TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Polinomi di Chebyshev

Convergenza delle successioni generate nell'interpolazione e nella minimizzazione di funzioni reali

Corso di laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per i Media

Luis Guillermo Evangelisti

Relatore: Prof. Carmine Di Fiore

14/04/2026

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Preliminari

Utilità dei polinomi di Chebyshev

Definizione polinomi di Chebyshev e problema di minimax

- Siano $0 < \mathrm{a} < \mathrm{b}$ due numeri reali. Consideriamo l'insieme dei polinomi di grado k che valgono 1 nell'origine:

$$\pi_k^1 = \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p = k,\ p(0) = 1 \ \}$$

Ci proponiamo di trovare il polinomio che minimizza la norma uniforme sull'intervallo $[a, b]$:

$$\min_{p_k \in \pi_k^1} \left(\max_{x \in [\mathrm{a,b}]} |p_k(x)| \right).$$

Si tratta di un classico problema di Chebyshev.

I polinomi di Chebyshev di prima specie T_k sono definiti per $x \in [-1,1]$ dalla relazione

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x)\,, \qquad k = 0,1,2, \dots$$

Essi soddisfano la ricorrenza

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x, \dots, T_{k+1}(x) = 2x\, T_k(x) - T_{k-1}(x), \qquad k = 2,3 \dots$$

e possono essere estesi a tutto $\mathbb{R}$ mediante la stessa ricorrenza. Una proprietà fondamentale è che su $[-1,1]$ si ha $|\ T_k(x)\ | \leq 1$, con uguaglianza nei punti $x = \cos(r\pi/k)$, $\ r = 0, \dots, k$. [3][4][11]

Polinomio ottimale

- Trasformiamo l'intervallo $[a, b]$ in $[-1,1]$ mediante l'affinità

$$\xi = \frac{b + a - 2x}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{a + b}{2} - \frac{b - a}{2}\xi.$$

Definiamo

$$\tilde{p}_k(x) = \frac{T_k\left(\frac{b + a - 2x}{b - a}\right)}{T_k\left(\frac{b + a}{b - a}\right)}. \qquad [3][4]$$

Poiché T_k è pari/dispari a seconda della parità di k, il denominatore è maggiore di 1 (in quanto $\frac{b+a}{b-a} > 1$ per $0 < \mathrm{a} < \mathrm{b}$). Inoltre $\tilde{p}_k(0) = 1$. Dunque $\tilde{p}_k \in \pi_k^1$.

- **Teorema di Chebyshev.** Il polinomio $\tilde{p}_k$ risolve il problema di minimax:

$$\max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\tilde{p}_k(x)| = \min_{p_k\in \pi_k^1} \left(\max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |p_k(x)| \right).$$

- *Dimostrazione.* Poniamo $M = \max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\tilde{p}_k(x)|$. Dalla definizione e dalla proprietà | $T_k(\xi)$ |≤ 1 per

$\xi \in [-1,1]$ si ha

$$M = \frac{1}{T_k\left(\frac{b+a}{b-a}\right)}.$$

Scegliamo i punti $x_r^{(k)}$ con $r = 1, \dots, k-1$ (corrispondenti ai punti stazionari di T_k nell'intervallo $(-1,1)$:

$$\frac{b+a-2x_r^{(k)}}{b-a} = \cos\frac{r\pi}{k} \implies x_r^{(k)} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos\frac{r\pi}{k}.$$

