

Sia

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$$

una matrice generica non, con gli elementi diagonali a_{ii} tutti non nulli, e sia B la sua sottomatrice in basso a destra $(n-1) \times (n-1)$.

(i)

Esprimere la matrice di iterazione di Gauss-Seidel associata ad A (che è ben definita perché gli a_{ii} , $i=1, \dots, n$, sono tutti non nulli) in funzione della matrice di iterazione di Gauss-Seidel associata a B (che è anch'essa ben definita, perché i b_{ii} , $i=1, \dots, n-1$, sono anch'essi tutti non nulli, essendo uguali agli a_{ii} , $i=1, \dots, n-1$).

Per chiarezza, puoi chiamare A_{GS} la prima matrice di iterazione e B_{GS} la seconda matrice di iterazione.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & B & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} \quad a_{ii} \neq 0$$

$$B_{GS} = -U_B^{-1} N_B$$

$$\text{dove } U_B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & b_{n-1,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = - \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & b_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{GS} = -U_A^{-1} N_A$$

$$\text{dove } U_A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad N_A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{lascio } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(I_m + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \times \text{calcolare } U_A^{-1}$$

e divido N_A in blocchi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & & U_B & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} A &= a_{11} & 1 \times 1 \\ B &= 0 & 1 \times (n-1) \\ C &= a_{21} & (n-1) \times 1 \\ D &= U_B & (n-1) \times (n-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & U_B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ \frac{1}{a_{11}} U_B^{-1} a_{21} & U_B^{-1} \end{pmatrix}$$

Divido N_A nello stesso modo

$$N_A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & N_B & \end{pmatrix} \quad \text{e paragono } a_{12} \dots a_{1n} \quad 1 \times (n-1)$$

$$U_A^{-1} N_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ \frac{1}{a_{11}} U_B^{-1} a_{21} & U_B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & N_B \end{pmatrix} \quad \text{righe} \times \text{col.} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{N}{a_{11}} \\ 0 & (U_B^{-1})^T N_B - \frac{1}{a_{11}} (U_B^{-1})^T a_{21} N \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{a_{11}} \mid 0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & 1 \times 1 \\ \left(\frac{1}{a_{11}} \mid 0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ N_B \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}} N & 1 \times (n-1) \\ \left(-\frac{1}{a_{11}} U_B^{-1} a_{21} \mid U_B^{-1} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & (n-1) \times 1 \\ \left(-\frac{1}{a_{11}} U_B^{-1} a_{21} \mid U_B^{-1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ N_B \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_{11}} U_B^{-1} a_{21} N + U_B^{-1} N_B \end{cases}$$

$$A_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{N}{a_{11}} \\ 0 & B_{GS} - \frac{1}{a_{11}} (U_B^{-1})^T a_{21} N \end{pmatrix}$$

```

(ii)
Dimostrare che
rho(A_{GS}) :=
= max( |frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}|, |rho(B_{GS})| ),
se facciamo una ipotesi sulle prime due colonne di A, e cioè che il
vettore colonna
a_{[21]}
a_{[31]}
...
a_{[n1]}
sia uguale ad un multiplo alpha del vettore colonna
a_{[22]}
a_{[32]}
...
a_{[n2]}
(alpha deve essere necessariamente uguale a a_{[21]}/a_{[22]}, perché
a_{[22]} per ipotesi, e' diverso da zero).

```

$$\rho(A_{GS}) = \max \left\{ \left| \frac{a_{11} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \right|, \rho(B_{GS}) \right\} ?$$

• Se $\alpha = \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{Col}_1(\mathbb{B})$

$$A_{GS} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{N}{a_{11}} \\ \hline 0 & b_{gs} - \frac{a_{21}}{a_{11} a_{22}} (u_B)^T \text{Col}_1(\mathbb{B}) \cdot N \end{array} \right) \quad N = \text{vett. riga}$$

$$b_{gs} - \underbrace{\alpha (u_B)^T \text{Col}_1(\mathbb{B}) \cdot N}_{\substack{\text{prodotto beq definito} \\ \text{sottrazione beq definita}}} \quad , \quad \alpha = \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22}}$$

