Analisi Numerica 3 (ora Elementi di Analisi Numerica) - Esame scritto 11 Maggio 2009 - Luglio 2009

Hanno svolto questo esame scritto: Sara Shalipour Jafari (Mat Tr), Dario Dussoni (Inf Sp), Vespan Lucian (Mat Sp), Giorgio Desiderim (Inf Sp), Valerio Cardinali (Mat Tr), Gianluca Ceruti (Mat Tr) (gli ultimi tre lo hanno svolto a casa)

a) Sia $I = \int_0^1 f(t)dt$, $f(t) = (4/9)^t$, e $I_{1/n}$ la formula dei trapezi per l'approssimazione di I con $h = 1/n$.
(1) Utilizzando i valori $f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)$ e il metodo di Romberg, scrivere una approssimazione di I
(2) Ricavare una espressione compatta per $I_{1/n}$ (in cui non compaiano sommatorie)

b) Dato il problema di Cauchy $y'(t) = t^3 y(t)^2$, $y(1) = -2$
(1) studiare la successione $\eta(1+ih)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, fornita dal metodo di Eulero esplicito per $h = 1/2$
(2) usando lo stesso metodo ma con $h = 1/4$ scrivere una approssimazione di $y(3/2)$
(3) confrontare $\eta(3/2; 1/2)$ e $\eta(3/2; 1/4)$ con $y(3/2)$

c) Sia

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 9/4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(1) Dimostrare che $\det(A) \neq 0$ senza calcolare $\det(A)$
(2) Verificare che gli autovalori di A hanno modulo più grande di 1
(3) Posto $A_0 = A$ si può costruire una successione di matrici $\{A_k\}_{k=0}^{+\infty}$ simili tra loro e convergente a una matrice diagonale. Calcolare A_1.

d) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Per $a = 0$, $a = 1$ e $a = 1/2$ discutere $\exists$, ! e calcolo (con il metodo delle potenze) della coppia di Perron di A
(2) Scrivere una matrice B di Hessenberg inferiore simile ad A

e) (per matematici) Sia $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\gamma \in C^0(\overline{\Omega})$ $\gamma \geq 0$ ed $u = u(x, y)$ la soluzione del problema differenziale

$$-u_{xx} - u_{yy} + \gamma u_x = f \quad su\ \Omega, \quad u = 0 \quad su\ \partial\Omega. \tag{$*$}$$

(1) Approssimando u_{xx}, u_{yy}, u_x con differenze finite di ordine due, ridurre il problema continuo (*) a un problema discreto $A\eta = \mathbf{b}$, $a_{ii} > 0$
(2) Trovare i valori di $h = 1/(n + 1)$ per cui $a_{ij} \leq 0$, $\forall\, i \neq j$ ed osservare che per tali h il problema $A\eta = \mathbf{b}$ ha una unica soluzione