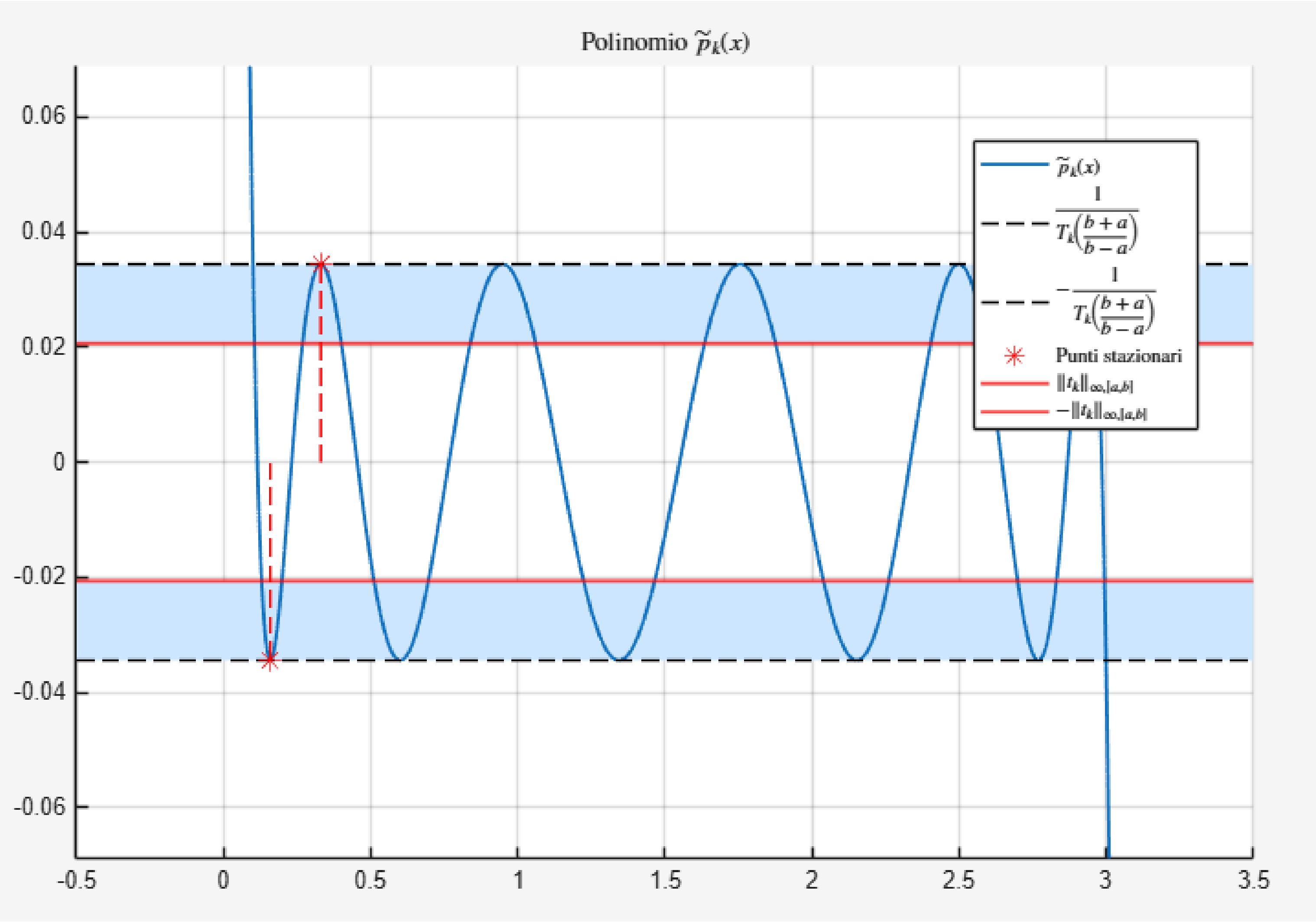
A questi aggiungiamo gli estremi $x_0^{(k)} = a$ e $x_k^{(k)} = b$ (dove la trasformazione dà $\xi = \pm 1$).

In tali $k+1$ punti, $\tilde{p}_k$ assume alternativamente i valori $\pm M$. Supponiamo per assurdo che esista un polinomio $t_k \in \pi_k^1$ con $\| t_k \|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |t_k(x)| < M$.

Allora la differenza $d(x) = \tilde{p}_k(x) - t_k(x)$ è un polinomio di grado al più k e verifica

$$d(0) = \tilde{p}_k(0) - t_k(0) = 1 - 1 = 0.$$

Nei punti $x_r^{(k)}$ $(r = 0, \dots, k)$ il segno di d coincide con quello di $\tilde{p}_k$,perché il contributo di t_k è in modulo minore di M. Quindi d cambia segno in ciascun intervallo $\left(x_r^{(k)}, x_{r+1}^{(k)}\right)$ con $r = 0, \dots, k - 1$, e di conseguenza si annulla in almeno un punto all'interno di ciascuno di essi. Inoltre $d(0) = 0$ fornisce un'ulteriore radice. In totale d avrebbe almeno $k + 1$ zeri reali distinti [3][4], il che è impossibile per un polinomio non nullo di grado $\leq k$. Dunque t_k non può esistere e $\tilde{p}_k$ è ottimale. ■



TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Minimizzazione di *f* con il metodo del gradiente coniugato

Affinare lo studio della convergenza del metodo con i polinomi di Chebyshev

Definizione di f e del gradiente coniugato (GC)

- Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva. Esiste un'unica soluzione $x^* = A^{-1}b$. Un modo per calcolare x^* è minimizzare la funzione quadratica

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x,$$

Infatti il gradiente $\nabla f(x) = Ax - b = -r(x)$ (dove $r(x) = b - Ax$ è il residuo) si annulla in x^* e

$\nabla^2 f(x) = A$, che è definita positiva, quindi f è strettamente convessa e il suo minimo è proprio x^*.

