Limitazioni per il diametro dello spettro di una matrice e altre applicazioni del Teorema di Schur

Relatore:

Prof. Carmine Di Fiore

Controrelatore:

Prof. Carlo Garoni

Laureanda:

Carlotta Mangiapelo

Matricola:

0269485

A.A 2021/2022

Decomposizione di Schur

Teorema

(Decomposizione di Schur) $\forall A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ $\exists$ *una matrice unitaria* $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *tale che* $U^* A U = T$ *dove* T *è una matrice triangolare superiore.*

In altre parole ogni matrice A è simile, tramite una trasformazione per similitudine unitaria, ad una matrice triangolare superiore.

Decomposizione di Schur

Richiamiamo la definizione di matrice unitaria:

Definizione

Una matrice $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $UU^* = U^*U = I$, dove I è la matrice identità di ordine n.

Le matrici di permutazione P e di Givens G costituiscono importanti esempi di matrici unitarie.
Vedremo che opportune trasformazioni per similitudine unitarie con P e G possono rendere la triangolare T di Schur più "canonica".

Decomposizione di Schur

Un primo corollario del Teorema di Schur è il seguente:

Teorema

$A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è normale, cioè $AA^* = A^*A$, se e solo se è diagonalizzabile da una matrice unitaria.

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ è normale allora anche la T di Schur è normale. Ma una triangolare normale deve essere diagonale.
($\Leftarrow$) Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ diagonalizzabile da una matrice unitaria U, ossia $A = UDU^*$. Mostriamo che è normale:

$$\begin{aligned} AA^* &= UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^* = \\ &= UD^*DU^* = UD^*U^*UDU^* = A^*A \end{aligned}$$

$\square$

Il diametro dello spettro di matrici

Vediamo altre applicazioni del Teorema di Schur, nella caratterizzazione del **diametro dello spettro di matrici** e in alcune sue limitazioni.

Definizione

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gli autovalori di A. Si definisce *spread* della matrice A la quantità

$$Sp(A) = \max_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j|$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme discreto è la massima distanza tra due suoi punti. $Sp(A)$, perciò, è proprio il diametro dello spettro $\sigma(A)$ della matrice A.

Il diametro dello spettro di matrici

Presentiamo ora un lemma la cui dimostrazione vede l'utilizzo del Teorema di Schur. Tale lemma permetterà di ottenere una limitazione superiore per lo spread di una matrice.

Lemma

Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *gli autovalori di una matrice* $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. *Allora*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2 \tag{1}$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se A *è normale.*

Memo: $\|\cdot\|_F$ = norma di Frobenius, i.e. $\|M\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |M_{ij}|^2$.

Il diametro dello spettro di matrici

Dimostrazione. Dal Teorema di Schur sappiamo che $\exists\, U$ matrice unitaria tale che $A = UTU^*$ con T triangolare. Allora:

$$\|A\|_F^2 = \|UTU^*\|_F^2 = \|UT\|_F^2 = \|T\|_F^2 =$$

$$= \sum_{i \leq j} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |t_{ii}|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2$$

Ricordiamo che i t_{ii} sono proprio gli autovalori di A, perciò:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i<j} |t_{ij}|^2$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_F^2$$

dove l'uguaglianza vale $\iff T$ è diagonale $\iff A$ è normale. $\square$

Il diametro dello spettro di matrici

L. Mirsky nel 1956 ottiene una limitazione superiore per $Sp(A)$:

Teorema

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. *Allora*

$$Sp^2(A) \leq 2\left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n}|trA|^2\right) \tag{2}$$

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gli autovalori di A e supponiamo che $0 < Sp(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|$. Allora $i_0 \neq j_0$ e

$$\begin{aligned} Sp^2(A) = |\lambda_{i_0} - \lambda_{j_0}|^2 &\leq (|\lambda_{i_0}| + |\lambda_{j_0}|)^2 \leq 2(|\lambda_{i_0}|^2 + |\lambda_{j_0}|^2) \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq 2\|A\|_F^2 \end{aligned}$$

Il diametro dello spettro di matrici

La disuguaglianza $Sp^2(A) \leq 2\|A\|_F^2$ (ottenuta tramite il Lemma) e il fatto che lo spread di matrici è invariante per traslazioni implicano:

$$Sp^2(A) = Sp^2\left(A - \frac{trA}{n}I\right) \leq 2\left\|A - \frac{trA}{n}I\right\|_F^2$$

$$\left\|A - \frac{trA}{n}I\right\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \frac{1}{n}|trA|^2$$

ovvero la tesi

$$Sp^2(A) \leq 2\left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n}|trA|^2\right).$$

Il diametro dello spettro di matrici

Se A è normale, la disuguaglianza di Mirsky può essere migliorata:

Teorema

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ normale. Allora

$$Sp(A) \leq \sqrt{\|A\|_F^2 + |tr(A^2)| - \frac{2}{n}|trA|^2} \leq \sqrt{2\|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|trA|^2} \qquad (3)$$

Dimostrazione.

$$Sp^2(A) = \max_{|z|=1} Sp^2\left(\frac{zA + \overline{z}A^*}{2}\right)$$
$$\leq \max_{|z|=1}\left[2\left\|\frac{zA + \overline{z}A^*}{2}\right\|_F^2 - \frac{2}{n}\left|tr\left(\frac{zA + \overline{z}A^*}{2}\right)\right|^2\right]$$

Il diametro dello spettro di matrici

$$= \max_{|z|=1} \left[\frac{1}{2} tr[(zA + \overline{z}A^*)(\overline{z}A^* + zA)] - \frac{2}{n} |Re(trzA)|^2 \right]$$

$$= \max_{|z|=1} \left[\|A\|_F^2 + Re(z^2 tr(A^2)) - \frac{2}{n} |trA|^2 \right]$$

$$\leq \|A\|_F^2 + |tr(A^2)| - \frac{2}{n}|trA|^2 \leq \|A\|_F^2 + \|A\|_F^2 - \frac{2}{n}|trA|^2.$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché $|tr(A^2)| \leq \|A\|_F^2$, infatti

$$|tr(A^2)| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)^2| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)^2| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|^2 \leq \|A\|_F^2$$

$\square$

Il diametro dello spettro di matrici

Un'altra applicazione del Teorema di Schur è una caratterizzazione di $Sp_{Re}(A)$ e $Sp_{Im}(A)$, quando A è normale, in funzione rispettivamente dello spread delle matrici H e K della decomposizione cartesiana di A, $A = H + iK$.

Teorema

Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i suoi autovalori. Definiamo:

1. $Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |Re(\lambda_i) - Re(\lambda_j)|$
2. $Sp_{Im}(A) = \max_{i,j} |Im(\lambda_i) - Im(\lambda_j)|$

Se A è normale allora

$$Sp_{Re}(A) = Sp\Big(\frac{A + A^*}{2}\Big), \qquad Sp_{Im}(A) = Sp\Big(\frac{A - A^*}{2i}\Big)$$

Il diametro dello spettro di matrici

Dimostrazione. Per il Teorema di Schur si ha $A = UDU^*$, $D = diag(\lambda_i)$. Allora:

- $\frac{A+A^*}{2} = \frac{U(D+D^*)U^*}{2} = U diag\Big[Re(\lambda_k)_{k=1,\dots,n}\Big]U^*$
- $\frac{A-A^*}{2i} = \frac{U(D-D^*)U^*}{2i} = U diag\Big[Im(\lambda_k)_{k=1,\dots,n}\Big]U^*$

Concludiamo quindi:

$$Sp_{Re}(A) = \max_{i,j} |Re(\lambda_i) - Re(\lambda_j)| = Sp\Big(\frac{A+A^*}{2}\Big)$$

$$Sp_{Im}(A) = \max_{i,j} |Im(\lambda_i) - Im(\lambda_j)| = Sp\Big(\frac{A-A^*}{2i}\Big).$$

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Problema: Data A matrice $n \times n$, analizziamo l'esistenza di una matrice triangolare superiore e invertibile R che ci permetta di "passare" con una trasformazione per similitudine triangolare dalla forma canonica di Jordan $J = X^{-1}AX$ di A alla forma di Schur $T = U^*AU$ di A e viceversa:

$$\exists\ R \text{ triangolare superiore tale che } RJR^{-1} = T\ ?$$

Vedremo che tale R esiste, se non per T, almeno per una matrice triangolare superiore del tipo $T' = P^*TP$ con P unitaria.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Richiamiamo il **teorema di Jordan**.
Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, per ogni autovalore $\lambda \in \sigma(A)$ è possibile trovare $q_\lambda \leq n$, una matrice $X_\lambda \in M_{n,q_\lambda}(\mathbb{C})$ di rango q_λ e una matrice J_λ di ordine $q_\lambda \times q_\lambda$ del tipo

$$J_\lambda = \left.\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right\} q_\lambda \leq n$$

tali che $AX_\lambda = X_\lambda J_\lambda$. Inoltre, allo stesso λ possono corrispondere più terne $(q_\lambda, X_\lambda, J_\lambda)$ con tali proprietà e con le X_λ tra di loro indipendenti e, precisamente, tante quant'è la molteplicità geometrica di λ.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Teorema

