconda colonna. Otteniamo la T del caso 7.
- b_1 arbitrario, $b_2 \neq 0, b_3 = 0$: possiamo scambiare nell'ordine la terza e quarta colonna e la terza e quarta riga. Otteniamo la T del caso 7.

- $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0$: possiamo utilizzare la matrice di Givens $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ con $\alpha = \frac{b_3}{\sqrt{a_2^2 + b_3^2}}$ e $\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_3^2}}$, che

combina la terza e quarta colonna di T (TG) per annullare l'elemento $t_{2,3}$ (per semplicità supporremo che gli elementi coinvolti nella trasformazione siano reali). Otteniamo la T del caso 7.

Osservazione 3.2 Curioso è il caso 7. delle matrici di ordine 4. Infatti la matrice T ammette R invertibile e triangolare superiore se e solo se tutti gli altri elementi sopra la “seconda diagonale” sono nulli. Sembra come se, non appena gli elementi sulla sopra-diagonale sono tutti pari a zero, allora automaticamente anche tutta la parte strettamente triangolare superiore deve essere nulla. Notiamo che lo stesso accade nel caso 4. delle matrici di ordine 3.

Questa proprietà può essere generalizzata all'ordine k della matrice con il seguente teorema:

Teorema 3.3 *Sia la matrice T triangolare superiore di ordine k con un solo autovalore λ e tale che gli elementi $t_{i,i+1}$ sono uguali a zero $\forall i = 1, \dots, k$. Allora, T è T_{O_k} se e solo se $t_{i,j} = 0$ per $i < j$, ossia $T = \lambda I$. Inoltre, la Jordan associata è tale che gli elementi sopra la diagonale x_i sono tutti nulli $\forall i = 1, \dots, k$.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista R triangolare superiore e invertibile di ordine k tale che

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & t_{1,3} & \dots & t_{1,k} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \lambda \end{bmatrix} R = R \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{1,3} & \dots & t_{1,k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{k-2,k} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R = R \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prendiamo l'elemento $(i, i+1)$ dell'ultima identità per $i = 1, \dots, k-1$:

$$0 = r_{i,i}x_i$$

da cui segue, per l'invertibilità di R ($\det R \neq 0$), che $x_i = 0 \forall i = 1, \dots, k-1$. La matrice prodotto del secondo membro è la matrice nulla.

Vediamo ora che tutti gli elementi della parte strettamente triangolare superiore di T sono nulli. Consideriamo l'equazione per gli elementi $(i, i+2)$ con $i = 1, \dots, k-2$:

$$t_{i,i+2}r_{i+2,i+2} = 0$$

da cui segue, per l'invertibilità di R , che $t_{i,i+2} = 0 \forall i = 1, \dots, k-2$.

Procediamo analogamente per gli elementi $(i, i+3)$ con $i = 1, \dots, k-3$:

$$t_{i,i+2}r_{i+2,i+3} + t_{i,i+3}r_{i+3,i+3} = 0 \Rightarrow t_{i,i+3} = 0 \quad i = 1, \dots, k-3$$

Iterando, notiamo che l'unico addendo non nullo della somma è quello che contiene l'elemento diagonale di R .

Generalizzando all'elemento $(i, i+s)$ otteniamo l'equazione:

$$t_{i,i+2}r_{i+2,i+s} + \dots + t_{i,i+s}r_{i+s,i+s} = 0$$

da cui segue che $t_{i,i+s} = 0 \quad i = 1, \dots, k-s$ e per $s = 2, 3, \dots, k-1$. $\square$

Concludiamo questo capitolo ponendo alcuni problemi riguardanti la generalizzazione al caso di matrici di ordine k . Alcuni di questi sono risolti nei Teoremi 3.4, 3.5 e 3.6 più avanti.

Abbiamo notato nel caso 4. delle matrici 4×4 si ha la T_{O_k} se e solo se vale $a_1b_3 + a_3b_1 = 0$. Nel caso $k \times k$ si può dimostrare che se lo zero è situato in posizione $(2, 3)$ oppure $(k-2, k-1)$, in altre parole al penultimo posto sopra o sotto, allora si ha la T_{O_k} se e solo se vale $us + rt = 0$ con $t = t_{1,2}$, $u = t_{1,3}$, $r = t_{2,4}$ e $s = t_{3,4}$ nel caso $(2, 3)$ oppure $t = t_{k-3,k-2}$, $u = t_{k-3,k-1}$, $r = t_{k-2,k}$ e $s = t_{k-1,k}$ nel caso $(k-2, k-1)$. Tuttavia, se lo zero non fosse più in penultima posizione ma in terzultima, oltre a $us + rt = 0$ si aggiungerebbe un'altra non semplice condizione. La situazione si complica sempre di più

quando lo zero è posizionato verso il centro, infatti più lo zero si “allontana” dal bordo e più le condizioni per avere la T_{O_k} aumentano.

Si potrebbe aggirare il problema sfruttando delle trasformazioni per similitudine unitarie tramite matrici di Givens permettendo allo zero di “scendere” o “salire” in penultima posizione, evitando perciò le numerose e complicate condizioni oppure, come è stato effettuato nel caso 4. delle matrici 4×4 , lo si può portare in prima o ultima posizione sulla sopra-diagonale ossia ci si riduce a casi analoghi ai 2. e 3. sia delle matrici di ordine 3 sia di quelle di ordine 4. Mostriamolo ancora in un esempio.

Esempio 3.1

Sia

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \chi & \phi & \gamma & \delta & \rho \\ 0 & 0 & t & u & v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con χ , t , s e ψ tutti non nulli. Applichiamo a T la trasformazione di Givens che combina la terza e quarta riga, prendendo

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \quad \beta = -\frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}$$

in modo da annullare l'elemento in posizione (4,5).

Allora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \chi & \phi & \gamma & \delta & \rho \\ 0 & 0 & t & u & v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \chi & \alpha\phi - \beta\gamma & \beta\phi + \alpha\gamma & \delta & \rho \\ 0 & 0 & \alpha t - \beta u & \beta t + \alpha u & v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{r^2 + s^2} & \alpha\xi - \beta\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\xi + \alpha\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Applichiamo ora una seconda trasformazione di Givens a T che combina la quarta e quinta riga, prendendo

$$\alpha' = \frac{\beta\xi + \alpha\varphi}{\sqrt{(\beta\xi + \alpha\varphi)^2 + \psi^2}}, \quad \beta' = -\frac{\psi}{\sqrt{(\beta\xi + \alpha\varphi)^2 + \psi^2}}$$

in modo da annullare l'elemento in posizione (5,6).