- Definiamo la **norma** (norma indotta da A) come

$$\| x \|_A = \sqrt{x^T Ax}.$$

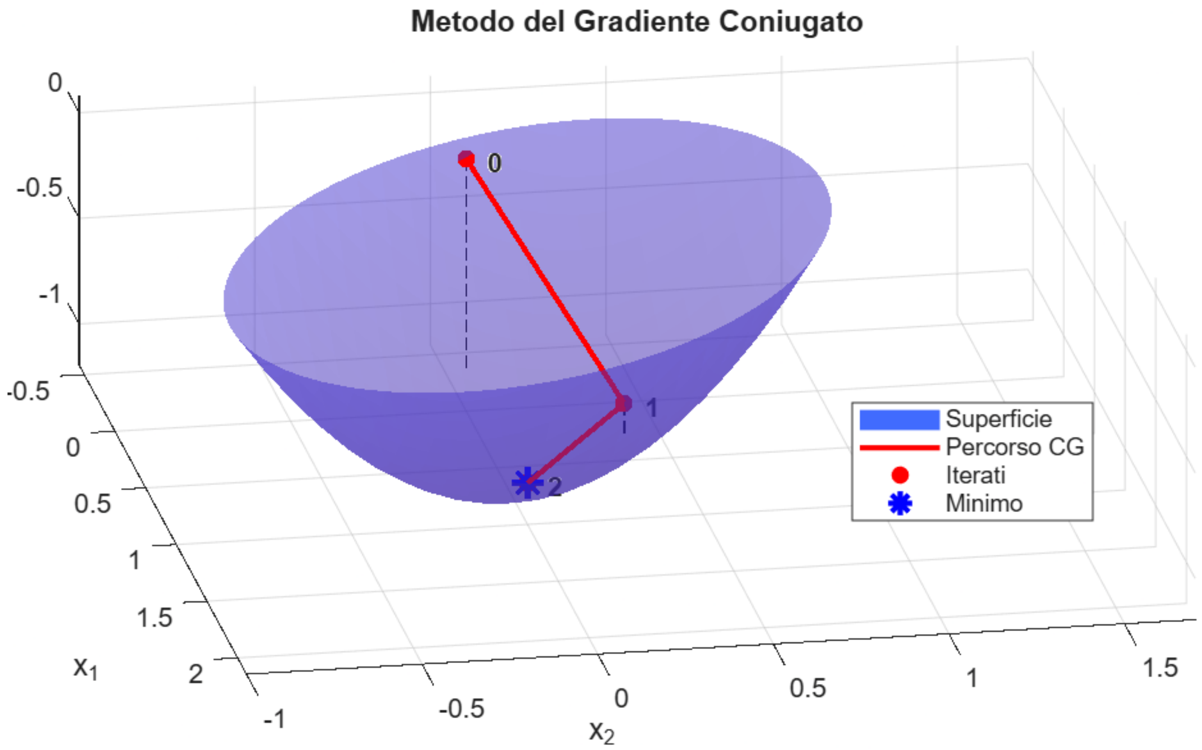
Questa norma è particolarmente adatta al problema perché

$$f(x) - f(x^*) = \frac{1}{2} \| x - x^* \|_A^2. \qquad [1][7]$$

Pertanto, misurare l'errore in questa norma equivale a valutare di quanto ci si discosta dal valore minimo della funzione.

- Un metodo per minimizzare f è il metodo del gradiente coniugato [8]. Esso genera una successione di vettori x_k a partire da un vettore iniziale x_0 e una direzione iniziale $d_0 = r_0 = b - Ax_0$ tramite le formule

$$\begin{cases} \omega_k = \dfrac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}, x_{k+1} = x_k + \omega_k d_k, \\ r_{k+1} = r_k - \omega_k A d_k, \\ \beta_{k+1} = \dfrac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}, d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k, \ \mathrm{k} = 0, 1, \dots \end{cases}$$



Una proprietà fondamentale è che x_k minimizza l'errore in norma tra tutti i vettori della forma $x_0 + q(A) r_0$ con q polinomio di grado $k-1$. Equivalentemente, l'errore $e_k = x_k - x^*$ soddisfa

$$\boxed{\| e_k \|_A = \min_{p_k \in \pi_k^1} \| p_k(A) e_0 \|_A}$$

dove π_k^1 è l'insieme dei polinomi di grado k con $p_k(0) = 1$. Questa proprietà si dimostra sfruttando le relazioni di ortogonalità e A-ortogonalità dei residui e delle direzioni, ed è alla base dell'analisi di convergenza.