(Di Jordan)Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $\exists\, X$ *matrice invertibile tale che*

$$X^{-1}AX = J$$

dove J *è la matrice forma canonica di Jordan di* A *diagonale a blocchi, con blocchi diagonali i* J_λ*, relativi allo stesso autovalore* λ *e al variare di* $\lambda \in \sigma(A)$*, e* X *è ottenuta mettendo insieme le* X_λ *per lo stesso* λ *e poi facendo variare* λ *in* $\sigma(A)$*.*
J *è unica a meno di ordinamento dei blocchi.*

Forme di Schur e di Jordan di matrici

La decomposizione di Schur segue dal Teorema di Jordan:

Teorema

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *e sia* $J = X^{-1}AX$ *la sua forma canonica di Jordan. Allora* $\exists\, Q \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *unitaria e* $R \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *matrice triangolare superiore invertibile tali che* $X = QR$ *e quindi*

$$Q^*AQ = RJR^{-1} =: T$$

dove T *è una matrice triangolare superiore.*

Definizione

Una matrice triangolare superiore T si dice T_{Ok} se è simile alla sua forma canonica di Jordan J tramite trasformazione per similitudine triangolare. Altrimenti si dice $T_{\overline{Ok}}$.

Teorema

$\forall T$ *triangolare superiore che è* $T_{\overline{Ok}}$ $\exists\, P$ *unitaria tale che* P^*TP *è* T_{Ok}.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{C},\; t_{i,j} \in \mathbb{C}$$

- *Obiettivo 1*: classificare tutte le matrici triangolari superiori T che sono T_{Ok} ($\exists\, R$ tr. sup. $:\ R^{-1}TR = J$).
- *Obiettivo 2*: qualora la matrice triangolare superiore T fosse $T_{\overline{Ok}}$, costruire la trasformazione per similitudine unitaria che la trasformi in una triangolare superiore T_{Ok}.

Caso 1: T, di ordine $k \geq 2$, con autovalori λ_i **distinti**.
T risulta diagonalizzabile quindi si prova ad imporre

$$TR = RJ, \quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad con \quad R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n,n} \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni risultante ha infinite soluzioni calcolabili come segue

- $r_{i,i}$ arbitrari non nulli per $i = 1, \ldots, k$;
- per $s = 1, \ldots, k-1$ e $i = 1, \ldots, k-s$

$$r_{i,s+i} = \frac{1}{\lambda_{i+s} - \lambda_i} \sum_{j=1}^{s} t_{i,i+j} r_{i+j,i+s}$$

Quindi la matrice T è sempre T_{Ok}.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Caso 2: T, di ordine $k \geq 2$, con autovalori λ_i **tutti uguali** a λ.

Teorema

Siano R una matrice invertibile qualsiasi e $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, ..., k-1$, tali che

$$\begin{bmatrix} \lambda & t_{1,2} & \cdots & t_{1,k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} R = R \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Allora, $t_{i,i+1} \neq 0 \; \forall i = 1, ..., k-1$ se e solo se R è triangolare superiore e $x_i = 1 \; \forall i = 1, ..., k-1$.

Corollario

Se $t_{i,i+1} \neq 0 \; \forall i$ allora T è T_{Ok}.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

E se qualche $t_{i,i+1} = 0$?

Un primo esempio:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \boldsymbol{t} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad T \text{ è } T_{Ok} \iff \boldsymbol{t} = 0$$

Se $\exists\, R$ triangolare superiore invertibile e $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ tali che

$$TR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{t} r_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 r_{1,1} & x_2 r_{1,2} \\ 0 & 0 & x_2 r_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = RJ, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e di conseguenza $t = 0$.

Quindi T è $T_{Ok} \iff \boldsymbol{t} = 0$ (R può essere scelta qualsiasi).

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Teorema

Sia T triangolare superiore di ordine k con $t_{i,i} = \lambda$, $\forall i$, e con $t_{i,i+1} = 0$ $\forall i$. Allora, T è T_{Ok} se e solo se $t_{i,j} = 0$ $\forall i < j$, ossia $T = \lambda I$ (in questo caso $J = \lambda I$ e R può essere scelta qualsiasi).

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Teorema

Sia T triangolare superiore di ordine k con $t_{i,i} = \lambda$, $\forall i$, e con $t_{i,i+1} = 0$ $\forall i$. Allora, T è T_{Ok} se e solo se $t_{i,j} = 0$ $\forall i < j$, ossia $T = \lambda I$ (in questo caso $J = \lambda I$ e R può essere scelta qualsiasi).