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & -\beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta' & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \chi & \alpha\phi - \beta\gamma & \beta\phi + \alpha\gamma & \delta & \rho \\ 0 & 0 & \alpha t - \beta u & \beta t + \alpha u & v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{r^2 + s^2} & \alpha\xi - \beta\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\xi + \alpha\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta' & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procediamo col prodotto di sinistra e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & \chi & \alpha\phi - \beta\gamma & \beta\phi + \alpha\gamma & \delta & \rho \\ 0 & 0 & \alpha t - \beta u & \beta t + \alpha u & v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{r^2 + s^2} & \alpha\xi - \beta\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(\beta\xi + \alpha\varphi)^2 + \psi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta' & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \chi & \alpha\phi - \beta\gamma & \alpha'(\beta\phi + \alpha\gamma) - \beta'\delta & \beta'(\beta\phi + \alpha\gamma) + \alpha'\delta & \rho \\ 0 & 0 & \alpha t - \beta u & \alpha'(\beta t + \alpha u) - \beta'v & \beta'(\beta t + \alpha u) + \alpha'v & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\beta'\sqrt{r^2 + s^2} & \alpha'\sqrt{r^2 + s^2} & \alpha\xi - \beta\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(\beta\xi + \alpha\varphi)^2 + \psi^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scambiando ora nell'ordine la quinta e sesta colonna e la quinta e sesta riga

tramite la matrice di permutazione $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & \chi & \alpha\phi - \beta\gamma & \alpha'(\beta\phi + \alpha\gamma) - \beta'\delta & \rho & \beta'(\beta\phi + \alpha\gamma) + \alpha'\delta \\ 0 & 0 & \alpha t - \beta u & \alpha'(\beta t + \alpha u) - \beta'v & \sigma & \beta'(\beta t + \alpha u) + \alpha'v \\ 0 & 0 & 0 & -\beta'\sqrt{r^2 + s^2} & \alpha'\sqrt{r^2 + s^2} & \alpha\xi - \beta\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{(\beta\xi + \alpha\varphi)^2 + \psi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che è T_{Ok} .

Abbiamo mostrato quindi che, con due trasformazioni di Givens e una permutazione, è stato possibile far “scendere” lo zero dalla posizione centrale, rendendo quindi T una matrice T_{Ok} . Rimane da mostrare se è possibile operare come effettuato sopra nel caso generale di matrici di ordine k .

Concludiamo questa tesi riportando due teoremi che generalizzano all'ordine k alcuni risultati osservati nei casi delle matrici di ordine 3 e 4.

Teorema 3.4 *Sia T una matrice di ordine n triangolare superiore con un solo autovalore λ e tale che gli elementi $t_{i,i+1}$ sono non nulli per $i = 1, \dots, k-1$ e nulli per $i = k, \dots, n-1$. Allora T è T_{Ok} se e soltanto se gli elementi racchiusi dal “triangolo” di vertici $t_{k,k+2}$, $t_{k,n}$ e $t_{n+2,n}$ sono tutti nulli. Inoltre la forma canonica di Jordan associata è tale che*

$$x_i = \begin{cases} 1 & \forall i = 1, \dots, k-1 \\ 0 & \forall i = k, \dots, n-1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Partizioniamo allo stesso modo le matrici T , J e R :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{k-2,k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} t_{1,k} & t_{1,k+1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k-1,k} & t_{k-1,k+1} & \dots & t_{k-1,n} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & t_{k,k+2} & \dots & t_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-2,n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \end{array} \right)$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x_{k-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ x_{k-1} & 0 & \dots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & x_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \end{array} \right)$$

e

$$R = \left(\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline 0 & R_{22} \end{array} \right)$$

Analizziamo la relazione $TR = RJ$ attraverso i blocchi:

- Blocco (1,1):

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{k-2,k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} R_{11} = R_{11} \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x_{k-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema 3.2, esiste R_{11} triangolare superiore invertibile tale che vale l'identità di cui sopra e $x_i = 1 \forall i = 1, \dots, k-2$.

- Blocco (2,2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{k,k+2} & \dots & t_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-2,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} R_{22} = R_{22} \begin{bmatrix} 0 & x_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Per il Teorema 3.3, esiste R_{22} triangolare superiore invertibile tale che vale l'identità di cui sopra se e solo se $x_i = 0 \forall i = k, \dots, n-1$ e $t_{i,j} = 0$ con $i = k, \dots, n-2$ e $j = i+2, \dots, n$. R_{22} si può scegliere arbitraria (con $[R_{22}]_{ii} \neq 0 \forall i$).

- Blocco (2,1):

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

- Blocco (1,2):

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{k-2,k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} R_{12} =$$

$$= - \begin{bmatrix} t_{1,k} & t_{1,k+1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k-1,k} & t_{k-1,k+1} & \dots & t_{k-1,n} \end{bmatrix} R_{22} + R_{11} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ x_{k-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Analizziamo le colonne di questa identità.

Per la prima colonna l'equazione si riduce a

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & t_{k-2,k-1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{1,1} \\ [R_{12}]_{2,1} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,1} \end{bmatrix} = -[R_{22}]_{1,1} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} + x_{k-1} \begin{bmatrix} [R_{11}]_{1,k-1} \\ \vdots \\ [R_{11}]_{k-2,k-1} \\ [R_{11}]_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

che equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = -[R_{22}]_{1,1}t_{k-1,k} + x_{k-1}[R_{11}]_{k-1,k-1} \\ \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{2,1} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,1} \end{bmatrix} = -[R_{22}]_{1,1} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \end{bmatrix} + x_{k-1} \begin{bmatrix} [R_{11}]_{1,k-1} \\ \vdots \\ [R_{11}]_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \\ [R_{12}]_{1,1} \text{ arbitrario} \end{cases}$$

Essendo $[R_{22}]_{1,1} \neq 0$, $[R_{11}]_{k-1,k-1} \neq 0$ e $t_{k-1,k} \neq 0$ per ipotesi, dalla prima equazione segue che $x_{k-1} = 1$ e che

$$[R_{22}]_{1,1} = \frac{[R_{11}]_{k-1,k-1}}{t_{k-1,k}}$$

Dalla seconda equazione, tenendo presente che $x_{k-1} = 1$, si ricava tutta la prima colonna di R_{12} eccetto $[R_{12}]_{1,1}$ che si può scegliere arbitrariamente.

Per la seconda colonna l'equazione si riduce a

$$\begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & t_{k-2,k-1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{1,2} \\ [R_{12}]_{2,2} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,2} \end{bmatrix} = -[R_{22}]_{1,2} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{2,2} \begin{bmatrix} t_{1,k+1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+1} \\ t_{k-1,k+1} \end{bmatrix}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} 0 = -[R_{22}]_{1,2}t_{k-1,k} - [R_{22}]_{2,2}t_{k-1,k+1} \\ \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{2,2} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,2} \end{bmatrix} = -[R_{22}]_{1,2} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{2,2} \begin{bmatrix} t_{1,k+1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+1} \end{bmatrix} \\ [R_{12}]_{1,2} \text{ arbitrario} \end{cases}$$

Dalla prima equazione, poichè per ipotesi $t_{k-1,k} \neq 0$ si ha

$$[R_{22}]_{1,2} = -[R_{22}]_{2,2} \frac{t_{k-1,k+1}}{t_{k-1,k}}$$

Osserviamo che si può riformulare la seconda equazione come segue

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{2,2} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,2} \end{bmatrix} = \\ & = [R_{22}]_{2,2} \left(\frac{t_{k-1,k+1}}{t_{k-1,k}} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{1,k+1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+1} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Da questa si ricava la seconda colonna di $R_{1,2}$, eccetto $[R_{12}]_{1,2}$ che è arbitrario. Operiamo analogamente per la terza colonna:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{1,3} \\ [R_{12}]_{2,3} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,3} \end{bmatrix} = \\ & = -[R_{22}]_{1,3} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{2,3} \begin{bmatrix} t_{1,k+1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+1} \\ t_{k-1,k+1} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{3,3} \begin{bmatrix} t_{1,k+2} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+2} \\ t_{k-1,k+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

diventa

$$\left\{ \begin{aligned} & 0 = -t_{k-1,k}[R_{22}]_{1,3} - t_{k-1,k+1}[R_{22}]_{2,3} - t_{k-1,k+2}[R_{22}]_{3,3} \\ & \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{2,3} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,3} \end{bmatrix} = \\ & = -[R_{22}]_{1,3} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{2,3} \begin{bmatrix} t_{1,k+1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+1} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{3,3} \begin{bmatrix} t_{1,k+2} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+2} \end{bmatrix} \\ & [R_{12}]_{1,3} \text{ arbitrario} \end{aligned} \right.$$

Dalla prima equazione si ricava

$$[R_{22}]_{1,3} = -[R_{22}]_{2,3} \frac{t_{k-1,k+1}}{t_{k-1,k}} - [R_{22}]_{3,3} \frac{t_{k-1,k+2}}{t_{k-1,k}}$$

Qui $[R_{22}]_{2,3}$ è arbitrario (si potrebbe scegliere zero) e $[R_{22}]_{3,3}$ è arbitrario diverso da zero.