Stima della convergenza di GC

- Sia $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ gli autovalori di A. Poiché A è simmetrica, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata dagli autovettori q_i di A. Scomponendo e_0 in tale base ($e_0 = \sum_{i=1}^{n} e_0^{(i)} q_i$) , si ottiene

$$\| p_k(A) e_0 \|_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; p_k(\lambda_i)^2 (e_0^{(i)})^{\,2} \leq \| e_0 \|_A^2 \max_i | p_k(\lambda_i) |^2 \leq \| e_0 \|_A^2 \max_{\lambda \in E} | p_k(\lambda) |^2$$

con $\sigma(A) \subseteq E$. Pertanto scegliendo $E = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

$$\frac{\| e_k \|_A}{\| e_0 \|_A} \leq \min_{p_k \in \pi_k^1} \left(\max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} | p_k(\lambda) | \right).$$

Il problema di minimax appena scritto è come quello precedente, con $a = \lambda_{\min}$ e $b = \lambda_{\max}$. Utilizzando la trasformazione affine

$$\xi = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min} - 2\lambda}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}},$$

che mappa l'intervallo $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ in $[-1,1]$, e ricordando l'espressione del polinomio ottimale (teorema di Chebyshev), si ha

$$\min_{p_k \in \pi_k^1} \left(\max_{\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]} | p_k(\lambda) | \right) = \frac{1}{T_k\left(\frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right)} = \frac{1}{T_k\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)}.$$

dove $\mu = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \geq 1$ è il numero di condizionamento di A in norma 2.

Infine, dall'identità $T_k\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{\mu}+1}{\sqrt{\mu}-1}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1}\right)^k\right]$ segue che $\frac{1}{T_k\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1}\right)^k$.

In definitiva, otteniamo la stima di convergenza classica

$$\boxed{\frac{\| e_k \|_A}{\| e_0 \|_A} \leq 2\left(\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1}\right)^k} \qquad [1][7][8]$$

Da cui si deduce che se μ è piccolo GC è rapido e se μ è grande GC può essere lento.

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Interpolazione polinomiale e costanti di Lebesgue

Controllo della costante di Lebesgue utilizzando come nodi gli zeri dei polinomi di Chebyshev

Stima dell'errore di interpolazione con i nodi di Chebyshev

- Sia $f \in C^n([\mathrm{a,b}])$ e siano $x_1, \dots, x_n$ nodi distinti in $[\mathrm{a,b}]$. Il polinomio interpolatore $p_{n-1}(x)$ di grado $\leq n - 1$ che soddisfa $p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ per $i = 1, \dots, n$ è unico. L'errore di interpolazione è dato da

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{(n)!}\,\omega_n(x), \qquad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \qquad [2][3]$$

dove ξ_x è un punto opportuno nell'intervallo che contiene i nodi x_i e $x \in [a, b]$. Se $f^{(n)}$ è continua su $[\mathrm{a,b}]$ possiamo maggiorare:

$$\max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\, f(x) - p_{n-1}(x) \,| \leq \frac{\max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\, f^{(n)}(x) \,|}{n!} \max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\, \omega_n(x) \,| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\, f^{(n)}(x) \,| \,.$$

La quantità $\max_{x\in[\mathrm{a,b}]} |\, \omega_n(x) \,|$ dipende solo dai nodi quindi per ridurre l'errore di interpolazione (almeno per funzioni con derivata n-esima limitata), conviene scegliere i nodi in modo da minimizzare questa quantità.

E' comunque evidente che i polinomi p_{n-1} per $n \to \infty$ convergono uniformemente a $f \in [\mathrm{a,b}]$ se esistono costanti positive M e c per cui $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq Mc^n$ in $[\mathrm{a,b}]$.

Il problema

$$\min_{x_1,\ldots,x_n\in[\mathrm{a,b}]}\left(\max_{x\in[\mathrm{a,b}]}|(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\right)$$

è noto e la soluzione è data dai nodi di Chebyshev opportunamente traslati. Per l'intervallo standard $[-1,1]$, i nodi di Chebyshev sono gli zeri del polinomio di Chebyshev di grado n:

$$x_r=\cos\left(\frac{2\mathrm{r}-1}{2n}\pi\right),\qquad \mathrm{r}=1,\ldots,n.$$

Il polinomio monico di grado n che ha questi zeri è

$$\omega_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\,T_n(x),$$

dove T_n è il polinomio di Chebyshev di grado n. Poiché $|\,T_n(x)\,|\leq 1$ per $x\in[-1,1]$ si ha

$$\max_{x\in[-1,1]}|\,\omega_n(x)\,|=\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad [2][3]$$

Otteniamo la stima

$$\max_{x\in[-1,1]}|\,f(x)-p_{n-1}(x)\,|\leq\frac{1}{2^{n-1}\,\mathrm{n}!}\;\max_{x\in[-1,1]}|\,f^{(n)}(x)\,|.$$