$(n-1) \times (n-1)$ $(n-1) \times (n-1)$ $(n-1) \times (n-1)$

$$\rho(A_{GS}) = \max_i |\lambda_i(A_{GS})|$$

contribuisce a $\rho(A_{GS})$ con $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{N}{a_{11}} \\ \hline 0 & b_{gs} - \frac{a_{21}}{a_{11} a_{22}} (u_B)^T \text{Col}_1(\mathbb{B}) \cdot N \end{array} \right)$$

contribuisce col resto di $\mathbb{B}(A_{GS})$

Il prob è $b_{gs} - \frac{a_{21}}{a_{11} a_{22}} (u_B)^T \text{Col}_1(\mathbb{B}) \cdot N \times \rho(A_{GS})$ perché contribuiscono le mat. impiegate $\times$ il raggio spettrale
e $\rho(A+B) \neq \rho(A) + \rho(B)$ in generale

ma uso il raggio $\times$ vedere la dimensione del sottospazio che modifica $\text{Col}_1(\mathbb{B})$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ non modifica la dimensione del sottosp.)

$$\text{rg} (u_B^{-1}, \text{Col}_1(\mathbb{B})N) \leq \min (\text{rg}(u_B^{-1}), \text{rg}(\text{Col}_1(\mathbb{B})N))$$

- u_B è 1 impiegate con elem. diagonali $\neq 0 \Rightarrow u_B^{-1}$ è 1 imp. con $\text{rg max} \Rightarrow \text{rg}(u_B^{-1}) = n-1$
- $\text{rg}(\text{Col}_1(\mathbb{B})N)$? è un prodotto del tipo $u_B^{-1} \text{ur}(u_B^{-1}) = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, 1^T u_B^{-1} \end{pmatrix}$ e $\text{rg}(u_B^{-1}) = 1$
vett.col. vett.riga
 $\Rightarrow \text{rg}(\text{Col}_1(\mathbb{B})N) = 1$ e $\text{ur}(\text{Col}_1(\mathbb{B})N) = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, N \text{Col}_1(\mathbb{B})^T \end{pmatrix}$

$\text{ur}(\text{Col}_1(\mathbb{B})N) = \text{mat. } (n-1) \times (n-1)$ della proiezione lungo $\text{Col}_1(\mathbb{B})$

$u_B^{-1} = \text{mat. "proiezione" lungo } u$, nel senso che prende x : calcola $x^k x$ } tutto questo molto scalato (ed è mat. proiezione se $\|u\|_2 = \|x\|_2 = 1$)
e lo diremo su u

$$\Rightarrow \text{rg} (u_B^{-1}, \text{Col}_1(\mathbb{B})N) \leq 1 \Rightarrow u_B^{-1} \text{Col}_1(\mathbb{B})N \text{ ha tutti autoval. o tranne 1 (forse)}$$

- Se $\text{rg}(\ast) = 0$ ho tt autoval nulli e $\rho(A_{GS}) = \rho(B_{GS})$
- Se $\text{rg}(\ast) = 1$ guardo a qll autoval. $\neq 0$ quanto è grande

- Se $\text{rg}(*) = 0$ ho 11 autoval nulli e $\rho(A_{gs}) = \rho(B_{gs})$
- Se $\text{rg}(*) = 1$ guardo a quell'autoval $\neq 0$ quanto è grande
 $\text{rg}(*) = 1 \Rightarrow H_2^{-1}$ anche se ha $\text{rg} \max(n-1)$ non altera $\text{rg}(\text{Col}_1(B))$ $\Rightarrow$ non modifica la dimensione del sottospazio generato da $\text{Col}_1(B)$ ($\text{Col}_1(B) \perp$ "proietta" nella direzione di $\text{Col}_1(B)$)
 $\Rightarrow$ il prodotto $H_2^{-1} \text{Col}_1(B)$ forse modifica la direzione di $\text{Col}_1(B)$ e lo scala di nuovo
 $\Rightarrow$ unico prob. è vedere quanto $\text{Col}_1(B)$ viene contratto/esteso (2) e confrontare con $\rho(B_{gs})$

cambio di base
 $H_2^{-1} \text{Col}_1(B) \perp$
 proiett.

però $\text{Col}_1(B) = \text{Col}_1(H_2)$, ma $H_2^{-1} \text{Col}_1(H_2) = e_1$, perché (colonna di B) indicano le coord. dei vet. della base canonica in ora vengono trasformati: $e_1 \xrightarrow{H_2} \text{Col}_1(H_2)$