Dalla seconda equazione si ricava la terza colonna di R_{12} eccetto $[R_{12}]_{1,3}$ che è arbitrario.

Analizziamo infine la s -esima colonna. Si vede che l'elemento $[R_{22}]_{1,s}$ si può calcolare dall'equazione

$$0 = -t_{k-1,k}[R_{22}]_{1,s} - t_{k-1,k+1}[R_{22}]_{2,s} - \dots - t_{k-1,k+s-1}[R_{22}]_{s,s} \quad (3.8)$$

e la s -esima colonna di R_{12} , eccetto $[R_{12}]_{1,s}$ che è arbitrario, dall'equazione

$$\begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t_{k-2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_{12}]_{2,s} \\ \vdots \\ [R_{12}]_{k-1,s} \end{bmatrix} =$$

$$= -[R_{22}]_{1,s} \begin{bmatrix} t_{1,k} \\ \vdots \\ t_{k-2,k} \end{bmatrix} - \dots - [R_{22}]_{s-1,s} \begin{bmatrix} t_{1,k+s-2} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+s-2} \end{bmatrix} - [R_{22}]_{s,s} \begin{bmatrix} t_{1,k+s-1} \\ \vdots \\ t_{k-2,k+s-1} \end{bmatrix}$$

Nella (3.8) $[R_{22}]_{s,s}$ va scelto diverso da zero e gli elementi $[R_{22}]_{2,s}$, $[R_{22}]_{3,s}, \dots, [R_{22}]_{s-1,s}$ essendo completamente arbitrari, possono essere scelti nulli.

Procedendo così si costruiscono tutte le colonne delle matrici R_{22} e R_{12} e si completa la definizione di R . Concludiamo osservando che si può scegliere la matrice $R_{2,2}$ tutta nulla eccetto gli elementi sulla diagonale e sulla prima riga.

□

Teorema 3.5 *Sia T la matrice triangolare superiore con la seguente struttura*

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ 0 & \lambda & 0 & t_{2,4} & \dots & t_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & t_{k-2,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & t_{k-1,k} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tale che $t_{1,2} \cdot t_{k-1,k} \neq 0$. Allora, T è T_{O_k} se e solo se $t_{i,j} = 0$ per $i = 2, \dots, k-3$ e $j = i+2, \dots, k-1$ e $t_{1,2}t_{2,k} + t_{1,3}t_{3,k} + \dots + t_{1,k-2}t_{k-2,k} + t_{1,k-1}t_{k-1,k} = 0$.

Dimostrazione. Come per la dimostrazione precedente, partizioniamo allo stesso modo le matrici T , J e R come segue:

$$T = \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & t_{1,2} & \dots & \dots & t_{1,k-1} & t_{1,k} \\ \hline & 0 & 0 & t_{2,4} & \dots & t_{2,k-1} & t_{2,k} \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \vdots & & & t_{k-3,k-1} & 0 & \vdots \\ & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & t_{k-1,k} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \underline{0}^T & \dots & 0 \end{array} \right)$$

con $t_{1,2} \neq 0$ e $t_{k-1,k} \neq 0$,

$$R = \left(\begin{array}{c|cccc|c} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & \dots & r_{1,k-1} & r_{1,k} \\ \hline & r_{2,2} & \dots & \dots & r_{2,k-1} & r_{2,k} \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \vdots & & & r_{k-1,k-1} & r_{k-1,k} \\ & 0 & \dots & \dots & r_{k-1,k-1} & r_{k-1,k} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \underline{0}^T & r_{k,k} \end{array} \right)$$

$$J = \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & 0 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \vdots & & & x_{k-2} & 0 \\ & 0 & \dots & \dots & 0 & x_{k-1} \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \underline{0}^T & 0 \end{array} \right)$$

Analizziamo la relazione $TR = RJ$ per blocchi.

- Blocchi (1,1), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3): $\underline{0} = \underline{0}$.
- Blocco (2,2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{2,4} & \dots & t_{2,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2,2} & \dots & \dots & r_{2,k-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & r_{k-1,k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{2,2} & \dots & r_{2,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{k-1,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_{k-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Dal Teorema 3.4 segue che $x_i = 0 \forall i = 2, \dots, k-2$, la parte strettamente triangolare superiore ha tutti elementi uguali a zero, ossia $t_{i,j} = 0$ per $i = 2, \dots, k-3$ e $j = i+2, \dots, k-1$, e gli $r_{i,j}$ sono qualsiasi tali che $r_{i,i} \neq 0$, per $i = 2, \dots, k-1$ e $j = i, \dots, k-1$.

- Blocco (1,2): studiamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} t_{1,2} & \dots & t_{1,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2,2} & \dots & r_{2,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{k-1,k-1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} (r_{1,1}x_1) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{1,2} & \dots & r_{1,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_{k-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'altronde sappiamo che $x_i = 0 \forall i = 2, \dots, k-2$. Abbiamo quindi

$$t_{1,2}r_{2,2} = r_{1,1}x_1$$

da cui segue che necessariamente $x_1 = 1$ (poiché $t_{1,2} \neq 0$ per ipotesi, e $r_{1,1} \neq 0$, $r_{2,2} \neq 0$ per l'invertibilità di R) e $r_{2,2} = \frac{r_{1,1}}{t_{1,2}}$.

Inoltre

$$t_{1,2}r_{2,3} + t_{1,3}r_{3,3} = 0 \text{ da cui } r_{2,3} = -t_{1,3}\frac{r_{3,3}}{t_{1,2}};$$

$$t_{1,2}r_{2,s} + t_{1,3}r_{3,s} + \dots + t_{1,s}r_{s,s} = 0 \text{ per } s = 3, \dots, k-1, \text{ da cui}$$

$$r_{2,s} = \frac{1}{t_{1,2}} \left(- \sum_{j=3}^s t_{1,j} r_{j,s} \right), \quad s = 3, \dots, k-1. \quad (3.9)$$

- Blocco (2,3): la relazione si riduce a

$$r_{k,k} \begin{bmatrix} t_{2,k} \\ \vdots \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} = x_{k-1} \begin{bmatrix} r_{2,k-1} \\ \vdots \\ r_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

uguagliando componente per componente troviamo le relazioni $r_{k,k}t_{s,k} = x_{k-1}r_{s,k-1}$ per $s = 2, \dots, k-2$ e $r_{k,k}t_{k-1,k} = x_{k-1}r_{k-1,k-1}$. Quest'ultima implica $x_{k-1} = 1$ e $r_{k,k} = \frac{r_{k-1,k-1}}{t_{k-1,k}}$.