Se i nodi sono scelti come la traslazione affine dei nodi di Chebyshev da $[-1,1]$ a $[a, b]$, cioè

$$x_r = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\ \cos\left(\frac{2r-1}{2n}\pi\right),$$

allora

$$\omega_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\ T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

e quindi

$$\max_{x\in[a,b]} |\ \omega_n(x)\ | = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

La stima dell'errore diventa

$$\max_{x\in[a,b]} |\ f(x) - p_{n-1}(x)| \le \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1} n!}\ \max_{x\in[a,b]} |\ f^{(n)}(x)\ |.$$

Conseguenza: se $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \le Mc^n\ \forall n$ allora $\|f - p_{n-1}\|_\infty \to 0$ per $n \to \infty$ i.e. la successione dei polinomi interpolatori converge uniformemente in $[a, b]$ alla funzione f. In realtà, con i nodi di Chebyshev si ha che $\|f - p_{n-1}\|_\infty \to 0$ sotto l'ipotesi su f, molto meno restrittiva, $f \in C^1([a, b])$ [2]. Ad esempio, la funzione f di Runge, per cui confronteremo graficamente, al variare di n, i p_{n-1} per nodi equidistanti con i p_{n-1} per nodi di Chebyshev, soddisfa questa ipotesi, ma non soddisfa l'ipotesi $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \le Mc^n$.

Interpolazione di Lagrange

- Sia $I = [-1,1]$. Dati n nodi distinti $x_1, x_2, \dots, x_n$ in I e una funzione $f \in C(I)$, il polinomio interpolatore di Lagrange L_{n-1} di f di grado $\leq n-1$, cioè t.c. $L_{n-1}(x_i) = f(x_i),\ i = 1, \dots, n,$ è definito da

$$L_{n-1}(x) = L_{n-1}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\, l_i(x), \qquad [2][9][10]$$

dove

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

sono i polinomi fondamentali di Lagrange. Essi soddisfano l'uguaglianza $l_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Costante di Lebesgue

Per studiare l'errore di interpolazione in norma uniforme, introduciamo la **funzione di Lebesgue**

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=1}^{n} | l_i(x) |,$$

e la **costante di Lebesgue**

$$\Lambda_n = \max_{x \in I} \lambda_n(x).$$

Il seguente teorema mette in relazione l'errore di interpolazione con l'errore della migliore approssimazione uniforme polinomiale di f in I.

- **Teorema 2.1 (Lebesgue).**
  Sia $f \in C(I)$ e $\| g \|_\infty = \max_{x \in I} |g(x)|$ Allora

$$E_{n-1}(f) \leq \| f - L_{n-1} \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)\, E_{n-1}(f),$$

dove $E_{n-1}(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \| f - p \|_\infty = \| f - p^* \|_\infty$

è l'errore di migliore approssimazione uniforme.

- *Dimostrazione.* Sia $p^* \in \mathcal{P}_{n-1}$ il polinomio di migliore approssimazione uniforme cioè t.c. $\| f - p^* \|_\infty = E_{n-1}(f)$. Poiché l'interpolazione è un operatore lineare che lascia invariati i polinomi di grado $\leq n-1$, si ha $p^* = L_{n-1}(p^*)$. Allora

$$f - L_{n-1}(f) = (f - p^*) + L_{n-1}(p^* - f).$$

Valutando in un punto $x \in I$ e usando la definizione della costante di Lebesgue,

$$| f(x) - L_{n-1}(f)(x) | \leq \| f(x) - p^*(x) \|_\infty + \sum_{i=1}^{n} | l_i(x) | \ | p^*(x_i) - f(x_i) | \leq E_{n-1}(f) + \lambda_n(x)\, E_{n-1}(f).$$

Prendendo il massimo su x si ottiene la tesi. ■ [2][5][6]

Per il teorema di Weierstrass è noto che $E_{n-1}(f) \to 0$ se $n \to +\infty$ pertanto, per garantire la convergenza uniforme degli interpolanti, è necessario che Λ_n cresca lentamente, possibilmente in modo limitato o logaritmico.