$\xrightarrow{H_2^{-1}} H_2^{-1} \text{Col}_1(H_2) = e_1$
 associatività
 prodotto matrici

$$\Rightarrow e_1 \perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (a_{11}, \dots, a_{1n}) = \begin{pmatrix} a_{12} - a_{1n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(H_2^{-1} \text{Col}_1(H_2) \perp) = \kappa \left(\max_i |\lambda_i(e_1 \perp)| \right)$$

$$\sigma(*) = \{0, \kappa a_{12}\} = \left\{0, \frac{a_{12} a_{12}}{a_{11} a_{11}}\right\} \Rightarrow \rho(*) = \left| \frac{a_{12} a_{12}}{a_{11} a_{11}} \right|$$

Perché $B_{gs} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$ si ha che $\text{Col}_1(B_{gs})$ non influenza $\text{Col}_1(B) = \text{Col}_1(H_2)$ con autoval $\neq 0$

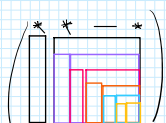
$\Rightarrow$ il + grande autoval. che agisce sul sp. $\text{Span}(\text{Col}_1(B))$ è 0 o $\left| \frac{a_{12} a_{12}}{a_{11} a_{11}} \right|$

e poiché B_{gs} può agire sul resto dello spazio κ^{n-2} con autoval. $\neq 0$, si ha

$$\rho(A_{gs}) = \max \left\{ \frac{a_{12} a_{12}}{a_{11} a_{11}}, \rho(B_{gs}) \right\}$$

Il verso è che la mat. $\kappa H_2^{-1} \text{Col}_1(H_2) \perp$ agisce su un sottosp. di dim 1 dato da $\text{Col}_1(H_2)$, che è il sottosp. su cui "non agisce" $B_{gs} \Rightarrow \rho(A_{gs}) = \max\{\dots, \dots\}$

Nota:
 Se, oltre all'ipotesi in (i), si fa una analogia ipotesi sulle prime due colonne di B , e così via, si fa una analogia ipotesi sulle prime due colonne di tutte le sottomatrici quadrate in basso a destra di A , si ottiene una matrice A non con una struttura molto particolare, la cui matrice di iterazione di Gauss-Seidel A_{gs} è triangolare superiore e quindi $\rho(A_{gs})$ è noto esplicitamente.
 Nel caso $n=4$, tale matrice coincide con la matrice A dell'esercizio che si ha assegnato la sera prima del 11 novembre (l'esercizio che hai affrontato in modo alternativo, incontrando il concetto di complemento di Schur).



$$\kappa_1 = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

CASO $n=4$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad a_{11} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} = \frac{a_{32}}{a_{33}} \begin{pmatrix} a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$$

$$a_{43} = \frac{a_{43}}{a_{44}} a_{44}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{a_{ij}'}{a_{ii}'} = a_j & i=3, j=2 \\ & i=4, j=3 \\ \frac{a_{32}}{a_{33}} \end{matrix}$$

? $\frac{a_{21}a_{32}a_{43}}{a_{22}a_{33}}$? nella consegna dell'es. ho scritto questo ??

- Con l'hp sopra, la mat. generica è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \end{pmatrix} \quad i=2$$

$$(A)_{ij}' = \begin{cases} \frac{a_{ij}'}{a_{ii}'} = a_j & i=2, \dots, n, j=i-1 \\ a_{ij}' & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{prendendo le sottomat. in basso a} \\ \text{destra di volta in volta} \end{matrix}$$

- A_{gs} è Δ sup. con le hp. sopra perché con le colonne proprie a i e i ottengo "proiezioni", ma non proprio sui vari sottosp. colonna, su cui A_{gs} non ha una vera azione, e in cui l'elem. diagonale di ciascuna colonna (1° elem. della colonna della sottomat. in basso a destra) è l'autoval. che indica di quanto venga modificata, e vengono tutte queste modificate secondo il pattern $\frac{a_{ij}a_{ji}'}{a_{ii}a_{jj}'}$, $j=i-1$, e $i=0, \dots, n$

$$\Rightarrow f(A_{gs}) = \left| \frac{a_{ij}a_{ji}'}{a_{ii}a_{jj}'} \right|_{j=i-1, i=0, \dots, n}$$