Proposizione

$$
\underset{a_i \neq 0}{\begin{bmatrix}
\lambda & a_1 & * & \cdots & \cdots & * \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & a_s & * & \cdots & * \\
 & & \lambda & 0 & \blacksquare & \blacksquare \\
 & & & \ddots & \ddots & \blacksquare \\
 & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda
\end{bmatrix}}
\text{ è } T_{Ok} \Leftrightarrow
\begin{cases}
\blacksquare = 0, \\
R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \\
\text{opportuna con} \\
R_{ii} \text{ tr.sup.}
\end{cases}
$$

Un secondo esempio:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & \lambda & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ con } a_1 \neq 0, a_2 \neq 0 \text{ e } b_i \text{ arbitrari.}$$

T è T_{Ok} se e solo se $\boldsymbol{a_1 b_3 + b_1 a_2 = 0}$.

Se $a_1 b_3 + b_1 a_2 \neq 0$ allora $\exists\, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$P^* G^* T G P = P^* \begin{bmatrix} \lambda & a_1' & b_1' & b_2 \\ 0 & \lambda & 0 & b_3' \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \lambda & a_1' & b_2 & b_1' \\ 0 & \lambda & b_3' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ è } T_{Ok}.$$

($b_3' = \sqrt{b_3^2 + a_2^2} > 0$ perché $a_2 \neq 0$ per hp e $a_1' = (a_1 b_3 + b_1 a_2)/b_3' \neq 0$).

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Teorema

Sia T triangolare superiore con la seguente struttura

$$
T = \begin{bmatrix}
\lambda & t_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & t_{1,k-1} & t_{1,k} \\
0 & \ddots & 0 & t_{2,4} & \cdots & t_{2,k-1} & t_{2,k} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & t_{k-3,k-1} & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & t_{k-2,k} \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & t_{k-1,k} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda
\end{bmatrix}, \quad t_{1,2} \cdot t_{k-1,k} \neq 0.
$$

Allora, T è T_{Ok} se e solo se

(i) $t_{i,j} = 0$ *per* $i = 2, \ldots, k-3$ *e* $j = i+2, \ldots, k-1$

(ii) $t_{1,2}t_{2,k} + t_{1,3}t_{3,k} + \ldots + t_{1,k-2}t_{k-2,k} + t_{1,k-1}t_{k-1,k} = 0.$

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Se (i) è verificata, ma non (ii), si può trasformare la T in una triangolare superiore T_{Ok} con una trasformazione per similitudine unitaria, infatti

Teorema

Sia $T = \begin{bmatrix} 0 & \underline{x}^T & v \\ \underline{0} & O & \underline{y} \\ 0 & \underline{0}^T & 0 \end{bmatrix}$ $k \times k$, *con* $v \in \mathbb{C}$ *e* $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^{k-2}$ *tali che* $x_1 \cdot y_{k-2} \neq 0$.

Se $\underline{x}^T\underline{y} = 0$, T *è* T_{Ok}. *Se* $\underline{x}^T\underline{y} \neq 0$ $\exists$ Q *unitaria e* P *di permutazione :*

$$P^*Q^*TQP = P^* \begin{bmatrix} 0 & \frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} & * & \cdots & * & v \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \|\underline{y}\|_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2} & v & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \|\underline{y}\|_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

è T_{Ok} *poiché* $\underline{x}^T\underline{y} \neq 0$ *e* $\|\underline{y}\|_2 \neq 0$ *(vedi Proposizione).*

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Per T, $k \times k$, con $t_{ii} = \lambda \ \forall i$ (Caso 2) rimangono da analizzare altri casi in cui, ad esempio, sulla sopra-diagonale sono presenti sia elementi nulli sia elementi non nulli in ordine sparso. L'idea è cercare di raggruppare (con trasformazioni per similitudine unitarie) gli elementi nulli e posizionarli in fondo alla sopra-diagonale e poi applicare la Proposizione.

Una volta completato lo studio del Caso 2, il problema generale, in cui T è triangolare superiore generica $n \times n$, sarebbe risolto. Vediamo perché supponendo, senza perdita di generalità, che

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}, \text{ con } T_{ii}, \ i = 1, 2, 3, \quad \text{tr.sup.},$$

T_{11} con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, T_{22} e T_{33} con autovalori uguali rispettivamente a λ e a μ, e $\lambda \neq \lambda_i$, $\mu \neq \lambda_i$, $\lambda \neq \mu$.

Forme di Schur e di Jordan di matrici

Si dimostra che
$$\exists R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \text{ invertibile : } TR = RJ \text{ con } J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} \mu & y_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \cdots & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$x_i, y_i \in \{0,1\}$ se e solo se $\exists$ R_{ii} invertibili : $T_{ii}R_{ii} = R_{ii}J_i$, $i = 1,2,3$.
Se le R_{ii} fossero tutte anche triangolari (ovvero, se le T_{ii} fossero tutte T_{Ok}) allora la R sarebbe triangolare superiore.

Teorema

T è T_{Ok} se e solo se T_{ii} sono T_{Ok} $\forall i$.

Fine

Grazie a tutti per l'attenzione!