Nodi equispaziati e nodi di Chebyshev

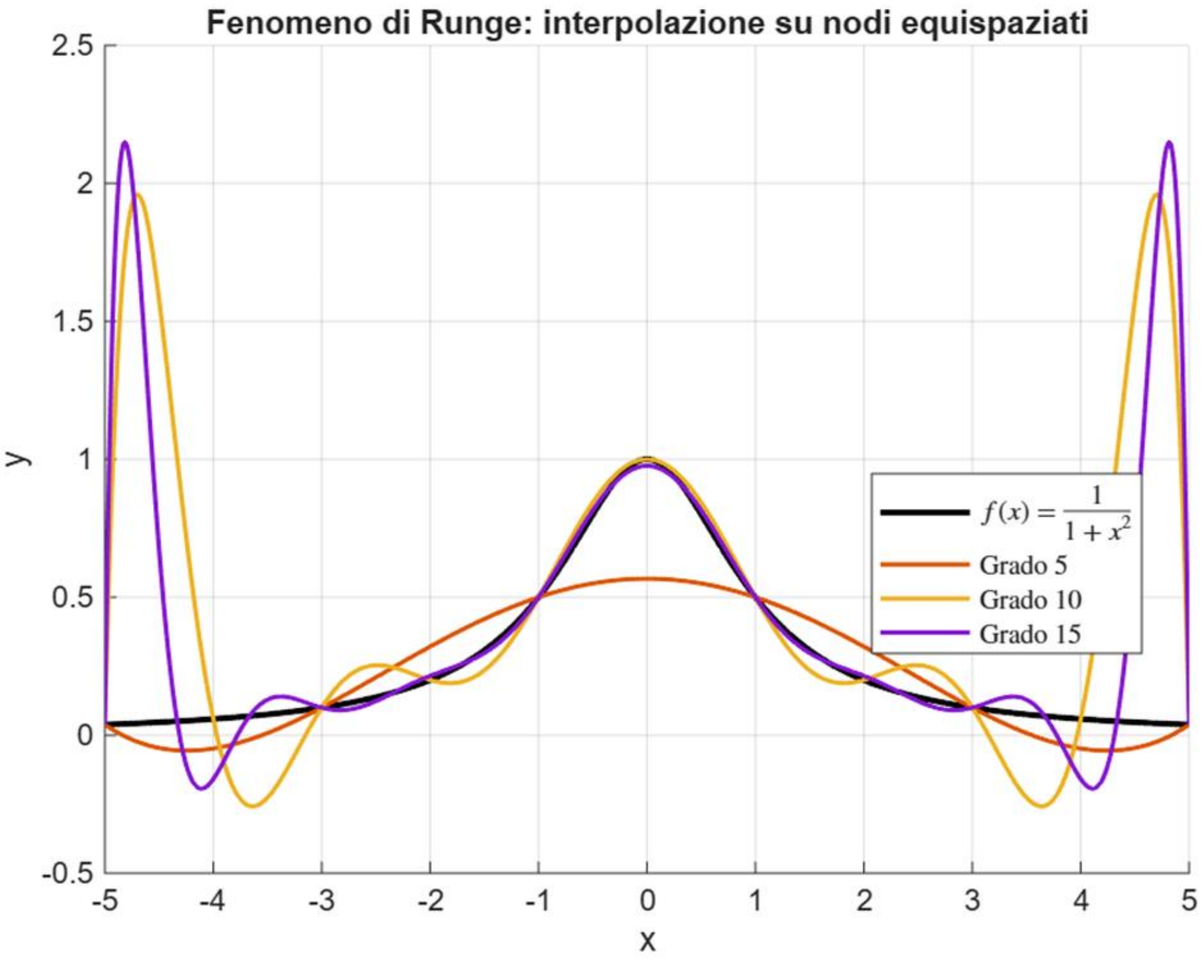
- Consideriamo la scelta più semplice: nodi equispaziati su $[-1,1]$, per $n = 2m + 1$ (dispari):

$$x_j^{(n)} = -1 + \frac{2(j-1)}{n-1}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Si può dimostrare che la corrispondente costante di Lebesgue Λ_n cresce esponenzialmente. In particolare, per $m \geq 2$ esistono costanti positive K_1, K_2 tali che