Quindi, calcolato $r_{k,k}$, si calcolano $r_{s,k-1} = r_{k,k}t_{s,k}$, $s = 2, \dots, k-2$.

- Blocco (1,3): l'uguaglianza si riduce a

$$[t_{1,2} \dots t_{1,k-1}] \begin{bmatrix} r_{2,k} \\ \vdots \\ r_{k-1,k} \end{bmatrix} + t_{1,k}r_{k,k} = r_{1,k-1}x_{k-1}$$

da cui, tenendo presente che $x_{k-1} = 1$, otteniamo la seguente relazione

$$r_{2,k} = \frac{1}{t_{1,2}} \left(r_{1,k-1} - \sum_{j=3}^k t_{1,j}r_{j,k} \right)$$

Infine, si osserva che l'elemento $(2,k-1)$ di R deve essere contemporaneamente uguale a $r_{k,k}t_{2,k}$ e a $\frac{1}{t_{1,2}}(-t_{1,3}r_{3,k-1} - \dots - t_{1,k-2}r_{k-2,k-1} - t_{1,k-1}r_{k-1,k-1})$ da cui, poiché $r_{i,k-1} = r_{k,k}t_{i,k}$ con $i = 3, \dots, k-1$ e $r_{k,k} \neq 0$, segue la condizione

$$t_{1,2}t_{2,k} + t_{1,3}t_{3,k} + \dots + t_{1,k-2}t_{k-2,k} + t_{1,k-1}t_{k-1,k} = 0$$

□

Osservazione 3.3 La condizione

$$t_{1,2}t_{2,k} + t_{1,3}t_{3,k} + \dots + t_{1,k-2}t_{k-2,k} + t_{1,k-1}t_{k-1,k} = 0 \quad (3.10)$$

non è altro che

$$[t_{1,2}, \dots, t_{1,k-1}]^T \begin{bmatrix} t_{2,k} \\ \vdots \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} t_{1,2} \\ \vdots \\ t_{1,k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_{2,k} \\ \vdots \\ t_{k-1,k} \end{bmatrix} \right\rangle$$

E' evidente a questo punto che per completare gli studi incominciati in questo capitolo occorrerebbe caratterizzare tutte le matrici

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & t_{1,2} & \dots & t_{1,k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{k-1,k} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

trasformabili in forma di Jordan tramite una trasformazione per similitudine triangolare, esibendo (o fornendo un algoritmo per il calcolo del) la matrice triangolare superiore R per cui $R^{-1}TR = J$; e, per le rimanenti, occorrerebbe introdurre un procedimento che permetta di trasformarle con una trasformazione per similitudine unitaria in matrici T' per cui tale R esiste ed è costruibile.

Il seguente Teorema 3.6, che conclude questo lavoro di tesi, permette di completare questo studio per matrici T del tipo

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & t_{1,2} & \dots & \dots & t_{1,k} \\ 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.6 Sia

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \underline{x}^T & v \\ \underline{0} & O & \underline{y} \\ 0 & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

di ordine k con v scalare, e $\underline{x}, \underline{y}$ vettori di dimensione $k-2$ tali che $\underline{x}^T \underline{y} \neq 0$. Se $\underline{x}^T \underline{y} = 0$ allora T è T_{Ok} (per il Teorema 3.5). Altrimenti, $\exists Q$ unitaria tale che

$$Q^* T Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} & * & \dots & * & v \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \dots & 0 & \|\underline{y}\|_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, chiamando P la matrice di permutazione che scambia la terza con l'ultima

colonna e la terza con l'ultima riga si ottiene

$$P^*Q^*TQP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} & v & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \|\underline{y}\|_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

che è T_{Ok} poiché $\underline{x}^T \underline{y} \neq 0$ e $\|\underline{y}\|_2 \neq 0$ (per il Teorema 3.4).

Dimostrazione. Sia

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T & 0 \\ \underline{0} & \tilde{Q} & \underline{0} \\ 0 & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T & 0 \\ \underline{0} & \tilde{Q}^* & \underline{0} \\ 0 & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \underline{x}^T & v \\ \underline{0} & O & \underline{y} \\ 0 & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T & 0 \\ \underline{0} & \tilde{Q} & \underline{0} \\ 0 & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \underline{x}^T & v \\ \underline{0} & O & \tilde{Q}^* \underline{y} \\ 0 & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^T & 0 \\ \underline{0} & \tilde{Q} & \underline{0} \\ 0 & \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \underline{x}^T \tilde{Q} & v \\ \underline{0} & O & \tilde{Q}^* \underline{y} \\ 0 & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Scegliamo $\tilde{Q}$ unitaria tale che $\tilde{Q}^* \underline{y} = \|\underline{y}\|_2 \underline{e}_1$ ($\tilde{Q}^*$ può essere, ad esempio, di Householder di ordine $k-2$ oppure prodotto di $k-3$ di Givens di ordine $k-2$, vedi [3]).

Notiamo che

$$\frac{1}{\|\underline{y}\|_2} \underline{y} = \tilde{Q} \underline{e}_1 \implies \frac{\underline{x}^T \underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} = \underline{x}^T \tilde{Q} \underline{e}_1$$

da cui segue la tesi. □

Capitolo 4

Appendice

Di seguito presentiamo la relazione sul manoscritto di Soumia Soltani e Abdelkader Frakis dell'Università Mustapha Stambouli di Mascara, Algeria, incluso anch'esso in quest'appendice.

The manuscript begins with an introduction where the authors recall the definition of spread of a matrix and some bounds already given by L. Mirsky, E. Deutsch, E. R. Barnes and A. J. Hoffman. In the second section new bounds are shown that improve the earlier mentioned ones and, finally, in the third section they present characterization and bounds for the spread of normal matrices.

We consider the results in this manuscript sufficiently original. Indeed, Theorem 2.1 improves Deutsch's inequalities (2) and (3) using the spectral norm, Theorems 2.6 and 2.7 generalize the inequality $Sp(A) \leq \sqrt{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}$, and Theorem 3.4 for normal matrices, using a characterization of the spread of such matrices and the inequality $|tr(A^2)| \leq \|A\|_F^2$, refines Mirsky's bound (1).

However, the manuscript should be improved. In particular, regarding its presentation we suggest to include in the second and third sections more explanation and comments to the contents; for example we would appreciate if the authors give some motivations about the inequalities of Theorem 3.8, comparing them with the previous ones and explaining if they are better or not. We also suggest to change the position of some theorems.

Below you find suggestions that the authors should take into account in order to make the manuscript worth of publication.

1. Introduction:

Page 1, line 3: the word “denotes” should be corrected with “deno-

ted”.

Page 1, line 8: it is better to start a new sentence after the word “matrix”.

Page 1, line 10-11: in order to present Mirsky’s upper bound more elegantly, we suggest to rewrite (1) as follows: $Sp(A)^2 \leq 2(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n}|tr A|^2)$.

Page 2, line 2-6: the authors should use $R_k(\xi)$ to denote the k -th row of $A - \xi I$ so that it is the same notation used in Theorem 2.1. Thus, rewrite (2) and (3) using $\|\cdot\|_1$ to denote the sum of the absolute values of the entries of the k -th row of $A - \xi I$. Moreover, exchange (2) and (3) since (2) is a corollary of (3) for $t = 1$ and $\xi = 0$. You could underline that fact adding the equality “ $= \sum_{k=1}^n \|R_k(0)\|_1$ ”.

