

Per $\underline{x} \in \mathbb{C}^m$, la quantità $\frac{\underline{x}^H A \underline{x}}{\underline{x}^H \underline{x}}$ è un numero complesso, cioè un punto nel piano complesso (Re, Im) .

È evidente che, se il vettore $\underline{x}$ cambia, allora tale numero cambia anch'esso e descrive una curva o una regione nel piano complesso (Re, Im) .

Se $\underline{x}$ varia in tutto $\mathbb{C}^m$ (eccetto $\underline{x} = \underline{0}$), che regione si ottiene?

Definizione:

Per $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, l'insieme $F_A = \left\{ \frac{\underline{x}^H A \underline{x}}{\underline{x}^H \underline{x}} : \underline{x} \in \mathbb{C}^m, \underline{x} \neq \underline{0} \right\}$, sottoinsieme di $\mathbb{C}$, si dice "campo dei valori" di A .

Proprietà di F_A :

1) F_A contiene gli autovalori di A .

Dimostrazione:

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A . Allora esiste $\underline{v} \in \mathbb{C}^m$ non nullo tale che $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, quindi $\underline{v}^H A \underline{v} = \underline{v}^H \lambda \underline{v}$, da cui $\lambda = \frac{\underline{v}^H A \underline{v}}{\underline{v}^H \underline{v}}$

2) Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ Hermitiana. Allora $F_A = [\min \lambda_i(A), \max \lambda_i(A)]$

Dimostrazione:

Come conseguenza del teorema di Schur ~~per~~ applicato a matrici Hermitiane, si ha che esiste Q unitaria $m \times m$ tale che $AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, m$, ovvero esistono vettori $\underline{q}_i \in \mathbb{C}^m$: $A\underline{q}_i = \lambda_i \underline{q}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$. $\underline{q}_i^H \underline{q}_j = \delta_{\{i,j\}}$, $i, j=1, \dots, m$

Dunque, per $\underline{x} \in \mathbb{C}^m$ generico, si ha che

$$\frac{\underline{x}^H A \underline{x}}{\underline{x}^H \underline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2} \Rightarrow \min_j \lambda_j \leq \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2} \leq \max_j \lambda_j$$

Dimostrazione proprietà (2) di F_A (più dettagliata)
Per $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ Hermitiana si può trovare un insieme di autovettori $\underline{q}_i$ che formano una base ortonormale.

$$\text{Sia } \underline{x} \in \mathbb{C}^m \Rightarrow \underline{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i, \quad \underline{q}_i^H \underline{q}_j = \delta_{\{i,j\}}, \quad i, j = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow \underline{x}^H A \underline{x} = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i \right)^H A \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i \right) = \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \underline{q}_i^H \right) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A \underline{q}_i \right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \underline{q}_i^H \right) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \underline{q}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_i \alpha_j \lambda_j \underline{q}_i^H \underline{q}_j \right) \quad \underline{q}_i^H \underline{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\text{se } i=j \quad = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i$$

$$\underline{x}^H \underline{x} = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i \right)^H \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{q}_i \right) = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \underline{q}_i^H \alpha_i \underline{q}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \underline{q}_i^H \underline{q}_i = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{x}^H A \underline{x}}{\underline{x}^H \underline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2}$$

$$\Rightarrow \min_j \lambda_j \leq \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2} \leq \max_j \lambda_j$$

3) Hausdorff-Toeplitz dimostrano che F_A è per ogni A un sottoinsieme di C convesso. (*)

Quindi, qualunque sia A , F_A contiene il più piccolo poligono convesso che contiene gli autovalori di A .

Da dimostrare per esercizio

4) Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, con Q $n \times n$

unitaria e $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i=1, \dots, n$ (si dimostra che le matrici A che hanno questa proprietà sono le A tali che $AA^H = A^H A$, cioè per cui A e A^H commutano tra loro). Allora l'insieme F_A coincide con il più piccolo poligono convesso nel piano (Re, Im) che contiene gli autovalori di A .

Da dimostrare per esercizio

5) Esistono matrici A triangolari ^{non diagonali} (nota: per tali A , AA^H è diversa da $A^H A$) per cui F_A coincide con il più piccolo poligono convesso che contiene gli autovalori di A . (**)

Da dimostrare per esercizio

6) Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Sia $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria. Siamo $z_i \in \mathbb{C}$ tali che $\|U \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{bmatrix} U^H - A\|_F$ è minima

($\|\cdot\|_F$ = norma di Frobenius; ricorda: la norma di Frobenius è invariante per trasformazioni unitarie).

Calcolando i z_i (esprimendoli in termini della matrice A e delle colonne di U), si vede che i z_i sono tutti in F_A .

NOTA: I z_i sono gli autovalori della matrice

$U \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{bmatrix} U^H$ (Perché?) che approssima A , quindi si potrebbero usare come prime approssimazioni degli autovalori di A .

Da dimostrare per esercizio

(*) Dimostrare che F_A è convesso equivale a dimostrare che, comunque presi due punti in F_A ,

$$x = \frac{x^H A x}{x^H x} \text{ e } y = \frac{y^H A y}{y^H y}, \text{ si ha che il generico}$$

Punto z sul segmento che unisce x a y , cioè

$$z := \alpha x + (1-\alpha)y, \text{ con } \alpha \in [0,1] \text{ generico, sta in } F_A,$$

cioè, per ogni $\alpha \in [0,1]$, $\exists z \in \mathbb{C}^m$ (z dipende da α)

$$\text{tale che } z = \frac{z^H A z}{z^H z}$$

NOTA: dimostrare il risultato di Hausdorff-Toeplitz è difficile

(**) Suggestimento: scegliere A con tutti gli elementi non diagonali nulli eccetto l'elemento di posto $n-1, n$.

Provare a studiare F_A per tale A (per $n=2,3,4, \dots$)