$$K_1(\sqrt{2})^m < \Lambda_{2m}(E) < K_2(\sqrt{2}\,e)^{2m} \qquad [5][6]$$

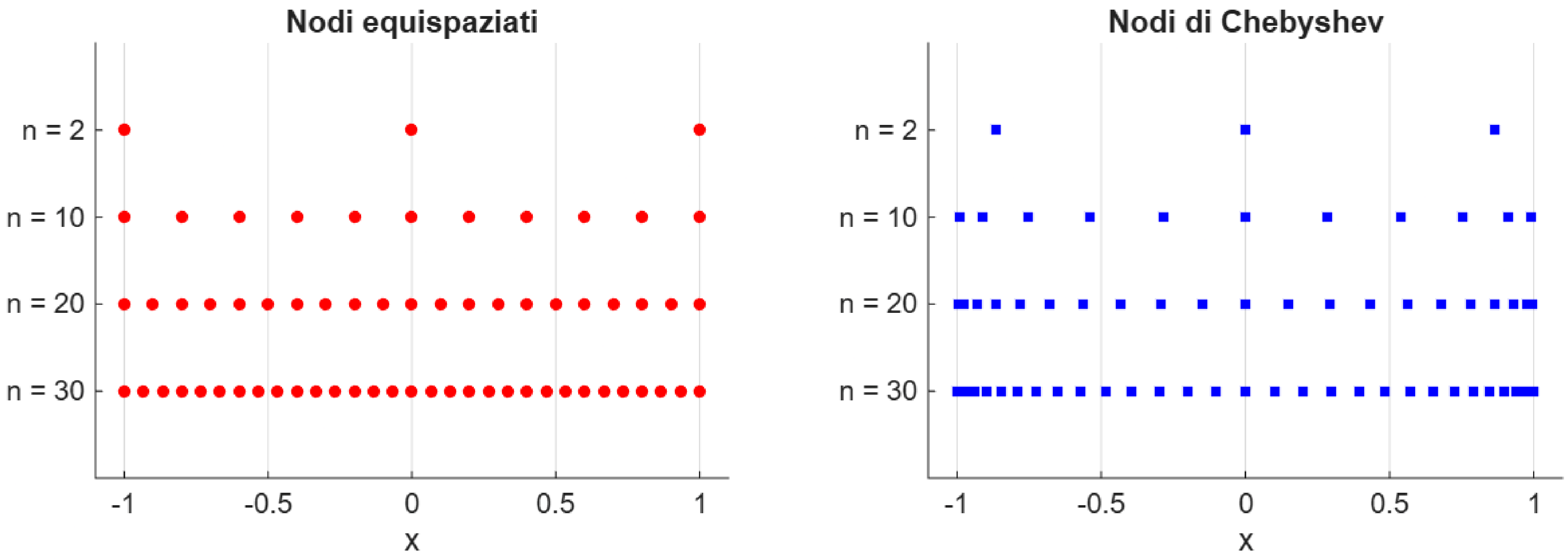
Questo comportamento esponenziale spiega il fenomeno di Runge: anche per funzioni infinitamente differenziabili, l'interpolazione su nodi equispaziati può divergere alle estremità dell'intervallo.