Page 2, line 5-6: substitute j with k in $R_j(\xi)$ and i with k in “ i -th row” since (3) is written with k index. Moreover, put a comma after “ $\xi \in \mathbb{C}$ ”.

Page 2, line 9: in (4) correct $sp(A)$ with $Sp(A)$.

Page 2, line 10: substitute “We write” with “We define”.

Page 2, line 13: with $Re(A)$ we usually denote a matrix whose entries are the real parts of the entries of A . Hence, it is more correct to write:

$$Sp_{Re}(A) = Sp\left(\frac{A + A^*}{2}\right) \quad Sp_{Im}(A) = Sp\left(\frac{A - A^*}{2i}\right)$$

where $\frac{A+A^*}{2}$ and $\frac{A-A^*}{2i}$ are the hermitian matrices of the Cartesian Decomposition of A . In fact, in general the equalities $Sp_{Re}(A) = Sp(Re(A))$ and $Sp_{Im}(A) = Sp(Im(A))$ hold only under the hypothesis that the unitary matrix which diagonalizes the normal matrix A is real.

Page 2, line 19: since it is the same proof of $Sp_{Re}(A)$ we suggest to omit it and to write “for $Sp_{Im}(A)$ proceed analogously...”

Page 2, line 15: we suggest to remove Theorem 2.3 from page 4 and move its content to this line, i.e. present the complete relation:

$$\max\{Sp_{Re}(A), Sp_{Im}(A)\} \leq Sp(A) \leq \sqrt{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}$$

giving only a hint of proof, observing that $Sp^2(A) \leq \max_{i,j}(Re(\lambda_i - \lambda_j))^2 + \max_{i,j}(Im(\lambda_i - \lambda_j))^2$.

Page 2, line 20-24: since Introduction is the manuscript’s first section, we suggest to change the words “Section 1” and “Section 2” to “Section 2” and “Section 3”, respectively. We also advice the authors to remove the last sentence about the spread of general 2x2 block matrices for the reasons given below (see **page 9, line 14-24**).

2. Main results:

Page 3, line 9: generally the entries of a diagonal matrix are denoted with only one subscript i , so we suggest to correct σ_{ii} with σ_i . We also invite the authors to include a reference for the inequality $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i$.

Page 3, line 13: substitute $\leq$ with $=$ in the last inequality since $S = UV^*$ is unitary and it is well known that the spectral norm of every row and column of a unitary matrix is equal to 1.

Page 3, line 20: we ask the authors to give explanation about why inequality (5) is a better estimate of (1).

Page 4, line 11: as said above, remove Theorem 2.3.

Page 4, line 19: we suggest to remove Theorem 2.4 since it coincides with Theorem 2.6 at pag.5.

Page 5: we suggest to move Theorem 2.8 and its proof at the beginning of the third section (page 7, before Theorem 3.1) where we can write, for example, “Let us give a preliminary result which holds for generic matrices A .” and after showing Theorem 2.8 we can possibly write “When A is normal the above result can be specified as in the following Theorem 3.1.”

Page 6, line 10: we invite the authors to correct $Sp^2(A - \frac{tr A}{n})^2$ in $Sp^2(A - \frac{tr A}{n}I)$ since $\frac{tr A}{n}$ is a scalar. The same goes for the Frobenius norm in the following inequality.

Page 6, line 25: substitute $=$ with $\leq$ in the last equality since $=$ is valid only if A and B are normal matrices. On the contrary, $\leq$ is always valid.

Page 6, line 28: add “already” between “was” and “given”.

3. Characterization of the spread of a normal matrix:

We suggest to change the title in “Characterization and bounds for the spread of a normal matrix”.

Page 8, line 8: we recall that $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, so we suggest to add $|\cdot|$ to α and β .

Page 8, line 14: the second inequality should be an equality. In fact, since the square root is an increasing function we can switch it with the maximum.

Page 8, line 15-17: we ask the authors to explain how the last inequality in the proof is obtained from the previous arguments.

Page 9, line 14-24: first, in the remark is given an incorrect result. In order to use the inequality of Corollary 3.6 we need T to be normal. Actually, even in the more particular case A normal, T is not normal.

Again, also Theorem 3.7 gives an incorrect result since $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$ is not normal and so Theorem 3.1 can not be used in the first equality in line 20. In conclusion we suggest to remove or reformulate Remark and Theorem 3.7 in a correct way.

Page 10, line 2: insert the sentence: “Note that the first result is exactly Deutsch’s inequality for $t = 1$ and $\xi = 0$ recalled in the introduction. We report it because is given a new proof, even if it works only for normal matrices”

Page 10: in Theorem 3.8 we suggest to omit “ $\max_{i,j}$ ” in (1) and (2) and the same goes for the last step of their proof in lines 10 and 15..

Page 11: since λ_i is not necessarily contained in the i -th Gershgorin disk with the same index (analogously for λ_j), we suggest to replace the third and fourth rows with the following: “ $|\lambda_i - \lambda_j| \leq |a_{rr} - a_{ss}| + |\lambda_i - a_{rr}| + |\lambda_j - a_{ss}|$ where λ_i and λ_j are two eigenvalues of A contained in the r -th and s -th Gershgorin disk, respectively. Thus:” and write

$$Sp(A) \leq \max_{r,s} \left(|\lambda_i - \lambda_j| + \sum_{k \neq r} |a_{rk}| + \sum_{k \neq s} |a_{sk}| \right)$$

Change every index i with r and j with s in the following lines.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana
Further bounds for the spread of a matrix
--Manuscript Draft--

Manuscript Number:	BUMI-D-22-00183
Full Title:	Further bounds for the spread of a matrix
Article Type:	Original Research

Further bounds for the spread of a matrix

Soumia Soltani¹ and Abdelkader Frakis²

^{1,2}University Mustapha Stambouli of Mascara, Algeria.

Department of mathematics.

¹E.mail: soumia.soltani@univ-mascara.dz

²E.mail: frakis.aek@univ-mascara.dz

Abstract

The spread of a matrix is defined as the maximum absolute value of the difference between any two eigenvalues of that matrix. In this work, we give a characterization for the spread of a normal matrix. Also, we provide new bounds for the spread of a matrix as well as for partitioned matrices. Some of these bounds are refinements of the existing ones.

Key words. Hermitian matrix; normal matrix; trace of matrix; Frobenius norm.

AMS Subject classifications. 15A15; 15A18; 15A60; 15B57.

1 Introduction

We assume throughout this paper that $n \geq 3$. Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ complex matrix with eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. The *spread* of the matrix A , denoted by $Sp(A)$, is defined as

$$Sp(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

When all the eigenvalues are real, then $Sp(A) = \lambda_1 - \lambda_n$, assuming that the eigenvalues of A are ordered as $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. The spread of a matrix was introduced by L. Mirsky [7]. There are many existing papers dealing with bounding the spread of a matrix, we refer the readers to [3], [7], [8], [9] and the references therein.

In [7] L. Mirsky gave an upper bound for the spread of A

$$Sp(A) \leq \left\{ 2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|tr A|^2 \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

where $\|A\|_F$ and $tr A$ denote the Frobenius norm and the trace of A , respectively.

In [2] E. Deutsch gave the following results

$$Sp(A) \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad (2)$$

and

$$Sp(A) \leq 2 \sqrt[t]{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k^t(\xi)}, \quad (3)$$

where $t \geq 1$ and $R_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$ is the sum of the absolute values of the entries in the i -th row of $A - \xi I$.

E. R. Barnes and A. J. Hoffman [5] gave the following lower bound for the spread of A when A is Hermitian

$$\sqrt{\frac{2}{n}} \left(2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n} (tr(A))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq sp(A). \quad (4)$$

We write

$$Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |\Re(\lambda_i) - \Re(\lambda_j)| \quad \text{and} \quad Sp_{Im}(A) = \max_{i,j} |\Im(\lambda_i) - \Im(\lambda_j)|.$$

Note that, if A is a normal matrix, then

$$Sp_{Re}(A) = Sp(Re(A)) \quad \text{and} \quad Sp_{Im}(A) = Sp(Im(A)).$$

We have

$$\max\{Sp_{Re}(A), Sp_{Im}(A)\} \leq Sp(A).$$

Indeed,

$$Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |\Re(\lambda_i) - \Re(\lambda_j)| = \max_{i,j} |\Re(\lambda_i - \lambda_j)| \leq \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A)$$

and

$$Sp_{Im}(A) = \max_{i,j} |\Im(\lambda_i) - \Im(\lambda_j)| = \max_{i,j} |\Im(\lambda_i - \lambda_j)| \leq \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A).$$

In Section 1, we derive new bounds for the spread of a matrix, some of these bounds improve earlier related ones.

In Section 2, we present a characterization for the spread of a matrix when this matrix is normal. Also, we give some bounds for the spread of general 2×2 block matrices.

2 Main results

Our first main result can be stated as follows.

Theorem 2.1. *Let A be an $n \times n$ complex matrix. Then*

$$Sp(A) \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^n \|C_i(\xi)\|, \sum_{i=1}^n \|R_i(\xi)\| \right\}, \quad (5)$$

where $C_i(\xi), [R_i(\xi)]$, $\xi \in \mathbb{C}$ are the i -th column, [row], of $A - \xi I$ and $\|\cdot\|$ is the spectral norm.

Proof. We have

$$Sp(A) = \max_{ij} |\lambda_i - \lambda_j| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Let $A = U\Sigma V^*$ be the singular value decomposition of A , where U, V are unitary matrices and Σ is a diagonal matrix with non-negative real numbers σ_{ii} .

It is well known that $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} = tr\Sigma$.

On the other hand, $tr\Sigma = trU^*AV = trSA = trAS$, where $S = VU^*$. Denoting the k -th column, the k -th row, of a matrix X by $C_k(X)$, $R_k(X)$, respectively. Using the Cauchy-Schwarz inequality, it follows that

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq trSA = \sum_{k=1}^n \langle R_k(S), C_k(A) \rangle \leq \sum_{k=1}^n \|R_k(S)\| \|C_k(A)\| \leq \sum_{k=1}^n \|C_k(A)\|.$$

Now, if we replace $C_k(A)$ by $R_k(A)$ and we follow a similar reasoning, then we obtain

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{k=1}^n \|R_k(A)\|$$

Since the spread of A is invariant under translation, then the inequality (5) follows immediately. $\square$

Remark. The inequality (5) gives a better estimate for the spread of a matrix than the inequalities (1), (2), and (3).

Example. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

The inequality (1) gives $Sp(A) \leq 114.36$. However, making use of the inequalities (2) and (3) for $t = 1$, $\xi = 2$, we get $Sp(A) \leq 110$ and $Sp(A) \leq 104$, respectively. Moreover, the inequality (5) with $\xi = 2$ gives $Sp(A) \leq 101.42$. Actually we have $Sp(A) \approx 100.01$.

Theorem 2.2. *Let A be an $n \times n$ complex normal matrix. Then*

$$\frac{1}{n} \left[2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|tr(A)|^2 \right] + \frac{|Sp_{Re}^2(A) - Sp_{Im}^2(A)|}{2} \leq Sp^2(A).$$

Proof. We have $\max\{Sp_{Re}(A), Sp_{Im}(A)\} \leq Sp(A)$. Then

$$Sp^2(A) \geq \frac{1}{2} \{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A) + |Sp_{Re}^2(A) - Sp_{Im}^2(A)|\}.$$

On the other hand, using the inequality (4) we get

$$\begin{aligned} Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A) &= Sp^2(Re(A)) + Sp^2(Im(A)) \\ &\geq \frac{4}{n} \left[\|Re(A)\|_F^2 - \frac{tr(Re(A))^2}{n} + \|Im(A)\|_F^2 - \frac{tr(Im(A))^2}{n} \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|tr(A)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Hence the desired result is obtained. $\square$

The following result was given in [4].

Theorem 2.3. [4] *Let A be a complex matrix. Then*

$$Sp(A) \leq \sqrt{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}.$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} Sp^2(A) &= \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \\ &= \max_{i,j} [\Re^2(\lambda_i - \lambda_j) + \Im^2(\lambda_i - \lambda_j)] \\ &\leq \max_{i,j} \Re^2(\lambda_i - \lambda_j) + \max_{i,j} \Im^2(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A). \end{aligned}$$

$\square$

Theorem 2.4. *Let A be a complex matrix and $r \geq 1$. Then*

$$Sp^{2r}(A) \leq 2^{r-1} (Sp_{Re}^{2r}(A) + Sp_{Im}^{2r}(A)).$$

Proof. The result follows by using Theorem 2.3 and the convexity of the function $f(t) = t^r$, where $t \in [0, \infty)$ and $r \geq 1$. $\square$

Lemma 2.5. *Let $a, b \geq 0$ and $0 \leq \alpha \leq 1$. Then*

$$1. (\alpha a^r + (1 - \alpha)b^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\alpha a^s + (1 - \alpha)b^s)^{\frac{1}{s}}, \quad \text{for } 0 < r \leq s.$$

$$2. (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}} \leq (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}, \quad \text{for } 0 < r \leq s.$$

Theorem 2.6. *Let A be a complex matrix and $q \geq 2$. Then*

$$Sp^q(A) \leq 2^{\frac{q}{2}-1} (Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)).$$

Proof. Using Lemma 2.5 (1), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{Sp(A)}{\sqrt{2}} &\leq \left(\frac{Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A)}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Hence,

$$Sp^q(A) \leq 2^{\frac{q}{2}-1} (Sp_{Re}^q(A) + Sp_{Im}^q(A)).$$

□

Theorem 2.7. *Let A be a complex matrix and $0 < p \leq 2$. Then*

$$Sp^p(A) \leq Sp_{Re}^p(A) + Sp_{Im}^p(A).$$

Proof. Again using Lemma 2.5 (2), we get

$$\begin{aligned} Sp(A) &\leq (Sp_{Re}^2(A) + Sp_{Im}^2(A))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (Sp_{Re}^p(A) + Sp_{Im}^p(A))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Hence,

$$Sp^p(A) \leq Sp_{Re}^p(A) + Sp_{Im}^p(A).$$

□

Theorem 2.8. *Let A be a complex matrix and let z be any complex number with $|z| = 1$. Then*

$$1. Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA).$$

$$2. Sp(A) = \max_{|z|=1} Sp_{Im}(zA).$$

Proof. We have

$$\max_{|z|=1} Sp_{Re}(zA) = \max_{i,j} \max_{|z|=1} |\Re[z(\lambda_i - \lambda_j)]| = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A)$$

and

$$\max_{|z|=1} Sp_{Im}(zA) = \max_{i,j} \max_{|z|=1} |\Im[z(\lambda_i - \lambda_j)]| = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = Sp(A).$$

Therefore, the first and the second results are obtained. □

Now, we present a key theorem, called *Mirsky's Theorem*, see [7] and we provide two proofs of this theorem different from the one given by the author.

Theorem 2.9. *Let A be an $n \times n$ complex matrix. Then*

$$Sp(A) \leq \left\{ 2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|tr A|^2 \right\}^{1/2}.$$

Proof. 1) Let λ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ be the eigenvalues of A . Assume that $Sp(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|$. Then

$$Sp^2(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|^2 \leq (|\lambda_{i_0}| + |\lambda_{j_0}|)^2 \leq 2(|\lambda_{i_0}|^2 + |\lambda_{j_0}|^2) \leq 2 \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq 2\|A\|_F^2.$$

Since the spread of a matrix is invariant under translation, then

$$Sp^2(A) = Sp^2\left(A - \frac{tr A}{n}\right)^2 \leq 2\left\|A - \frac{tr A}{n}\right\|_F^2 = 2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|tr A|^2.$$

This completes the proof.

2) Let λ_i , α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ be the eigenvalues of the matrices A and B , respectively. Consider the column vectors

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)^T, \quad v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)^T, \quad w = (\alpha_n, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1)^T.$$

Without loss of generality, let $Sp(A) = |\lambda_1 - \lambda_n|$ and $Sp(B) = |\alpha_1 - \alpha_n|$.

Thus,

$$\langle u, v \rangle = \lambda_1^* \alpha_1 + \lambda_2^* \alpha_2 + \dots + \lambda_{n-1}^* \alpha_{n-1} + \lambda_n^* \alpha_n$$

and

$$\langle u, w \rangle = \lambda_1^* \alpha_n + \lambda_2^* \alpha_2 + \dots + \lambda_{n-1}^* \alpha_{n-1} + \lambda_n^* \alpha_1.$$

We have

$$\frac{1}{2}|\langle u, v \rangle - \langle u, w \rangle| \leq \max(|\langle u, v \rangle|, |\langle u, w \rangle|).$$

On the other hand,

$$Sp(A)Sp(B) = |\langle u, v \rangle - \langle u, w \rangle|.$$

Using Cauchy-Schwarz inequality, it follows that

$$Sp(A)Sp(B) \leq 2\|u\|\|v\| = 2\sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} = 2\|A\|_F\|B\|_F.$$

The result follows by choosing $A = B$ and using the fact that the spread of a matrix is invariant under translation. $\square$

The inequality $Sp(A)Sp(B) \leq 2\|A\|_F\|B\|_F$ was given in [5].

3 Characterization of the spread of a normal matrix

Theorem 3.1. *Let A be a normal complex matrix and let z be any complex number with $|z| = 1$. Then*

$$1. \operatorname{Sp}(A) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp} \left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right).$$

$$2. \operatorname{Sp}(A) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp} \left(\frac{zA - \bar{z}A^*}{2i} \right).$$

Proof. Since A is normal, it follows that

$$\operatorname{Sp}(A) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp}_{\operatorname{Re}}(zA) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp} \left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right)$$

and

$$\operatorname{Sp}(A) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp}_{\operatorname{Im}}(zA) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp} \left(\frac{zA - \bar{z}A^*}{2i} \right).$$

□

Some applications of the Theorem 3.1 are given in the following theorems.

Theorem 3.2. *Let A be a normal complex matrix have the Cartesian decomposition $A = H + iK$. Then*

$$\operatorname{Sp}(A) = \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \operatorname{Sp}(\alpha H + \beta K).$$

In particular,

- $\frac{1}{2} \operatorname{Sp}(A + A^*) \leq \operatorname{Sp}(A).$
- $\frac{1}{2} \operatorname{Sp}(A - A^*) \leq \operatorname{Sp}(A).$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Sp} \left(\frac{(1-i)A + (1+i)A^*}{2} \right) \leq \operatorname{Sp}(A).$

Proof. We have $\operatorname{Sp}(A) = \max_{|z|=1} \operatorname{Sp} \left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right).$

On the other hand,

$$\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} = (\cos \theta)H - (\sin \theta)K.$$

Putting $\alpha = \cos \theta$ and $\beta = -\sin \theta$, we obtain the first result.

By choosing $(\alpha = 1, \beta = 0)$, $(\alpha = 0, \beta = 1)$, and $(\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2})$, we get the second result. □

Theorem 3.3. *Let A be a normal complex matrix have the Cartesian decomposition $A = H + iK$. Then*

1. $Sp(A) \leq \sqrt{2 (\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2)}.$
2. $Sp(A) \leq \sqrt{\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2 + \left[(\|H\|_F^2 - \|K\|_F^2)^2 + 4tr^2(HK) \right]^{1/2}}.$

Proof. We have

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} Sp(\alpha H + \beta K) \\ &\leq \sqrt{2} \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \|\alpha H + \beta K\|_F \\ &\leq \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \sqrt{2} (\alpha \|H\|_F + \beta \|K\|_F) \end{aligned}$$

Hence,

$$Sp(A) \leq \sqrt{2 (\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2)}.$$

- Again, we have

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} Sp(\alpha H + \beta K) \\ &\leq \sqrt{2} \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} \|\alpha H + \beta K\|_F \\ &\leq \sqrt{2 \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} tr(\alpha H + \beta K)(\alpha H^* + \beta K^*)} \\ &= \sqrt{2 \max_{\alpha^2 + \beta^2 = 1} (\alpha^2 \|H\|_F^2 + 2\alpha\beta tr(HK) + \beta^2 \|K\|_F^2)}. \end{aligned}$$

Hence,

$$Sp(A) \leq \sqrt{\|H\|_F^2 + \|K\|_F^2 + \left[(\|H\|_F^2 - \|K\|_F^2)^2 + 4tr^2(HK) \right]^{1/2}}.$$

□

The following theorem gives an improvement of the inequality (1).

Theorem 3.4. *Let A be an $n \times n$ normal complex matrix. Then*

$$Sp(A) \leq \sqrt{\|A\|_F^2 + |tr(A^2)| - \frac{2}{n} |tr A|^2}. \quad (6)$$

Proof. Using the inequality (1), we get

$$\begin{aligned}
Sp^2(A) &= \max_{|z|=1} Sp^2 \left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right) \\
&\leq \max_{|z|=1} \left[2 \left\| \frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right\|_F^2 - \frac{2}{n} \left| \operatorname{tr} \left(\frac{zA + \bar{z}A^*}{2} \right) \right|^2 \right] \\
&= \max_{|z|=1} \left[\frac{1}{2} \operatorname{tr}(zA + \bar{z}A^*)(\bar{z}A^* + zA) - \frac{2}{n} |\operatorname{Re} z \operatorname{tr} A|^2 \right] \\
&= \max_{|z|=1} \left[\|A\|_F^2 + \Re(z^2 \operatorname{tr}(A^2)) - \frac{2}{n} |\operatorname{tr} A|^2 \right] \\
&= \|A\|_F^2 + |\operatorname{tr}(A^2)| - \frac{2}{n} |\operatorname{tr} A|^2.
\end{aligned}$$

□

Remark. Since $|\operatorname{tr} A^2| \leq \|A\|_F^2$, it follows that the inequality (6) is a refinement of the inequality (1).

Corollary 3.5. *Let A be a normal complex matrix. Then*

$$Sp^2(A) \leq \|A\|_F^2 + |\operatorname{tr}(A^2)|. \quad (7)$$

The inequality (7) is an improvement of the inequality $Sp^2(A) \leq 2\|A\|_F^2$.

Corollary 3.6. *Let A be a normal complex matrix such that $A^2 = 0$. Then*

$$Sp(A) \leq \|A\|_F.$$

Remark. Let $T = \begin{bmatrix} A & A \\ -A & -A \end{bmatrix}$, where A is an arbitrary complex matrix.

Since $T^2 = 0$. Then

$$Sp \left(\begin{bmatrix} A & A \\ -A & -A \end{bmatrix} \right) \leq \left\| \begin{bmatrix} A & A \\ -A & -A \end{bmatrix} \right\|_F = 2\|A\|_F.$$

Theorem 3.7. *Let A and B be an $n \times n$ two normal complex matrices. Then*

$$Sp \left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \right) \leq \|A\|_F + \|B\|_F.$$

Proof. Let z be any complex number with $|z| = 1$, we have

$$\begin{aligned}
Sp \left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \max_{|z|=1} Sp \left[z \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} + \bar{z} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* \right] \\
&= \frac{1}{2} \max_{|z|=1} Sp \begin{pmatrix} 0 & zA + \bar{z}B^* \\ (zA + \bar{z}B^*)^* & 0 \end{pmatrix} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \max_{|z|=1} \left\| \begin{pmatrix} 0 & zA + \bar{z}B^* \\ (zA + \bar{z}B^*)^* & 0 \end{pmatrix} \right\|_F \\
&= \max_{|z|=1} \|zA + \bar{z}B^*\|_F \\
&\leq \|A\|_F + \|B\|_F.
\end{aligned}$$

□

In the following theorem we give some upper bounds for the spread of a matrix using merely the entries of this matrix.

Theorem 3.8. *Let $A = (a_{ij})$ be an $n \times n$ normal complex matrix. Then*

1. $Sp(A) \leq \max_{i,j} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ii}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (|a_{ij}| + |a_{ji}|) \right\}.$
2. $Sp(A) \leq \max_{i,j} \left\{ 2 \sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (|a_{ij}| + |a_{ji}|)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$
3. $Sp(A) \leq \max_{i,j} \left\{ |a_{ii} - a_{jj}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n (|a_{ik}| + |a_{ki}|) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq j}}^n (|a_{jk}| + |a_{kj}|) \right\}.$

Proof. Using the inequality (2) and Theorem 3.1, it follows that

$$\begin{aligned}
 Sp(A) &\leq \max_{|z|=1} \left(\sum_{i=1}^n |Re \, z a_{ii}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |z a_{ij} + \overline{z a_{ji}}| \right) \\
 &\leq \max_{|z|=1} \sum_{i=1}^n |Re \, z a_{ii}| + \max_{|z|=1} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |z a_{ij} + \overline{z a_{ji}}| \\
 &\leq \max_{i,j} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ii}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (|a_{ij}| + |a_{ji}|) \right\},
 \end{aligned}$$

as required.

- We have $Sp^2(A) \leq 2\|A\|_F^2$, thus $Sp^2(A) \leq 2 \sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|^2$.

Again by Theorem 3.1, we obtain

$$\begin{aligned}
 Sp^2(A) &\leq \max_{|z|=1} \left(2 \sum_{i=1}^n |Re \, z a_{ii}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |z a_{ij} + \overline{z a_{ji}}|^2 \right) \\
 &\leq \max_{i,j} \left(2 \sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (|a_{ij}| + |a_{ji}|)^2 \right),
 \end{aligned}$$

as required.

- We have

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq |a_{ii} - a_{jj}| + |\lambda_i - a_{ii}| + |\lambda_j - a_{jj}|.$$

By Gershgorin theorem we have

$$Sp(A) \leq \max_{i,j} \left(|a_{ii} - a_{jj}| + \sum_{k \neq i} |a_{ik}| + \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right).$$

Therefore, by Theorem 3.1 we get

$$\begin{aligned} Sp(A) &\leq \max_{i,j} \max_{|z|=1} \left\{ |Re z(a_{ii} - a_{jj})| + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} |za_{ik} + \overline{z}a_{ki}| + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} |za_{jk} + \overline{z}a_{kj}| \right\} \\ &\leq \max_{i,j} \left\{ |a_{ii} - a_{jj}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \neq i}}^n (|a_{ik}| + |a_{ki}|) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq j}}^n (|a_{jk}| + |a_{kj}|) \right\}, \end{aligned}$$

as required. $\square$

4 Statements and Declarations

On behalf of all authors, the corresponding author states that there is no conflict of interest.

References

- [1] E. R. Barnes and A. J. Hoffman , *Bounds for the spectrum of normal matrices*, Linear Algebra Appl. 201, 79–90 (1994)
- [2] E. Deutsch , *On the spread of matrices and polynomials*, Linear Algebra Appl. 22, 49–55 (1978)
- [3] R. Drnovšek, *Lower bounds for the spread of a nonnegative matrix*, Mathematical Inequalities & Applications 24, 793–799 (2021)
- [4] A. Frakis, *New bounds for the spread of a matrix using the radius of the smallest disc that contains all eigenvalues*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae 89, 87–96 (2020)
- [5] A. Frakis, *Localization of the eigenvalues of a matrix through its spread*, Mathematica 64 (84), 40–48 (2019)
- [6] J. K. Merikoskia and R. Kumar, *Characterizations and lower bounds for the spread of a normal matrix*, Linear Algebra Appl. 364, 13–31 (2003)

- [7] L. Mirsky, *The spread of a matrix*, Mathematika 3, 127–130 (1956)
- [8] R. Sharma, R. Kumar, R. Saini and P. Devi, *Inequalities for central moments and spreads of matrices*, Ann. Funct. Anal. 11, 815– 830 (2020)
- [9] R. Sharma, R. Kumar and S. Garga, *On inequalities involving eigenvalues and traces of Hermitian matrices*, Ann. Funct. Anal. 6, 78–90 (2015)

Riferimenti bibliografici

- [1] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics, Theory, Facts and Formulas*, II edition, Princeton University Press, 2009
- [2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer, 1997
- [3] D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, *Metodi Numerici per l'Algebra Lineare*, Zanichelli, Bologna, 1988
- [4] D. Bini, *SVD e compressione di immagini*, Università di Pisa, <https://people.dm.unipi.it/bini/Didattica/CalSci/dispense/old/svd.pdf>, 20 novembre 2013
- [5] R. Fletcher and D. C. Sorensen, *An algorithmic derivation of the Jordan canonical form*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, 1983, pp.12-16
- [6] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991
- [7] J. L. Howland and R. Vaillancourt, *Rational transformation from Schur to Jordan form*, Computers Math. Applic., Vol. 23, pp.91-101, 1992
- [8] P. H. Petkov, *Jordan–Schur Algorithms for Computing the Matrix Exponential*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2023, pp. 1-17
- [9] X. Zhan, *Matrix Inequalities*, Springer, 2002