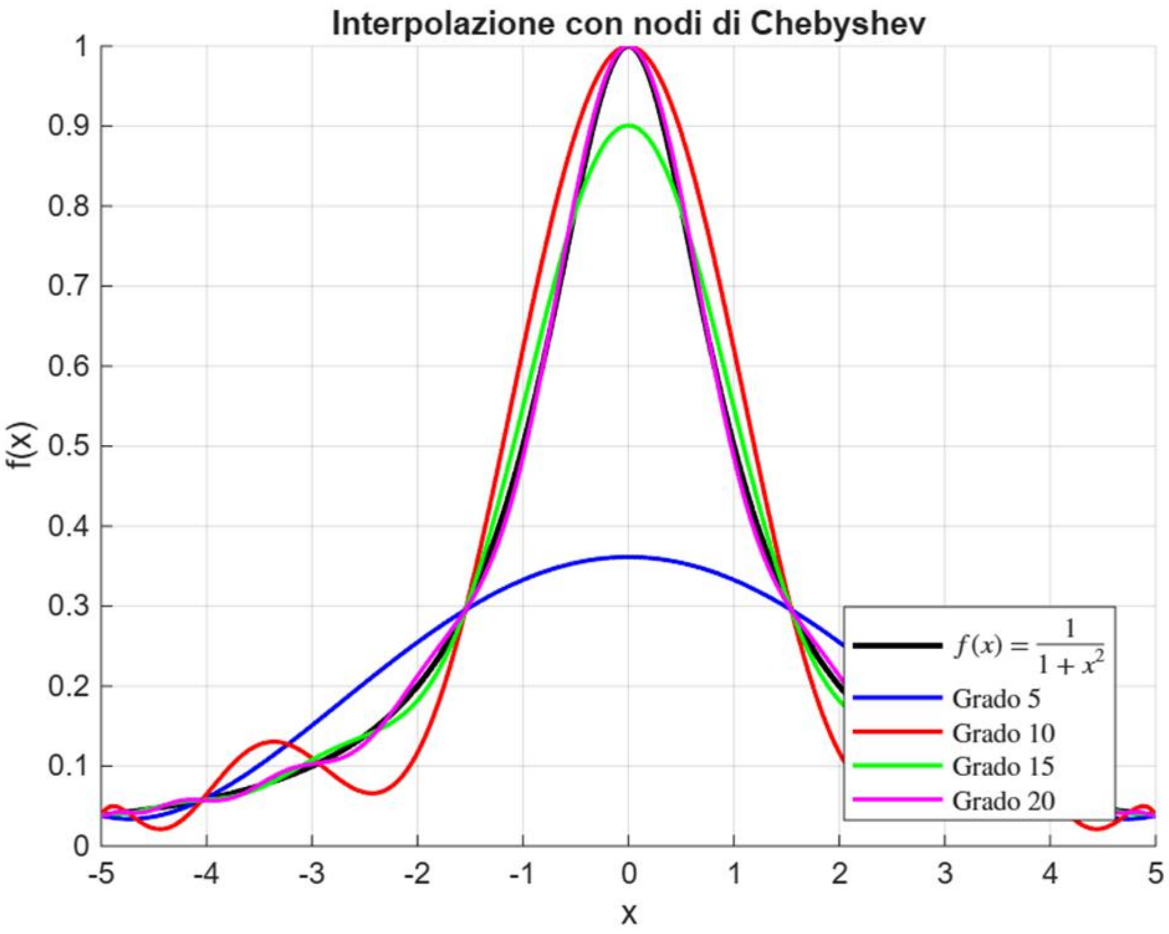


Scegliamo ora i nodi come le radici dei polinomi di Chebyshev (o anche gli estremi). Per semplicità, consideriamo le radici di $T_n(x)$:

$$x_r^{(n)} = \cos\theta_r\,, \qquad \theta_r = \frac{(2\mathrm{r}-1)\pi}{2n}, \qquad \mathrm{r} = 1, \dots, n. \qquad [2][3]$$

Indichiamo con T questa scelta di nodi, per essi si ha una stima ottimale.





- **Teorema 2.2.** Per ogni $n \geq 1$,

$$\Lambda_n(T) < \frac{2}{\pi}\log n + 4.$$

La dimostrazione sfrutta la rappresentazione della funzione di Lebesgue in termini di cotangenti e la simmetria dei nodi, come illustrato nei testi di analisi numerica. [4][6]

Pertanto, per i nodi di Chebyshev la costante di Lebesgue cresce solo logaritmicamente, garantendo la convergenza uniforme per ogni funzione $f \in C^1$ (teorema di Bernstein). Inoltre si può dimostrare che questa scelta è quasi ottimale: non esiste una successione di nodi per cui Λ_n cresca più lentamente di $\log n$.

I nodi di Chebyshev minimizzano, tra tutte le possibili scelte di nodi, la costante di Lebesgue (a meno di una costante moltiplicativa). I nodi di Chebyshev sono quindi una scelta ottimale per l’interpolazione polinomiale se si desidera una buona approssimazione uniforme su tutto l’intervallo.

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

References

- **[1] Axelsson, O., & Barker, V. A.** (1984). *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation*. Academic Press. (Capitolo 1 – introduzione al metodo del gradiente coniugato)
- **[2] Sommariva, A.** (2019). *Interpolazione polinomiale*. Dispensa, Università degli Studi di Padova. (contiene esempi e teoria sull'interpolazione di Lagrange, errore di interpolazione, fenomeno di Runge e costanti di Lebesgue, in particolare Teorema di Bernstein)
- **[3] Davis, P. J.** (1975). *Interpolation and Approximation*. Blaisdell. (tratta costanti di Lebesgue per nodi equispaziati e di Chebyshev)
- **[4] Rivlin, T. J.** (1969). *An Introduction to the Approximation of Functions*. Dover Publications. (Contiene la dimostrazione della stima logaritmica della costante di Lebesgue per i nodi di Chebyshev)
- **[5] Natanson, I. P.** (1964). *Constructive Function Theory*, Vol. III. Ungar. (Citato nel teorema 4.7 sulla divergenza dell'interpolazione su nodi equispaziati per la funzione |x|)
- **[6] Powell, M. J. D.** (1981). *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press. (Fonte per la rappresentazione della costante di Lebesgue in termini di cotangenti e per la dimostrazione del Teorema 2.2)
- **[7] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F.** (2007). *Matematica numerica* (4ª ed.). Springer. (Testo di riferimento per l'analisi numerica, inclusi polinomi di Chebyshev e gradiente coniugato)
- **[8] Golub, G. H., & Van Loan, C. F.** (2013). *Matrix Computations* (4ª ed.). Johns Hopkins University Press. (Per la derivazione e l'analisi del metodo del gradiente coniugato)
- **[9] Saad, Y.** (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (2ª ed.). SIAM. (Approfondimenti sul GC e sul precondizionamento)
- **[10] Gautschi, W.** (2012). Interpolation before and after Lagrange. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, 70(4), 347–368. (Storia e teoria dell'interpolazione)
- **[11] Wikipedia** (2026). Voci: *Fenomeno di Runge*, *Interpolazione di Lagrange*, *Nodi di Chebyshev*, *Polinomi di Chebyshev*, *Gradiente coniugato*.

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA