Triangular Toeplitz linear systems solved by Bernoulli numbers

Carmine Di Fiore, Francesco Tudisco, Paolo Zellini
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

Abstract

Introduction

1. Le matrici triangolari inferiori di Toeplitz (t.i.T.)
Sia Z la seguente matrice $n \times n$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z è di solito chiamata matrice *lower-shift* per l'effetto che produce la sua moltiplicazione per un vettore $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, \cdots\, v_{n-1}]^T \in \mathbb{C}^n$: $Z\mathbf{v} = [0\, v_0\, v_1\, \cdots\, v_{n-2}]$. Sia $\mathcal{L}$ il sottospazio di $\mathbb{C}^{n\times n}$ delle matrici che commutano con Z. È semplice osservare che $\mathcal{L}$ è un'algebra chiusa per inversione, cioè se $A, B \in \mathcal{L}$ allora $AB \in \mathcal{L}$ e se $A \in \mathcal{L}$ è non singolare allora $A^{-1} \in \mathcal{L}$. Studiamo la struttura delle matrici di $\mathcal{L}$. Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ generica. Allora

$$AZ = \begin{bmatrix} a_{12} & \cdot & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdot & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}, \quad ZA = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \end{bmatrix}.$$

Imponendo l'uguaglianza di AZ con ZA si ottengono le condizioni $a_{12} = a_{13} = \dots a_{1n} = a_{2n} = \dots a_{n-1n} = 0$ e $a_{i,j+1} = a_{i-1,j}$, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, dalle quali si deduce la struttura di $A \in \mathcal{L}$: A deve essere una matrice *triangolare inferiore di Toeplitz* (t.i.T.), ovvero del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{11} & & & \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \qquad (\dots)$$

Ne segue in particolare che $\dim \mathcal{L} = n$ e, quindi, per un noto Teorema [], si ha anche l'identità $\mathcal{L} = \{p(Z) : p = \text{polinomi}\}$. Effettivamente, se si esaminano le potenze di Z ci si accorge che la matrice A in ... non è altro che il polinomio $\sum_{k=1}^{n} a_{k1} Z^{k-1}$.

Notiamo che, per quanto detto prima, l'inversa di una matrice t.i.T. è ancora t.i.T., quindi è completamente determinata una volta che è nota la sua prima colonna.

Nella prossima sezione si illustra un algoritmo efficiente per la risoluzione di un sistema lineare triangolare inferiore di Toeplitz $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $A \in \mathcal{L}$, dove $n = 2^s$. Si vedrà che tale operazione è ricondotta al calcolo di $O(\log_2 n)$ prodotti matrice-vettore dove le matrici sono t.i.T. e di dimensione $2^j \times 2^j$, con $j = 2, \dots, s$. Poiché tali prodotti non richiedono più di $cj2^j$ operazioni aritmetiche (vedi le Appendici 1 e 2), l'algoritmo illustrato ha costo $O(n \log_2 n)$.

2. Un algoritmo per la risoluzione di sistemi di n equazioni lineari triangolari di Toeplitz con n potenza di 2

In questa sezione si illustrerà un algoritmo di costo $O(n \log_2 n)$ per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, essendo A una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $n \times n$ con n potenza di 2 e $[A]_{11} = 1$.

2.1 Lemmi preliminari

Dato un vettore $\mathbf{v} = [v_0\ v_1\ v_2\ \cdots]^T$, $v_i \in \mathbb{C}$ (in breve $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$), sia $L(\mathbf{v})$ la matrice semi-infinita triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $\mathbf{v}$, i.e.

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k Z^k, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Lemma 1. Siano $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Allora $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b}) = L(\mathbf{c})$ se e soltanto se $L(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Dimostrazione. Se $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b}) = L(\mathbf{c})$, allora la prima colonna della matrice $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b})$ deve essere uguale alla prima colonna della matrice $L(\mathbf{c})$, e queste sono rispettivamente i vettori $L(\mathbf{a})\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Viceversa, supponiamo che $L(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Consideriamo la matrice $L(\mathbf{a})L(\mathbf{b})$. Questa, in quanto prodotto di matrici triangolari inferiori di Toeplitz, è una matrice triangolare inferiore di Toeplitz, e, per ipotesi, la sua prima colonna, $L(\mathbf{a})\mathbf{b}$, coincide con il vettore $\mathbf{c}$, che è la prima colonna della matrice triangolare inferiore di Toeplitz $L(\mathbf{c})$. La tesi segue dal fatto che le matrici triangolari di Toeplitz sono univocamente definite dalla loro prima colonna. $\square$

Dato un vettore $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, v_2\, \cdot]^T \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sia E la matrice semi-infinita di 0 e 1 che manda $\mathbf{v}$ nel vettore $E\mathbf{v} = [v_0\, 0\, v_1\, 0\, v_2\, 0\, \cdots]^T$:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

In altre parole, l'azione di E su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire uno zero tra due successive componenti di $\mathbf{v}$. Si osserva facilmente che

$$E^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad E^s = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \mathbf{0} & & & \\ 0 & 1 & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}_{2^s-1},$$

cioè l'azione di E^s su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire $2^s - 1$ zeri tra due successive componenti di $\mathbf{v}$.

Lemma 2. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con $u_0 = v_0 = 1$. Allora $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$, e, più in generale, per ogni $s \in \mathbb{N}$ si ha $L(E^s\mathbf{u})E^s\mathbf{v} = E^sL(\mathbf{u})\mathbf{v}$.

Dimostrazione. Scrivendo i vettori $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v}$ e $EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$ si osserva che sono uguali. Moltiplicando a sinistra per E l'identità $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$ ed utilizzando tale stessa identità con i vettori $E\mathbf{u}$ ed $E\mathbf{v}$ al posto, rispettivamente, di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, si osserva che vale anche l'identità $L(E^2\mathbf{u})E^2\mathbf{v} = E^2L(\mathbf{u})\mathbf{v}$. ... $\square$

2.2 L'algoritmo

Sia A una matrice l.t.T. $n \times n$ con n potenza di 2 e $[A]_{11} = 1$. Si vuole risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$. L'algoritmo seguente sfrutta l'osservazione che A^{-1} è ancora una matrice l.t.T. $n \times n$.

1 Si calcola la prima colonna della matrire l.t.T. A^{-1}, ovvero si risolve il sistema lineare particolare $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ utilizzando l'algoritmo ... di costo $O(n \log_2 n)$ illustrato nella sezione seguente, basato sulla ripetuta applicazione dei Lemmi 1 e 2.

2 Si calcola il prodotto matrice t.i.T.-vettore $A^{-1}\mathbf{f}$ effettuando non più di $O(n \log_2 n)$ operazioni aritmetiche (vedi Appendici 1 e 2).

2.3 Il calcolo della prima colonna dell'inversa di una matrice l.t.T. $n \times n$ con n potenza di 2

Per semplicità illustriamo l'algoritmo per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ nel caso $n = 8$. Indicheremo, a volte, cos'è che cambia nel caso generale $n = 2^s$, $s \in \mathbb{N}$; comunque tale caso è facilmente deducibile da quello considerato. L'algoritmo si divide in due parti. Nella prima parte si introducono e si calcolano matrici triangolari inferiori di Toeplitz che moltiplicate, una dopo l'altra, a sinistra per la matrice A, hanno l'effetto di trasformarla nella matrice identica. Nella seconda parte si moltiplicano tali matrici, di nuovo una dopo l'altra, per il vettore $\mathbf{e}_1$. Come si vedrà, non si fa altro che applicare una specie di eliminazione di Gauss, ma, invece di annullare elementi, si annullano diagonali. Il costo finale $O(n \log_2 n)$ dell'algoritmo deriva dal fatto che ad ogni passo della prima parte si annullano metà delle diagonali rimaste non nulle, e dal fatto che la seconda parte è semplificabile sfruttando il fatto che il vettore $\mathbf{e}_1$ ha solo una componente non nulla.

Per prima cosa osserviamo che la matrice A 8×8 può essere vista come la sottomatrice in alto a sinistra di una matrice $L(\mathbf{a})$ semi-infinita triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $[1\, a_1\, a_2\, \cdot\, a_7\, a_8\, \cdot]^T$.

Passo 1. Trovare $\hat{\mathbf{a}}$ tale che

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ a_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)}$$

per certi $a_i^{(1)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(1)}$. Il calcolo degli $a_i^{(1)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}$, un prodotto matrice t.i.T. 8×8 $(2^s \times 2^s)$ per vettore [o, più precisamente, due prodotti matrice t.i.T. 4×4 $(2^{s-1} \times 2^{s-1})$ per vettore]; vedremo che $\hat{\mathbf{a}}$ è disponibile a costo zero.

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con una nulla.

Passo 2. Trovare $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&& \\ a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&&&& \\ 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&&& \\ a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&&& \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 &&& \\ a_3^{(1)} & 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 && \\ 0 & a_3^{(1)} & 0 & a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ 0 \\ \hat{a}_3^{(1)} \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$$

per certi $a_i^{(2)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(2)}$. Il calcolo degli $a_i^{(2)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$, un prodotto matrice t.i.T. 4×4 ($2^{s-1} \times 2^{s-1}$) per vettore [o, più precisamente, due prodotti matrice t.i.T. 2×2 ($2^{s-2} \times 2^{s-2}$) per vettore].

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E\mathbf{a}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con tre nulle.

Nota. Per il Lemma 2, se $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ allora $L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$. Vedremo che $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ è disponibile a costo zero.

Passo 3. Trovare $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$ tale che

$$L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E^3\mathbf{a}^{(3)}$$

per certi $a_i^{(3)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(3)}$. Il calcolo degli $a_i^{(3)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$, un prodotto matrice t.i.T. 2×2 ($2^{s-2} \times 2^{s-2}$) per vettore [o, più precisamente, due prodotti matrice t.i.T. 1×1 ($2^{s-3} \times 2^{s-3}$) per vettore]. No! nessuna componente di $a^{(3)}$ va calcolata, se $n = 8$!.

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con sette nulle.

Nota. Per il Lemma 2, se $L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)}$ allora $L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E^3\mathbf{a}^{(3)}$. Vedremo che $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$ tale che $L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)}$ è disponibile a costo zero.

Se $n = 2^s > 8$, allora continua. Altrimenti è completata la prima parte dell'Algoritmo.

Riassumendo, abbiamo provato che

$$L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}) \qquad (\ldots)$$

dove, osserviamo, le sotto matrici 8×8 in alto a sinistra di $L(\mathbf{a})$ e $L(E^3\mathbf{a}^{(3)})$ sono, rispettivamente, la matrice triangolare inferiore di Toeplitz data inizialmente A e la matrice identica I,

$$L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_7 & \cdot & a_1 & 1 & & \\ a_8 & a_7 & \cdot & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad L(E^3\mathbf{a}^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & & \\ a_1^{(3)} & 0 & \cdot & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

e le operazioni che abbiamo dovuto fare finora sono state: 8×8 l.t.T. $\cdot$ vettore + 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore (se A è $n \times n$ con $n = 2^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: $2^s \times 2^s$ l.t.T. $\cdot$ vettore $+ \ldots +$ 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore).

Veniamo ora al nostro scopo, calcolare la prima colonna di A^{-1}, e illustriamo quindi la seconda parte dell'algoritmo. Consideriamo il seguente sistema lineare semi-infinito:

$$L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v} \qquad (\ldots)$$

dove $\mathbf{v}$ è un generico vettore semi-infinito di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (se A è $n \times n$ con $n = 2^s$, al posto di 2 in … come potenza di E ci sarebbe $s-1$). Tale sistema può essere riscritto come segue

$$\begin{bmatrix} A & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ z_8 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

cioè evidenziando la parte superiore del sistema, di sole 8 equazioni.

Nota: prima di procedere, si noti che $\{\mathbf{z}\}_8$ è tale che $A\{\mathbf{z}\}_8 = [v_0\ 0\ 0\ 0\ v_1\ 0\ 0\ 0]^T$, $v_0, v_1 \in \mathbb{C}$. Quindi la scelta $v_0 = 1$ e $v_1 = 0$, renderebbe $\{\mathbf{z}\}_8$ uguale al vettore da noi cercato, $A^{-1}\mathbf{e}_1$.

Usando l'uguaglianza … si dimostra immediatamente che il sistema $L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E^2\mathbf{v}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} I_8 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(E^3\mathbf{a}^{(3)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})E^2\mathbf{v}$$

Per il Lemma 2 il secondo membro di quest'ultima uguaglianza può essere riscritto più convenientemente:

$$L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)})E^2\mathbf{v} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E^2L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}.$$

Quindi, vale la seguente identità:

$$\begin{bmatrix} I_8 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_8 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\mathbf{v}.$$

Le matrici coinvolte nella rappresentazione a secondo membro sono triangolari inferiori e le sottomatrici quadrate di E in alto a sinistra, 8×8, 4×4, hanno il lato destro nullo, ad esempio

$$\{E\}_8 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Queste due osservazioni ci permettono di ottenere una efficiente rappresentazione di $\{\mathbf{z}\}_8$:

$$\{\mathbf{z}\}_8 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_8\{E\}_8\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_8\{\mathbf{v}\}_8 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_8\{E\}_{8,4}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_4\{E\}_{4,2}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(2)})\}_2\{\mathbf{v}\}_2.$$

Usando tale formula, nel caso $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, il vettore $\{\mathbf{z}\}_8$ può essere calcolato effettuando 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore + 8×8 l.t.T. $\cdot$ vettore (se A è $n \times n$ con $n = 2^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: 4×4 l.t.T. $\cdot$ vettore + … + $2^s \times 2^s$ l.t.T.$\cdot$ vettore), ovvero allo stesso costo dell'*eliminazione Gaussiana*, la prima parte dell'algoritmo.

In conclusione, se $cj2^j$ è un limite superiore per il costo dell'operazione $2^j \times 2^j$ l.t.T. $\cdot$ vettore, allora il costo dell'algoritmo illustrato, nel caso di A $n \times n$ con $n = 2^s$, è $\tilde{c} \sum_{j=2}^{s} j2^j = O(s2^s) = O(n \log_2 n)$.

Ci resta da provare che, effettivamente, si ha $\hat{\mathbf{a}}$ tale che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$ a costo zero. A tal fine è sufficiente osservare con un calcolo diretto che

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \\ a_4 \\ -a_5 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a_2 - a_1^2 \\ 0 \\ 2a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2 \\ 0 \\ 2a_6 - 2a_1a_5 + 2a_2a_4 - a_3^2 \\ 0 \\ 2a_8 - 2a_1a_7 + 2a_2a_6 - 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix}, \qquad (\ldots)$$

$$L(\mathbf{a})\Big(\mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^i a_i \mathbf{e}_{i+1}\Big) = \mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{i=0 \bmod 2}\Big(2a_i + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j a_j a_{i-j}\Big)\mathbf{e}_{i+1}.$$

2.4 Osservazioni sul cuore dell'algoritmo

Dato il vettore $\mathbf{a}$ il problema del calcolo di un vettore $\hat{\mathbf{a}}$ tale che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$, per qualche $\mathbf{a}^{(1)}$, è in realtà un problema di aritmetica polinomiale. Infatti, per il Lemma 1, l'identità $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$ è equivalente all'uguaglianza $L(\mathbf{a})L(\hat{\mathbf{a}}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})$, i.e.

$$\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{a}_k Z^k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(1)} Z^{2k}.$$

Quindi il problema di aritmetica polinomiale in questione è il seguente:

> Dato il polinomio $a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, trovare un polinomio $\hat{a}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{a}_k z^k$ tale che
>
> $$\hat{a}(z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z^2 + a_2^{(1)} z^4 + \ldots =: a^{(1)}(z)$$
>
> per certi $a_i^{(1)}$.

Tale problema è un caso particolare di un problema più generale: trasformare un polinomio *pieno* $a(z)$ in un polinomio *sparso* $a^{(1)}(z) = \sum a_k^{(1)} z^{rk}$. È possibile scrivere esplicitamente un polinomio $\hat{a}(z)$ che realizza questa trasformazione, infatti vale il seguente teorema.

Teorema []. Dato $a(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, posto $\hat{a}(z) = a(zt)a(zt^2)\cdots a(zt^{r-1})$ dove t è una radice r-esima principale dell'unità ($t \in \mathbb{C}$, $t^r = 1$, $t^i \neq 1$ per $0 < i < r$), si ha che

$$\hat{a}(z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z^r + a_2^{(1)} z^{2r} + \ldots =: a^{(1)}(z)$$

per certi $a_i^{(1)}$. Inoltre, se i coefficienti di a sono reali allora anche i coefficienti di $\hat{a}$ sono reali.

Vediamo due Corollari del Teorema. Per $r = 2$ si ha $\hat{a}(z) = a(-z)$, cioè ritroviamo il risultato .... È evidente che $a(-z)a(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z^2 + a_2^{(1)} z^4 + \ldots$ [Graeffe]. In tal caso i coefficienti di $\hat{a}$ sono disponibili a costo zero, occorre calcolare solo gli $a_i^{(1)}$.

Per $r=3$ si ha $\hat{a}(z)=a(zt)a(zt^2)$, $t=e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$. Il Teorema afferma che valgono le uguaglianze $a(z)a(zt)a(zt^2)=a_0^{(1)}+a_1^{(1)}z^3+a_2^{(1)}z^6+\ldots$ e

$$L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a})=L(E\mathbf{a}^{(1)}),\quad E=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

e che i coefficienti di $\hat{a}(z)=a(zt)a(zt^2)$ sono reali se lo sono quelli di a. Stavolta i coefficienti di $\hat{a}$ non sono disponibili a costo zero. Per ottenere una formula che ci permetta di calcolarli osserviamo che l'identità $\hat{a}(z)=a(zt)a(zt^2)$ è equivalente all'identità $L(\hat{\mathbf{a}})=L(\mathbf{c})L(\mathbf{d})$, $c_k=a_kt^k$, $d_k=a_kt^{2k}$, e da ciò segue che

$$\hat{\mathbf{a}}=L(\mathbf{c})\mathbf{d}=\Re[L(\mathbf{c})]\Re[\mathbf{d}]-\Im[L(\mathbf{c})]\Im[\mathbf{d}] \qquad (\ldots)$$

dove l'ultima uguaglianza è valida se i coefficienti di a sono reali.

Più avanti descriveremo un algoritmo (per la risoluzione di sistemi triangolari di Toeplitz $A\mathbf{x}=\mathbf{f}$, A $3^s\times 3^s$) analogo a quello visto, ma che utilizza vettori $\hat{\mathbf{a}}$ tali che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}}$ ha le componenti $2,3,5,6,8,9,\ldots$ nulle. Grazie al Teorema [] abbiamo l'espressione esplicita ... di tale vettore come prodotto di una matrice triangolare di Toeplitz per un vettore.

3. Una applicazione: il calcolo dei numeri di Bernoulli

3.1 I polinomi e numeri di Bernoulli

Le condizioni

$$B(x+1)-B(x)=nx^{n-1},\quad \int_0^1 B(x)\,dx=0,\quad B(x)\text{ polinomio}$$

definiscono univocamente la funzione $B(x)$. Essa è un particolare polinomio monico di grado n chiamato *n-esimo polinomio di Bernoulli* e indicato con il simbolo $B_n(x)$. È semplice calcolare i primi polinomi di Bernoulli:

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\ B_3(x)=x(x-\frac{1}{2})(x-1),\ \ldots\ .$$

Per convenzione $B_0(x)=1$.

Si dimostra che i polinomi di Bernoulli definiscono i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di diverse funzioni; ad esempio, per ciò che segue, è opportuno ricordare che vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n. \qquad (\ldots)$$

Inoltre, i polinomi di Bernoulli soddisfano diverse identità. Due delle più importanti sono quelle concernenti il valore della loro derivata e le loro proprietà di simmetria/antisimmetria rispetto all'asse $x=\frac{1}{2}$:

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x),\quad B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x).$$

In particolare, come conseguenza di quest'ultima identità e della loro definizione, si vede facilmente che tutti i polinomi di Bernoulli di grado dispari eccetto il primo si annullano in zero. Al contrario, il valore in zero dei polinomi di Bernoulli di grado pari è, oltre che diverso da zero, particolarmente significativo. In particolare, vale la seguente formula di Eulero

$$\zeta(2j) = \frac{|B_{2j}(0)|(2\pi)^{2j}}{2(2j)!}, \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s},$$

che mette in stretta relazione i valori $B_{2j}(0)$ con i valori della funzione Zeta di Riemann ζ nei numeri interi positivi pari $2j$. Ad esempio, da questa relazione e dal fatto che $\zeta(2j) \to 1$ se $j \to +\infty$, si deduce che i $|B_{2j}(0)|$ tendono a $+\infty$ più o meno come $2(2j)!/(2\pi)^{2j}$. Un'altra formula importante coinvolgente i valori $B_{2j}(0)$ è quella di Eulero-Maclaurin, utile per il calcolo di somme: se f è una funzione sufficientemente regolare in $[m,n]$, $m,n \in \mathbb{Z}$, allora

$$\sum_{r=m}^{n} f(r) = \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \int_m^n f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}(0)}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m)] + u_{k+1}, \qquad (\ldots)$$

ove $u_{k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\int_m^n f^{(2k+1)}(x)\overline{B}_{2k+1}(x)\,dx = -\frac{1}{(2k)!}\int_m^n f^{(2k)}(x)\overline{B}_{2k}(x)\,dx = \frac{1}{(2k+2)!}\int_m^n f^{(2k+2)}(x)[B_{2k+2}(0) - \overline{B}_{2k+2}(x)]\,dx$ e $\overline{B}_n$ è l'estensione periodica su $\mathbb{R}$ di $B_n|_{[0,1)}$. Ricordiamo che la formula di Eulero-Maclaurin conduce anche a una rappresentazione importante dell'errore commesso dalla formula dei trapezi $\mathcal{I}_h = h[\frac{1}{2}g(a) + \sum_{r=1}^{n-1} g(a+rh) + \frac{1}{2}g(b)]$, $h = \frac{b-a}{n}$, nell'approssimazione di un integrale $\mathcal{I} = \int_a^b g(x)\,dx$. Tale rappresentazione, valida per g sufficientemente regolare in $[a,b]$, si ottiene ponendo $m=0$ e $f(t) = g(a+th)$ in ...:

$$\mathcal{I}_h = \mathcal{I} + \sum_{j=1}^{k} \frac{h^{2j}B_{2j}(0)}{(2j)!}[g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] + r_{k+1}, \quad r_{k+1} = \frac{g^{(2k+2)}(\xi)h^{2k+2}(b-a)B_{2k+2}(0)}{(2k+2)!},$$

$\xi \in (a,b)$. Tale rappresentazione dell'errore, in termini di potenze pari di h, giustifica l'efficienza del metodo di estrapolazione di Romberg per la stima di integrali, quando tale metodo è applicato in combinazione con la formula dei trapezi. È evidente infatti da ... che $\tilde{\mathcal{I}}_{h/2} := (2^2\mathcal{I}_{h/2} - \mathcal{I}_h)/(2^2-1)$ approssima $\mathcal{I}$ con un errore dell'ordine di $O(h^4)$ mentre l'errore di $\mathcal{I}_h$ e $\mathcal{I}_{h/2}$, nell'approssimazione di $\mathcal{I}$, è dell'ordine di $O(h^2)$.

Per questi e tanti altri motivi (si veda []) i valori $B_{2j}(0)$ hanno un nome: i numeri di Bernoulli (Kowa Seki).

3.2 I numeri di Bernoulli risolvono sistemi triangolari di Toeplitz

Dall'identità ... segue che i numeri di Bernoulli soddisfano la seguente uguaglianza:

$$\frac{t}{e^t - 1} = -\frac{1}{2}t + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}t^{2k}.$$

Moltiplicando quest'ultima per $e^t - 1$, sviluppando e^t in potenze di t, ed imponendo che i coefficienti di t^i, $i = 2,3,4,\ldots$, del secondo membro siano uguali a zero, si ottengono le equazioni:

$$-\frac{1}{2}j + \sum_{k=0}^{[\frac{j-1}{2}]} \binom{j}{2k} B_{2k}(0) = 0, \quad j = 2,3,4,\ldots\ . \qquad (\ldots)$$

Ora, mettendo insieme le equazioni ... per j pari e quelle per j dispari, si ottengono due sistemi lineari triangolari inferiori che definiscono univocamente i numeri di Bernoulli:

$$\begin{bmatrix} \binom{2}{0} & & & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{2} & & & \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & & \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{0} & & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{2} & & & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & & \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 5/2 \\ 7/2 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Da questi possiamo ricavare i primi numeri di Bernoulli:

$$1,\ ,\frac{1}{6},\ -\frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ -\frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ -\frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},\ -\frac{47021}{6630}.$$

Vogliamo dare una forma analitica alle matrici dei coefficienti W_e e W_o di tali sistemi lineari. Per farlo è sufficiente osservare che tali matrici sono sottomatrici della matrice di Tartaglia, la quale ammette una forma analitica,

$$X = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & & & & & & & \\ \binom{\mathit{1}}{\mathit{0}} & \binom{1}{1} & & & & & & \\ \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}} & \binom{2}{1} & \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} & & & & & \\ \binom{\mathit{3}}{\mathit{0}} & \binom{3}{1} & \binom{\mathit{3}}{\mathit{2}} & \binom{3}{3} & & & & \\ \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{0}} & \binom{4}{1} & \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\ \binom{\mathit{5}}{\mathit{0}} & \binom{5}{1} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{2}} & \binom{5}{3} & \binom{\mathit{5}}{\mathit{4}} & \binom{5}{5} & & \\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{0}} & \binom{6}{1} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} & \binom{6}{3} & \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Y^k,\ \ Y = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & 3 & 0 & \\ & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(l'ultima uguaglianza vale perchè $[X]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!}[Y^{i-j}]_{ij} = \frac{1}{(i-j)!} j \cdots (i-2)(i-1) = \binom{i-1}{j-1}$, $1 \leq j \leq i \leq n$), fare un po' di conti, e concludere che

$$W_e = Z^T \phi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} \phi^k,\ \ W_o = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & \cdot \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \phi^k,\ \ \phi = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & & & \\ & 12 & 0 & & & \\ & & 30 & 0 & & \\ & & & 56 & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque riscrivere i sistemi lineari come segue:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!}\phi^k \mathbf{b} = \mathbf{q}^e, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/5 \\ 1/7 \\ \cdot \end{bmatrix}, \qquad (quasi-pari)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\phi^k \mathbf{b} = \mathbf{q}^o, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_0(0) \\ B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}^o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ \cdot \end{bmatrix}. \qquad (quasi-dispari)$$

Ora mostriamo che tali sistemi sono equivalenti a due sistemi lineari triangolari inferiori di Toeplitz. Il nostro scopo è sostituire ϕ, una matrice sulla cui sottodiagonale ci sono elementi tutti diversi tra loro, con una matrice sulla cui sottodiagonale ci sono elementi tutti uguali tra loro.

Sia $D = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, $d_i \neq 0$. Se si scrive la matrice $D\phi D^{-1}$ ci si accorge che si può imporre che essa sia uguale a una matrice del tipo xZ, è infatti sufficiente porre $d_k = x^{k-1}d_1/(2k-2)!$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Sia dunque

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{x}{2!} & & & & \\ & & \frac{x^2}{4!} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} & \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix}. \qquad (\ldots)$$

(si è scelto $d_1 = 1$). Allora da (quasi-pari) segue che $D\mathbf{q}^e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} D\phi^k D^{-1} D\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} (D\phi D^{-1})^k D\mathbf{b}$, ovvero che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k D\mathbf{b} = D\mathbf{q}^e, \qquad (pari)$$

e, analogamente, da (quasi-dispari) segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!} Z^k D\mathbf{b} = D\mathbf{q}^o. \qquad (dispari)$$

Riassumendo, sia $\mathbf{z}$ il vettore $D\mathbf{b}$. Allora il vettore $\{\mathbf{b}\}_n$ (ovvero, i primi n numeri di Bernoulli) può essere ottenuto, ad esempio:

1 calcolando le prime n componenti della soluzione del seguente sistema lineare triangolare inferiore di Toeplitz:

$$\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k \Big)\, \mathbf{z} = D\mathbf{q}^e$$

(ovvero, $\{\mathbf{z}\}_n$ tale che $\{\, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^k}{(2k+2)!} Z^k \,\}_n \{\mathbf{z}\}_n = \{D\mathbf{q}^e\}_n$);

2 risolvendo il sistema lineare $\{D\}_n\{\mathbf{b}\}_n = \{\mathbf{z}\}_n$ nel campo razionale.

Osserviamo che il calcolo in 1 può essere effettuato con l'algoritmo descritto nella sezione precedente ad un costo $O(n \log_2 n)$ e che tale algoritmo può essere reso stabile numericamente mediante una scelta opportuna del parametro x. Ad esempio, osservando che $z_n = \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!} B_{2n-2}(0)$, la scelta $x = (2\pi)^2$ renderebbe la successione z_n, $n \in \mathbb{N}$, limitata; infatti in tal caso $|z_n| \to 2$ se $n \to +\infty$, per la formula di Eulero. Effettuato il calcolo in 1 si ottengono n numeri macchina che costituiscono una ottima approssimazione in $\mathbb{R}$ delle quantità $x^s B_{2s}(0)/(2s)!$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Poi, nella fase 2, da questi numeri macchina occorre ricavare i numeri *razionali* di Bernoulli $B_{2s}(0)$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

3.3 Il sistema lineare triangolare inferiore di Toeplitz di Ramanujan risolto dai numeri di Bernoulli

In [] Ramanujan scrive esplicitamente 11 equazioni soddisfatte dai numeri di Bernoulli $B_2(0)$, $B_4(0)$, ..., $B_{22}(0)$. Esse sono le prime di un numero infinito di equazioni soddisfatte dagli infiniti numeri di Bernoulli. Riscrivendo tali equazioni secondo le nostre notazioni e definizioni, si ottiene il seguente sistema lineare triangolare inferiore:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 1 &&&&&&&&& \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 &&&&&&&& \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 &&&&&&& \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 1 &&&&&& \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{143}{4} & 0 & 0 & 1 &&&&& \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{286}{3} & 0 & 0 & 1 &&&& \\ 0 & 0 & \frac{204}{5} & 0 & 0 & 221 & 0 & 0 & 1 &&& \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{1938}{7} & 0 & 0 & \frac{3230}{7} & 0 & 0 & 1 && \\ 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & \frac{7106}{5} & 0 & 0 & \frac{3553}{4} & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ B_8(0) \\ B_{10}(0) \\ B_{12}(0) \\ B_{14}(0) \\ B_{16}(0) \\ B_{18}(0) \\ B_{20}(0) \\ B_{22}(0) \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{42} \\ \frac{1}{45} \\ -\frac{1}{132} \\ \frac{4}{455} \\ \frac{1}{120} \\ -\frac{1}{306} \\ \frac{3}{665} \\ \frac{1}{231} \\ -\frac{1}{552} \\ \cdot \end{bmatrix}. \qquad (\ldots)$$

Si noti che usando le utime tre equazioni di tale sistema e la conoscenza dei numeri di Bernoulli $B_2(0), \ldots, B_{16}(0)$, si ottengono i seguenti ulteriori numeri di Bernoulli:

$$B_{18}(0) = \frac{43867}{798}, \quad B_{20}(0) = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22}(0) = \frac{854513}{138}.$$

Sia R la matrice semi-infinita dei coefficienti del sistema di Ramanujan di cui sopra. Ricordando la definizione della matrice semi-infinita lower-shift Z e del vettore semi-infinito $\mathbf{b} = [B_0(0)\, B_2(0)\, B_4(0)\, \ldots]^T$, osserviamo che il sistema si può riscrivere come $RZ^T\mathbf{b} = \mathbf{f}$, dove con $\mathbf{f} = [f_1\, f_2\, f_3 \cdot]^T$ abbiamo indicato ovviamente il vettore sulla destra dei temini noti. Apparentemente sembra che gli elementi non nulli di R e di $\mathbf{f}$ non abbiano nulla a che fare tra loro, cioè sembra impossibile indovinare, solamente osservando le 11 equazioni di cui sopra, la dodicesima equazione del sistema di Ramanujan. Si può solo indovinare che gli elementi diversi da zero della matrice R sono nella stessa posizione dove sono gli elementi diversi da zero di una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $\tilde{R}$ del tipo $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k Z^{3k}$.

In realtà, è facile accorgersi che *deve valere* la seguente identità matriciale

$$R\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\tilde{R}, \quad \Lambda = Z^T D Z = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{x^2}{4!} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{x^3}{6!} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

dove D è definita in ... e

$$\tilde{R} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{3k}}{(6k+2)!(2k+1)} Z^{3k} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 1 &&&&&&&&& \\ \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&&&&&&& \\ 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&&&&&& \\ 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&&&&& \\ \frac{2x^6}{14!5} & 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&&&& \\ 0 & \frac{2x^6}{14!5} & 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&&& \\ 0 & 0 & \frac{2x^6}{14!5} & 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 &&& \\ \frac{2x^9}{20!7} & 0 & 0 & \frac{2x^6}{14!5} & 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 && \\ 0 & \frac{2x^9}{20!7} & 0 & 0 & \frac{2x^6}{14!5} & 0 & 0 & \frac{2x^3}{8!3} & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

infatti si verifica facilmente che la sottomatrice 11×11 in alto a sinistra di $R\Lambda^{-1}$ è uguale alla sottomatrice 11×11 in alto a sinistra di $\Lambda^{-1}\tilde{R}$.

Supponendo che questa congettura sia esatta, si hanno le seguenti equivalenze: $RZ^T\mathbf{b} = \mathbf{f}$ iff $R\Lambda^{-1}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f}$ iff $\Lambda^{-1}\tilde{R}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \mathbf{f}$ iff

$$\tilde{R}\Lambda Z^T\mathbf{b} = \tilde{R}Z^T D\mathbf{b} = \Lambda\mathbf{f} = Z^T DZ\mathbf{f}. \qquad (quasiRamanujan)$$

Quindi, il vettore $Z^T D\mathbf{b}$ è soluzione di un sistema triangolare inferiore di Toeplitz *sparso* – ovvero nella cui matrice dei coefficienti due diagonali nulle si alternano alle diagonali non nulle – che chiamiamo sistema quasi Ramanujan.

3.4 Teorema riassuntivo dei 3 (6) sistemi lineari t.i.T. risolti dai numeri di Bernoulli

In this section we collect in a Theorem three l.t.T. linear systems solved by the vector $D_x\mathbf{b}$, say of type I, and the corresponding l.t.T. linear systems solved by the vector $Z^T D_x\mathbf{b}$, say of type II. In fact, till now, we have only found two systems of type I, the even and odd systems ... and ..., and, partially, one system of type II, the quasi Ramanujan system ... (note that for the latter system only the coefficient matrix has been written explicitely).

In the following first we state a Proposition which allows one to state a system of type II from a system of type I, and viceversa. Then we state the Theorem, with the six l.t.T. linear systems solved by Bernoulli numbers, and we prove it by applying the Proposition to the even, odd, and quasi Ramanujan systems, and, in the same time, by completing the definition of the Ramanujan system.

Proposition. Let Z_{n-1} and Z_n be the upper-left $(n-1)\times(n-1)$ and $n \times n$ submatrices of the semi-infinite lower-shift matrix Z, respectively. Assume that, for some α_j and f_j (or w_j), the following equality holds:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Z_n^j \begin{bmatrix} B_0(0) \\ \frac{x}{2!}B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!}B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{x}{2!}f_1 \\ \frac{x^2}{4!}f_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}f_{n-1} \end{bmatrix} + B_0(0) \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} w_0 \\ \frac{x}{2!}w_1 \\ \frac{x^2}{4!}w_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}w_{n-1} \end{bmatrix} \right),$$

where η and μ are arbitrary parameters. Then we have

$$\sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!}B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!}B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!}f_1 \\ \frac{x^2}{4!}f_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}f_{n-1} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} \frac{x}{2!}w_1 \\ \frac{x^2}{4!}w_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}w_{n-1} \end{bmatrix} - B_0(0) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \right).$$

Also the converse is true provided that $\alpha_0 B_0(0) = \eta + B_0(0)\cdot\mu$ (or $\alpha_0 B_0(0) = w_0$).

Proof. Exploit the equality $Z_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{e}_1 & Z_{n-1} \end{bmatrix}$. The details are left to the reader. $\square$

Theorem. Set

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i Z^i = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Let $d(\mathbf{z})$ be the diagonal matrix with z_i as diagonal entries. Set

$$\mathbf{b} = [B_0(0)\ B_2(0)\ B_4(0)\ \cdot\ ]^T, \quad D_x = \mathrm{diag}\,(\frac{x^i}{(2i)!},\ i = 0,1,2,\ldots),\ x \in \mathbb{R},$$

where $B_{2i}(0)$, $i = 0,1,2,\ldots$, are the Bernoulli numbers.
Then *the vectors $D_x\mathbf{b}$ and $Z^T D_x\mathbf{b}$ solve the following l.t.T. linear systems*

$$L(\mathbf{a})\,(D_x\mathbf{b}) = D_x\mathbf{q}, \qquad (\ldots typeI)$$

$$L(\mathbf{a})\,(Z^T D_x\mathbf{b}) = d(\mathbf{z}) Z^T D_x\mathbf{q}, \qquad (\ldots typeII)$$

where the vectors $\mathbf{a} = (a_i)_{i=0}^{+\infty}$, $\mathbf{q} = (q_i)_{i=0}^{+\infty}$, and $\mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^{+\infty}$, can assume respectively the values:

$$\begin{gathered} a_i^R = \delta_{i=0 \bmod 3} \frac{2x^i}{(2i+2)!(\frac{2}{3}i+1)}, \quad q_i^R = \frac{1}{(2i+1)(i+1)}(1 - \delta_{i=2 \bmod 3}\frac{3}{2}),\ i = 0,1,2,3,\ldots \\ z_i^R = 1 - \delta_{i=0 \bmod 3}\frac{1}{\frac{2}{3}i+1},\ i = 1,2,3,\ldots, \end{gathered} \qquad (\ldots)$$

$$\begin{gathered} a_i^e = \frac{2x^i}{(2i+2)!}, \quad q_i^e = \frac{1}{2i+1},\ i = 0,1,2,3,\ldots \\ z_i^e = \frac{i}{i+1},\ i = 1,2,3,\ldots, \end{gathered} \qquad (\ldots)$$

$$\begin{gathered} a_i^o = \frac{x^i}{(2i+1)!},\ i = 0,1,2,3,\ldots,\ q_0^o = 1,\ q_i^o = \frac{1}{2},\ i = 1,2,3,\ldots \\ z_i^o = \frac{2i-1}{2i+1},\ i = 1,2,3,\ldots\ . \end{gathered} \qquad (\ldots)$$

Proof. From the quasi Ramanujan semi-infinite linear system ..., we obtain the following finite linear system

$$\sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!}B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!}B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!}f_1 \\ \frac{x^2}{4!}f_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}f_{n-1} \end{bmatrix},\ \alpha_j = \delta_{j=0 \bmod 3}\frac{2x^j}{(2j+2)!(\frac{2}{3}j+1)}, \qquad (*)$$

$$\begin{gathered} f_1 = \tfrac{1}{6},\ f_2 = -\tfrac{1}{30},\ f_3 = \tfrac{1}{42},\ f_4 = \tfrac{1}{45},\ f_5 = -\tfrac{1}{132},\ f_6 = \tfrac{4}{455}, \\ f_7 = \tfrac{1}{120},\ f_8 =, -\tfrac{1}{306}\ f_9 = \tfrac{3}{665},\ f_{10} = \tfrac{1}{231},\ f_{11} = -\tfrac{1}{552}, \ldots \end{gathered}$$

Then, by the Proposition, if $\eta + B_0(0)\cdot\mu = \alpha_0 B_0(0)$, we have that

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Z_n^j \begin{bmatrix} B_0(0) \\ \frac{x}{2!}B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!}B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \frac{x}{2!}f_1 \\ \frac{x^2}{4!}f_2 \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!}f_{n-1} \end{bmatrix} + B_0(0) \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

or, more precisely, that

$$(I+\frac{2}{8!3}x^3Z^3+\frac{2}{14!5}x^6Z^6+\frac{2}{20!7}x^9Z^9+\ldots)\begin{bmatrix} B_0(0) \\ \frac{x}{2!}B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!}B_4(0) \\ \frac{x^3}{6!}B_6(0) \\ \frac{x^4}{8!}B_8(0) \\ \frac{x^5}{10!}B_{10}(0) \\ \frac{x^6}{12!}B_{12}(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{x}{2!}\frac{1}{6} \\ \frac{x^2}{4!}(-\frac{1}{30}) \\ \frac{x^3}{6!}\frac{1}{42}+\frac{2x^3}{8!3} \\ \frac{x^4}{8!}\frac{1}{45} \\ \frac{x^5}{10!}(-\frac{1}{132}) \\ \frac{x^6}{12!}\frac{4}{455}+\frac{2x^6}{14!5} \\ \frac{x^7}{14!}\frac{1}{120} \\ \frac{x^8}{16!}(-\frac{1}{306}) \\ \frac{x^9}{18!}\frac{3}{665}+\frac{2x^9}{20!7} \\ \frac{x^{10}}{20!}\frac{1}{231} \\ \frac{x^{11}}{22!}(-\frac{1}{552}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!}(\frac{1}{1\cdot 1}) \\ \frac{x}{2!}(\frac{1}{3\cdot 2}) \\ \frac{x^2}{4!}(\frac{1}{5\cdot 3}-\frac{1}{5\cdot 2}) \\ \frac{x^3}{6!}(\frac{1}{7\cdot 4}) \\ \frac{x^4}{8!}(\frac{1}{9\cdot 5}) \\ \frac{x^5}{10!}(\frac{1}{11\cdot 6}-\frac{1}{11\cdot 4}) \\ \frac{x^6}{12!}(\frac{1}{13\cdot 7}) \\ \frac{x^7}{14!}(\frac{1}{15\cdot 8}) \\ \frac{x^8}{16!}(\frac{1}{17\cdot 9}-\frac{1}{17\cdot 6}) \\ \frac{x^9}{18!}(\frac{1}{19\cdot 10}) \\ \frac{x^{10}}{20!}(\frac{1}{21\cdot 11}) \\ \frac{x^{11}}{22!}(\frac{1}{23\cdot 12}-\frac{1}{23\cdot 8}) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

The latter equality is a remarkable remark that allows us to prove that $D_x\mathbf{b}$ must solve the following precise form of the Ramanujan system:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j Z^j D_x\mathbf{b} = D_x\mathbf{q}^R, \qquad (Ramanujan)$$

$$\alpha_j=\delta_{j=0\,\mathrm{mod}\,3}\frac{2x^j}{(2j+2)!(\frac{2}{3}j+1)},\ q_i^R=\frac{1}{(2i+1)(i+1)}(1-\delta_{i=2\,\mathrm{mod}\,3}\frac{3}{2}),\ i=0,1,2,3,\ldots\ .$$

Note that from the explicit expression of $\mathbf{q}^R$ just obtained, it follows an explicit expression for the entries f_i of the original Ramanujan system …:

$$f_i=\frac{1}{(2i+1)(i+1)}(1-\delta_{i=2\,\mathrm{mod}\,3}\frac{3}{2}-\delta_{i=0\,\mathrm{mod}\,3}\frac{1}{\frac{2}{3}i+1}),\quad i=1,2,3,\ldots.$$

Note also that (*) can be rewritten as

$$\sum_{j=0}^{n-2}\alpha_j Z_{n-1}^j I_n^2 D_x\mathbf{b} = \mathrm{diag}\,(z_i,\ i=1,2,\ldots,n-1)I_n^2 D_x\mathbf{q}^R$$

for suitable z_i (the meaning of I_n^2 is clear from the context). Such z_i are easily obtained by imposing the equality

$$(1-\delta_{i=2\,\mathrm{mod}\,3}\frac{3}{2}-\delta_{i=0\,\mathrm{mod}\,3}\frac{1}{\frac{2}{3}i+1})=z_i(1-\delta_{i=2\,\mathrm{mod}\,3}\frac{3}{2}),$$

which leads to the formula:

$$z_i=1-\frac{\delta_{i=0\,\mathrm{mod}\,3}\frac{1}{\frac{2}{3}i+1}}{1-\delta_{i=2\,\mathrm{mod}\,3}\frac{3}{2}}=1-\delta_{i=0\,\mathrm{mod}\,3}\frac{1}{\frac{2}{3}i+1}.$$

So, the type I and II Ramanujan systems (…, … and …) hold.

Now let us consider the two even and odd systems … and …:

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2x^j}{(2j+2)!}Z^jD_x\mathbf{b}=D_x\mathbf{q}^e,\ \mathbf{q}^e=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{(2j+1)!}Z^jD_x\mathbf{b}=D_x\mathbf{q}^o,\ \mathbf{q}^o=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \cdot \end{bmatrix},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{2x^j}{(2j+2)!} Z_n^j I_n^1 D_x \mathbf{b} = I_n^1 D_x \mathbf{q}^e, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{(2j+1)!} Z_n^j I_n^1 D_x \mathbf{b} = I_n^1 D_x \mathbf{q}^o.$$

And apply to them the Proposition:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{2x^j}{(2j+2)!} Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!} B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} \frac{1}{3} \\ \frac{x^2}{4!} \frac{1}{5} \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix} - B_0(0) \begin{bmatrix} \frac{2x}{4!} \\ \frac{2x^2}{6!} \\ \cdot \\ \frac{2x^{n-1}}{(2n)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \frac{2}{4!} \\ x^2 \frac{4}{6!} \\ x^3 \frac{6}{8!} \\ \cdot \\ x^{n-1} \frac{2(n-1)}{(2n)!} \end{bmatrix},$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{x^j}{(2j+1)!} Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!} B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{4!} \frac{1}{2} \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} \frac{1}{2} \end{bmatrix} - B_0(0) \begin{bmatrix} \frac{x}{3!} \\ \frac{x^2}{5!} \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2n-1)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \frac{1}{3!2} \\ x^2 \frac{3}{5!2} \\ x^3 \frac{5}{7!2} \\ \cdot \\ x^{n-1} \frac{2n-3}{(2n-1)!2} \end{bmatrix},$$

from which it follows

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{2x^j}{(2j+2)!} Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!} B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} \frac{1}{4 \cdot 3} \\ \frac{x^2}{4!} \frac{2}{6 \cdot 5} \\ \frac{x^3}{6!} \frac{3}{8 \cdot 7} \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} \frac{n-1}{2n(2n-1)} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{i}{i+1}, i = 1 \ldots n-1\right) I_n^2 D_x \mathbf{q}^e,$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} \frac{x^j}{(2j+1)!} Z_{n-1}^j \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} B_2(0) \\ \frac{x^2}{4!} B_4(0) \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} B_{2(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2!} \frac{1}{2 \cdot 3} \\ \frac{x^2}{4!} \frac{3}{2 \cdot 5} \\ \frac{x^3}{6!} \frac{5}{2 \cdot 7} \\ \cdot \\ \frac{x^{n-1}}{(2(n-1))!} \frac{2n-3}{2(2n-1)} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left(\frac{2i-1}{2i+1}, i = 1 \ldots n-1\right) I_n^2 D_x \mathbf{q}^o.$$

So, also the type II even and odd systems (…, … and …) hold. □

3.5 Sulla necessità di un nuovo algoritmo per la risoluzione di sistemi lineari t.i.T.

Ora che sappiamo che i primi n numeri di Bernoulli, a meno di fattori noti, risolvono sistemi triangolari inferiori di Toeplitz $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, A $n \times n$ (A =sottomatrice $n \times n$ in alto a sinistra di $L(\mathbf{a})$ in …), per calcolarli possiamo utilizzare l'algoritmo descritto nella Sezione …, ben definito se $n = 2^s$. Se rappresentiamo la prima colonna della matrice A triangolare inferiore di Toeplitz in orizzontale, la prima fase di tale algoritmo, ovvero la fase in cui si trasforma A nella matrice identica, può essere rappresentata schematicamente attraverso i seguenti passi:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \cdot & \rightarrow \\
1 & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \mathit{0} & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
\cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdot
\end{array} \qquad (O(n \log_2 n))$$

(quattro passi se $n = 16$).

In realtà si vede subito che l'algoritmo considerato non si applica bene al sistema lineare sparso di Ramanujan …. Ad esso andrebbe applicato, invece, un algoritmo, per la risoluzione di sistemi triangolari inferiori di Toeplitz, la cui prima fase schematicamente possa essere rappresentata nel seguente modo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccc}
1 & * & \cdot & \rightarrow \\
1 & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \mathit{0} & * & \mathit{0} & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathit{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & \cdot & \rightarrow \\
\cdot & \cdot & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \cdot & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$(O(n \log_3 n))$$

(tre passi se $n = 27$). In altre parole, ad ogni passo, invece di annullare la metà delle diagonali non nulle rimanenti, se ne annullerebbero $2/3$ di esse. Tale algoritmo, inoltre, richiederebbe un passo in meno, se applicato al sistema di Ramanujan.

È possibile introdurre un siffatto algoritmo, ben definito per $n = 3^s$; esso è illustrato nella seguente ultima sezione del presente lavoro. Poi, nell'Appendice 3, si descrive nei dettagli un algoritmo generale, ben definito quando $n = b^s$ con b primo, che include come casi particolari i casi già visti $n = 2^s$ e $n = 3^s$.

4. Un algoritmo per la risoluzione di sistemi di n equazioni lineari triangolari di Toeplitz con n potenza di 3

In questa sezione si illustrerà un algoritmo di costo $O(n \log_3 n)$ per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, essendo A una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $n \times n$ con n potenza di 3 e $[A]_{11} = 1$.

Occorre riscrivere il Lemma 2 in una versione adatta al caso n potenza di 3.

Dato un vettore $\mathbf{v} = [v_0\, v_1\, v_2 \cdot]^T \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, sia E la matrice semi-infinita di 0 e 1 che manda $\mathbf{v}$ nel vettore $E\mathbf{v} = [v_0\, 0\, 0\, v_1\, 0\, 0\, v_2\, 0\, 0 \cdots]^T$:

$$
E = \begin{bmatrix}
1 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & 1 & & \\
0 & 0 & & \\
0 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}.
$$

In altre parole, l'azione di E su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire due zeri tra due successive componenti di $\mathbf{v}$. Si osserva facilmente che

$$
E^2 = \begin{bmatrix}
1 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & & & \\
0 & 1 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}, \quad
E^s = \begin{bmatrix}
1 & & & \\
\mathbf{0} & & & \\
0 & 1 & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\
0 & 0 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}_{3^s-1},
$$

cioè l'azione di E^s su $\mathbf{v}$ ha l'effetto di inserire $3^s - 1$ zeri tra due successive componenti di $\mathbf{v}$.

Lemma 2. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vettori di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con $u_0 = v_0 = 1$. Allora $L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}$, e, più in generale, per ogni $s \in \mathbb{N}$ si ha $L(E^s\mathbf{u})E^s\mathbf{v} = E^sL(\mathbf{u})\mathbf{v}$.

Dimostrazione. Come nel caso n potenza di 2. $\square$

4.1 L'algoritmo

Sia A una matrice l.t.T. $n \times n$ con n potenza di 3 e $[A]_{11} = 1$. Si vuole risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$. L'algoritmo seguente sfrutta l'osservazione che A^{-1} è ancora una matrice l.t.T. $n \times n$.

1 Si calcola la prima colonna della matrire l.t.T. A^{-1}, ovvero si risolve il sistema lineare particolare $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ utilizzando l'algoritmo ... di costo $O(n \log_3 n)$ illustrato nella sezione seguente, basato sulla ripetuta applicazione dei Lemmi 1 e 2.

2 Si calcola il prodotto matrice t.i.T.-vettore $A^{-1}\mathbf{f}$ effettuando non più di $O(n \log_3 n)$ operazioni aritmetiche (vedi Appendici 1 e 2).

4.2 Il calcolo della prima colonna dell'inversa di una matrice l.t.T. $n \times n$ con n potenza di 3

Per semplicità illustriamo l'algoritmo per il calcolo di $\mathbf{x}$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ nel caso $n = 9$. Indicheremo, a volte, cos'è che cambia nel caso generale $n = 3^s$, $s \in \mathbb{N}$; comunque tale caso è facilmente deducibile da quello considerato. L'algoritmo è simile a quello visto nel caso n potenza di 2. Il costo finale $O(n \log_3 n)$ dell'algoritmo deriva dal fatto che ad ogni passo della prima parte si annullano 2/3 delle diagonali rimaste non nulle, e dal fatto che la seconda parte è semplificabile sfruttando il fatto che il vettore $\mathbf{e}_1$ ha solo una componente non nulla.

Per prima cosa osserviamo che la matrice A 9×9 può essere vista come la sottomatrice in alto a sinistra di una matrice $L(\mathbf{a})$ semi-infinita triangolare inferiore di Toeplitz con prima colonna $[1\, a_1\, a_2\, \cdot\, a_7\, a_8\, a_9\, \cdot]^T$.

Passo 1. Trovare $\hat{\mathbf{a}}$ tale che

$$L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&& \\ a_1 & 1 &&&&&&& \\ a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)}$$

per certi $a_i^{(1)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(1)}$. Il calcolo degli $a_i^{(1)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}$, un prodotto matrice t.i.T. 9×9 ($3^s \times 3^s$) per vettore [o, più precisamente, tre prodotti t.i.T. 3×3 ($3^{s-1} \times 3^{s-1}$) per vettore]; il calcolo di $\hat{\mathbf{a}}$ richiede un prodotto matrice t.i.T. 9×9 ($3^s \times 3^s$) per vettore (vedi ...).

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E\mathbf{a}^{(1)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con due nulle.

Passo 2. Trovare $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ 0 & 1 &&&&&&&& \\ 0 & 0 & 1 &&&&&&& \\ a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 &&&&&& \\ 0 & a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 &&&&& \\ 0 & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 &&&& \\ a_2^{(1)} & 0 & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 &&& \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 && \\ 0 & 0 & a_2^{(1)} & 0 & 0 & a_1^{(1)} & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{a}_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$$

per certi $a_i^{(2)} \in \mathbb{C}$ e calcolare tali $a_i^{(2)}$. Il calcolo degli $a_i^{(2)}$ richiede, una volta noto $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$, il prodotto di una matrice t.i.T. 3×3 ($3^{s-1} \times 3^{s-1}$) per un vettore [o, più precisamente, tre prodotti t.i.T. 1×1 ($3^{s-2} \times 3^{s-2}$) per vettore]. Non e' vero! Nessuna componente di $\mathbf{a}^{(2)}$ va calcolata se $n = 9$!

Nota. Per il Lemma 1, si ha allora che $L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(E\mathbf{a}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)})$, cioè la matrice t.i.T. $L(\mathbf{a})$ è trasformata in una matrice t.i.T. che alterna le diagonali non nulle con otto nulle.

Nota. Per il Lemma 2, se $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ allora $L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E^2\mathbf{a}^{(2)}$. Il calcolo di $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$ tale che $L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)}$ richiede un prodotto matrice t.i.T. 3×3 ($3^{s-1} \times 3^{s-1}$) per vettore (vedi ...).

Se $n = 3^s > 9$, allora continua. Altrimenti è completata la prima parte dell'Algoritmo.

Riassumendo, abbiamo provato che

$$L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}})L(\mathbf{a}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) \qquad (\ldots)$$

dove, osserviamo, le sotto matrici 9×9 in alto a sinistra di $L(\mathbf{a})$ e $L(E^2\mathbf{a}^{(2)})$ sono, rispettivamente, la matrice triangolare inferiore di Toeplitz data inizialmente A e la matrice identica I,

$$L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ a_7 & \cdot & a_1 & 1 & & & \\ a_8 & a_7 & \cdot & a_1 & 1 & & \\ a_9 & a_8 & a_7 & \cdot & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad L(E^2\mathbf{a}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & & \\ a_1^{(2)} & 0 & \cdot & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

e le operazioni che abbiamo dovuto fare finora sono state: due prodotti 9×9 l.t.T. $\cdot$ per vettore + un prodotto 3×3 l.t.T. $\cdot$ per vettore (se A è $n \times n$ con $n = 3^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: due prodotti $3^s \times 3^s$ l.t.T. $\cdot$ vettore $+ \ldots +$ due prodotti 9×9 l.t.T. $\cdot$ vettore + un prodotto 3×3 l.t.T. $\cdot$ per vettore).

Veniamo ora al nostro scopo, calcolare la prima colonna di A^{-1}, e illustriamo quindi la seconda parte dell'algoritmo. Consideriamo il seguente sistema lineare semi-infinito:

$$L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E\mathbf{v} \qquad (\ldots)$$

dove $\mathbf{v}$ è un generico vettore semi-infinito di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (se A è $n \times n$ con $n = 3^s$ al posto di 1 in ..., come potenza di E, ci sarebbe $s - 1$). Tale sistema può essere riscritto come segue

$$\begin{bmatrix} A & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_9 \\ z_9 \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ v_3 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

cioè evidenziando la parte superiore del sistema, di sole 9 equazioni.

Nota: prima di procedere, si noti che $\{\mathbf{z}\}_9$ è tale che $A\{\mathbf{z}\}_9 = [v_0\ 0\ 0\ v_1\ 0\ 0\ v_2\ 0\ 0]$, $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Quindi la scelta $v_0 = 1$ e $v_1 = v_2 = 0$, renderebbe $\{\mathbf{z}\}_9$ uguale al vettore da noi cercato, $A^{-1}\mathbf{e}_1$.

Usando l'uguaglianza ... si dimostra immediatamente che il sistema $L(\mathbf{a})\mathbf{z} = E\mathbf{v}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} I_9 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_9 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(E^2\mathbf{a}^{(2)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E\mathbf{v}.$$

Per il Lemma 2 il secondo membro di quest'ultima uguaglianza può essere riscritto più convenientemente:

$$L(\hat{\mathbf{a}})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})E\mathbf{v} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\mathbf{v}.$$

Quindi, vale la seguente identità:

$$\begin{bmatrix} I_9 & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_9 \\ \vdots \end{bmatrix} = L(\hat{\mathbf{a}})EL(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\mathbf{v}.$$

Le matrici coinvolte nella rappresentazione a secondo membro sono triangolari inferiori e le sottomatrici quadrate di E in alto a sinistra, 9×9, 3×3, hanno il lato destro nullo, ad esempio

$$\{E\}_9 = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Queste due osservazioni ci permettono di ottenere una efficiente rappresentazione di $\{\mathbf{z}\}_9$:

$$\{\mathbf{z}\}_9 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_9\{E\}_9\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_9\{\mathbf{v}\}_9 = \{L(\hat{\mathbf{a}})\}_9\{E\}_{9,3}\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_3\{\mathbf{v}\}_3.$$

Usando tale formula, nel caso $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$, il vettore $\{\mathbf{z}\}_9$ può essere calcolato effettuando un prodotto matrice 9×9 l.t.T. $\cdot$ vettore (se A è $n \times n$ con $n = 3^s$ le operazioni da farsi sarebbero state: un prodotto 9×9 l.t.T. $\cdot$ vettore $+ \ldots +$ un prodotto $3^s \times 3^s$ l.t.T.$\cdot$ vettore), ovvero a metà del costo dell'*eliminazione Gaussiana*, la prima parte dell'algoritmo.

In conclusione, se $cj3^j$ è un limite superiore per il costo dell'operazione prodotto matrice $3^j \times 3^j$ l.t.T. $\cdot$ vettore, allora il costo dell'algoritmo illustrato, nel caso di A $n \times n$ con $n = 3^s$, è $\tilde{c}\sum_{j=2}^{s} j3^j = O(s3^s) = O(n \log_3 n)$.

Si osserva infine che per le componenti di $\hat{\mathbf{a}}$ tale che $L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = E\mathbf{a}^{(1)}$ si può dare una formula esplicita:

$$
L(\mathbf{a})\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&&&& \\
a_1 & 1 &&&&&&&&&&& \\
a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&&&& \\
a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&&& \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&&& \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&&& \\
a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&&& \\
a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&&& \\
a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&&& \\
a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 &&& \\
a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 && \\
a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix}
1 \\
-a_1 \\
-a_2 + a_1^2 \\
2a_3 - a_1 a_2 \\
-a_4 - a_1 a_3 + a_2^2 \\
-a_5 + 2a_1 a_4 - a_2 a_3 \\
2a_6 - a_1 a_5 - a_2 a_4 + a_3^2 \\
-a_7 - a_1 a_6 + 2a_2 a_5 - a_3 a_4 \\
-a_8 + 2a_1 a_7 - a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_4^2 \\
2a_9 - a_1 a_8 - a_2 a_7 + 2a_3 a_6 - a_4 a_5 \\
-a_{10} - a_1 a_9 + 2a_2 a_8 - a_3 a_7 - a_4 a_6 + a_5^2 \\
-a_{11} + 2a_1 a_{10} - a_2 a_9 - a_3 a_8 + 2a_4 a_7 - a_5 a_6 \\
\cdot
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
1 \\ 0 \\ 0 \\ a_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ a_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot
\end{bmatrix} = E\mathbf{a}^{(1)},
$$

$a_1^{(1)} = 3a_3 - 3a_1 a_2 + a_1^3,\;\; a_2^{(1)} = 3a_6 - 3a_1 a_5 - 3a_2 a_4 + 3a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_4 + a_2^3?,$
$a_3^{(1)} = 3a_9 - 3a_1 a_8 - 3a_2 a_7 + 6a_3 a_6 - 3a_1 a_2 a_6 - 3a_1 a_3 a_5 - 3a_2 a_3 a_4 + 3a_1^2 a_7 + 3a_1 a_4^2 - 3a_4 a_5 + 3a_5 a_2^2 + a_3^3,\;\; \dots$

$$
\hat{a}_i = -\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} a_r a_{i-r} + \delta_{i=0 \bmod 2} a_{\frac{i}{2}}^2 + 3 \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{s \geq \frac{3-i}{6}}^{0} a_{\frac{i-3}{2}+3s} a_{\frac{i+3}{2}-3s} & i \text{ odd} \\ \sum_{s \geq \frac{6-i}{6}}^{0} a_{\frac{i-6}{2}+3s} a_{\frac{i+6}{2}-3s} & i \text{ even} \end{array} \right., \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots,
$$

$$
\hat{\mathbf{a}} = L(\mathbf{c})\mathbf{d} = \Re[L(\mathbf{c})]\Re[\mathbf{d}] - \Im[L(\mathbf{c})]\Im[\mathbf{d}], \quad c_k = a_k t^k,\; d_k = a_k t^{2k}, \quad t = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}
$$

(l'ultima uguaglianza è valida se gli a_k sono reali).

Appendix 1: Il prodotto matrice t.i.T. per vettore

Il prodotto di una matrice triangolare inferiore di Toeplitz $n \times n$ per un vettore può essere calcolato con molto meno delle $n(n+1)/2$ moltiplicazioni più $(n-1)n/2$ addizioni richieste dall'algoritmo ovvio. I due algoritmi alternativi qui descritti usano la stretta relazione esistente tra le matrici di Toeplitz e le algebre delle matrici circolanti e (-1)-circolanti per ridurre l'operazione prodotto matrice t.i.T. per vettore al calcolo di qualche *trasformata discreta di Fourier*.

Preliminari. Sia $\Pi_{\pm 1}$ la matrice $n \times n$ $\Pi_{\pm 1} = Z^T \pm \mathbf{e}_n \mathbf{e}_1^T$. Allora

$$
\Pi_1 = F D_{1\omega^{n-1}} F^*, \quad \Pi_{-1} = (D_{1\rho^{n-1}} F) \rho D_{1\omega^{n-1}} (D_{1\rho^{n-1}} F)^* \qquad (\dots)
$$

dove F è la seguente matrice (simmetrica) unitaria di Fourier

$$
F = \frac{1}{\sqrt{n}} W, \quad W = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1}^{n}, \quad \omega \text{ tale che } \omega^n = 1,\, \omega^i \neq 1,\, 0 < i < n,
$$

$D_{1\omega^{n-1}} = \operatorname{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$, ρ è tale che $\rho^n = -1$, $\rho^i \neq -1$, $0 < i < n$, e $D_{1\rho^{n-1}} = \operatorname{diag}(1, \rho, \dots, \rho^{n-1})$.

Dalla ... segue facilmente che per le matrici circolante e (-1)-circolante la cui prima riga è $\mathbf{a}^T = [a_1\, a_2 \cdots a_n]$, cioè per le matrici $C(\mathbf{a}) := \sum_{k=1}^{n} a_k \Pi_1^{k-1}$ e $C_{-1}(\mathbf{a}) := \sum_{k=1}^{n} a_k \Pi_{-1}^{k-1}$, valgono le rappresentazioni

$$C(\mathbf{a}) = Fd(F^T\mathbf{a})d(F^T\mathbf{e}_1)^{-1}F^*, \quad C_{-1}(\mathbf{a}) = F_- d(F_-^T\mathbf{a})d(F_-^T\mathbf{e}_1)^{-1}F_-^*, \quad F_- = D_{1\rho^{n-1}}F,$$

dove con $d(\mathbf{z})$ indichiamo la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono le componenti del vettore $\mathbf{z}$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dato $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, l'operazione prodotto matrice-vettore $F\mathbf{z}$ è chiamata trasformata discreta di Fourier (DFT) di $\mathbf{z}$. La matrice di Fourier F soddisfa l'uguaglianza $F^2 = J\Pi_1$, ovvero $F^* = J\Pi_1 F$, da cui segue che la trasformata discreta di Fourier inversa di $\mathbf{z}$, $F^*\mathbf{z}$, si riconduce al calcolo della DFT di $\mathbf{z}$. La DFT di $\mathbf{z}$ può essere calcolata con un metodo, noto come FFT, che, quando n è una potenza di un numero primo b, richiede solo $O(n \log_b n)$ operazioni aritmetiche (vedi l'Appendice 2). Ne segue che lo stesso ordine di operazioni aritmetiche è sufficiente per calcolare i prodotti matrice-vettore $C(\mathbf{a})\mathbf{z}$ e $C_{-1}(\mathbf{a})\mathbf{z}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$.

Siamo pronti per illustrare due procedure per il calcolo del prodotto di una matrice di Toeplitz $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$ per un vettore. Ovviamente tali procedure possono essere applicate al nostro caso, ove $t_k = 0$, $k < 0$. Sottolineiamo il fatto che potrebbero esistere e sarebbero benvenuti metodi più efficienti per il calcolo del prodotto matrice t.i.T. per vettore, operazione alla base degli algoritmi presentati in questo lavoro. Nelle precedenti sezioni abbiamo visto infatti che la risoluzione di un sistema lineare triangolare di Toeplitz di n equazioni con n potenza di 2 (3) può ricondursi al calcolo di $O(\log_2 n)$ ($O(\log_3 n)$) prodotti matrice-vettore dove la matrice è sempre triangolare di Toeplitz ed è di dimensione variabile, che si dimezza (trimezza) ogni volta. Ne segue che è opportuno avere a disposizione un metodo che effettui tali prodotti il più efficientemente possibile.

I procedura (T immersa in una circolante)

Si consideri una generica matrice di Toeplitz T 4×4 ed un vettore $\mathbf{v}$ 4×1. Allora T può essere vista come la sottomatrice in alto a sinistra di una matrice circolante C 8×8, e per il vettore $T\mathbf{v}$ vale la seguente rappresentazione:

$$T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 \\ 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} \\ t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & t_{-3} & 0 & t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_4 = \left\{ C \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}_4$$

dove col simbolo $\{\mathbf{z}\}_4$ si intende il vettore 4×1 le cui componenti sono le prime quattro componenti del vettore $\mathbf{z}$.

Se T è $n \times n$ e $\mathbf{v}$ è $n \times 1$, allora l'osservazione vale ancora:

$$T\mathbf{v} = \left\{ C \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}_n, \; C = C(\begin{bmatrix} t_0 \\ t_{-1} \\ \cdot \\ t_{-n+1} \\ 0 \\ t_{n-1} \\ \cdot \\ t_1 \end{bmatrix}) = \sqrt{2n} F_{2n} d(F_{2n} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_{-1} \\ \cdot \\ t_{-n+1} \\ 0 \\ t_{n-1} \\ \cdot \\ t_1 \end{bmatrix}) F_{2n}^H.$$

Se n è una potenza di 2 da questa formula si deduce immediatamente una procedura di costo $O(n \log_2 n)$ per il calcolo del prodotto di un matrice di Toeplitz $n \times n$ per un vettore (vedi Appendice 2).

II procedura (T espressa come somma di una circolante e di una (-1)-circolante)

Siano $\mathbf{a} = [a_1 \cdots a_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1 \cdots b_n]^T$ con $a_i = \frac{1}{2}(t_{-i+1} + t_{n-i+1})$, $b_i = \frac{1}{2}(t_{-i+1} - t_{n-i+1})$, $i = 1, \ldots, n$ ($t_n = 0$). Allora, per la nostra matrice di Toeplitz $T = (t_{i-j})_{i,j=1}^n$ vale la seguente rappresentazione:

$$T = C(\mathbf{a}) + C_{-1}(\mathbf{b}) = Fd(F^T\mathbf{a})d(F^T\mathbf{e}_1)^{-1}F^* + F_-d(F_-^T\mathbf{b})d(F_-^T\mathbf{e}_1)^{-1}F_-^*$$

Di nuovo, se n è una potenza di 2 (3, b) da questa formula si deduce immediatamente una procedura di costo $O(n \log_2 n)$ ($O(n \log_3 n)$, $O(n \log_b n)$) per il calcolo del prodotto di un matrice di Toeplitz $n \times n$ per un vettore. Vedi Appendice 2.

Appendice 2: the FFT algorithm

Proposition (FFT). Sia n una potenza di b, con b numero primo. Dato $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, la complessità della DFT di $\mathbf{z}$ è al più $O(n \log_b n)$.

Dimostrazione (n potenza di 2). Sia n pari. Poiché $\omega^{(i-1)(k-1)}$ è l'(i,k) elemento di W e z_k è il k-esimo elemento di $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
(W\mathbf{z})_i &= \textstyle\sum_{k=1}^n \omega^{(i-1)(k-1)} z_k = \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-2)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2j-1)} z_{2j} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n/2} \omega^{(i-1)(2(j-1)+1)} z_{2j} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} (\omega^2)^{(i-1)(j-1)} z_{2j}.
\end{aligned}$$

Si noti che ω è di fatto una funzione di n, cioè la giusta notazione per ω dovrebbe essere ω_n. Allora $\omega^2 = \omega_n^2$ è tale che $(\omega_n^2)^{n/2} = 1$ e $(\omega_n^2)^i \neq 1$ $0 < i < n/2$; in altre parole $\omega_n^2 = \omega_{n/2}$ (ovvero ω_n^2 è radice $n/2$-esima principale di 1). Quindi, abbiamo le identità

$$(W_n\mathbf{z})_i = \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{i-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(i-1)(j-1)} z_{2j}, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\ldots)$$

Ne segue che, per $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$,

$$(W_n\mathbf{z})_i = (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_i + \omega_n^{i-1} (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix})_i.$$

Inoltre, ponendo $i = \frac{n}{2} + k$, $k = 1, \ldots, \frac{n}{2}$, in ..., otteniamo

$$\begin{aligned}
(W_n\mathbf{z})_{\frac{n}{2}+k} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} + \omega_n^{\frac{n}{2}} \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{\frac{n}{2}(j-1)} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j-1} - \omega_n^{k-1} \sum_{j=1}^{n/2} \omega_{n/2}^{(k-1)(j-1)} z_{2j} \\
&= (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{bmatrix})_k - \omega_n^{k-1} (W_{n/2} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix})_k, \; k = 1, \ldots, \tfrac{n}{2}.
\end{aligned}$$

$(\omega_n^{\frac{n}{2}} = -1$; si pensi $\omega = e^{\pm \mathrm{i}2\pi/n})$. Le precedenti uguaglianze scalari possono essere riscritte in forma compatta:

$$W_n\mathbf{z} = \begin{bmatrix} I & D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \\ I & -D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n/2} & 0 \\ 0 & W_{n/2} \end{bmatrix} Q\mathbf{z},$$

$$D_{1\omega_n^{\frac{n}{2}-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega_n & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega_n^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (\ldots)$$

Sia c_n denota la complessità del prodotto matrice-vettore $F_n\mathbf{z}$. Allora, per la formula precedente,

$$c_n \leq 2c_{n/2} + rn, \ r \text{ costante},$$

e questo implica $c_n = O(n\log_2 n)$, se n è una potenza di 2.

La dimostrazione dell'ultima affermazione è lasciata al lettore.

Dimostrazione (n potenza di 3). Procedendo analogamente al caso n potenza di 2, si ottiene la seguente identità:

$$W_n\mathbf{z} = \begin{bmatrix} I & D_{1\omega_n^{\frac{n}{3}-1}} & D_{1\omega_n^{2(\frac{n}{3}-1)}} \\ I & \omega_n^{\frac{n}{3}} D_{1\omega_n^{\frac{n}{3}-1}} & \omega_n^{2\frac{n}{3}} D_{1\omega_n^{2(\frac{n}{3}-1)}} \\ I & \omega_n^{2\frac{n}{3}} D_{1\omega_n^{\frac{n}{3}-1}} & \omega_n^{4\frac{n}{3}} D_{1\omega_n^{2(\frac{n}{3}-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n/3} & 0 & 0 \\ 0 & W_{n/3} & 0 \\ 0 & 0 & W_{n/3} \end{bmatrix} Q\mathbf{z},$$

$$D_{1\omega_n^{\frac{n}{3}-1}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega_n & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega_n^{\frac{n}{3}-1} \end{bmatrix}, \ D_{1\omega_n^{2(\frac{n}{3}-1)}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \omega_n^2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \omega_n^{2(\frac{n}{3}-1)} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (\ldots)$$

Sia c_n la complessità del prodotto matrice-vettore $F_n\mathbf{z}$. Allora, per la formula precedente,

$$c_n \leq 3c_{n/3} + rn, \ r \text{ costante},$$

e questo implica $c_n = O(n\log_3 n)$, se n è una potenza di 3. $\square$

Appendix 3: the detailed l.t.T. linear system solver algorithm

Definitions:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad E^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^s-1},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad E\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ u_1 \\ \mathbf{0} \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad L(E\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \mathbf{0} & I & & & & \\ u_1 & \mathbf{0}^T & 1 & & & \\ \mathbf{0} & u_1 I & \mathbf{0} & I & & \\ u_2 & \mathbf{0}^T & u_1 & \mathbf{0}^T & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}.$$

Lemma 2: If $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ v_2 \\ \cdot \end{bmatrix}$, then

$$L(E\mathbf{u})E\mathbf{v} = EL(\mathbf{u})\mathbf{v}, \quad L(E^s\mathbf{u})E^s\mathbf{v} = E^s L(\mathbf{u})\mathbf{v}, \quad \forall\, s \in \mathbb{N}\,.$$

The algorithm.

Introduce low complexity l.t.T. linear system solvers:

$$L(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} A & O \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \ A \ b^k \times b^k, \quad \mathbf{a}^{(0)} := \mathbf{a}$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(0)}$, $\mathbf{a}^{(1)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(0)})\hat{\mathbf{a}}^{(0)} = E\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(\mathbf{a}^{(0)})L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)}) = L(E\mathbf{a}^{(1)}).$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(1)})\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E\mathbf{a}^{(1)})E\hat{\mathbf{a}}^{(1)} = E^2\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^2-1},$$

$$\underline{L(E\mathbf{a}^{(1)})}L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) = L(E^2\mathbf{a}^{(2)}).$$

(use Lemmi). Find $\hat{\mathbf{a}}^{(2)}$, $\mathbf{a}^{(3)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(2)})\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^2\mathbf{a}^{(2)})E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)} = E^3\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^3-1},$$

$$\underline{L(E^2\mathbf{a}^{(2)})}L(E^2\hat{\mathbf{a}}^{(2)}) = L(E^3\mathbf{a}^{(3)}).$$

... Find $\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}$, $\mathbf{a}^{(k-1)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(k-2)})\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)} = E\mathbf{a}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^{k-2}\mathbf{a}^{(k-2)})E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)} = E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1},$$

$$\underline{L(E^{k-2}\mathbf{a}^{(k-2)})}L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}) = L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)}).$$

Find $\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)}$, $\mathbf{a}^{(k)}$ such that

$$L(\mathbf{a}^{(k-1)})\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)} = E\mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}, \quad \text{so that}$$

$$L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)})E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)} = E^{k}\mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k}-1},$$

$$\underline{L(E^{k-1}\mathbf{a}^{(k-1)})}L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)}) = L(E^{k}\mathbf{a}^{(k)}).$$

Then

$$\begin{bmatrix} \overbrace{I}^{b^k} & O \ \cdot \\ \begin{bmatrix} a_1^{(k)} & \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \cdot\ \cdot \end{bmatrix} = L(E^k\mathbf{a}^{(k)}) = L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}) \cdots L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)})L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})L(\mathbf{a}^{(0)}).$$

This implies that

$$L(\mathbf{a}^{(0)})\mathbf{z} = \mathbf{c} \ \text{ iff } \ L(E^k\mathbf{a}^{(k)})\mathbf{z} = L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})L(E\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) \cdots L(E^{k-2}\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})L(E^{k-1}\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\mathbf{c}.$$

Moreover, if

$$\mathbf{c} = E^{k-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \mathbf{0} \\ v_1 \\ \mathbf{0} \\ v_2 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix},\ \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1},$$

where $\mathbf{v} = (v_i)_{i=0}^{+\infty}$ is any vector (for example $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$), then by using Lemma 2, we obtain the following result:

$$
\begin{aligned}
& L(\mathbf{a}^{(0)})\mathbf{z} = \mathbf{c} \quad \text{iff} \\
& \begin{bmatrix} I_{b^k} & O \;\cdot \\ \begin{bmatrix} a_1^{(k)} & \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \cdot\;\cdot \end{bmatrix} \mathbf{z} = L(E^k \mathbf{a}^{(k)})\mathbf{z} = \\
& L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)}) E L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}) E \cdots E L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)}) E L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

In other words, the vector $\{\mathbf{z}\}_n$, $n = b^k$, such that

$$
\{L(\mathbf{a})\}_n \{\mathbf{z}\}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{b^k-1} & \cdot & a_1 & 1 \end{bmatrix} \{\mathbf{z}\}_n = \begin{bmatrix} v_0 \\ \mathbf{0} \\ v_1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ v_{b-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \;\; \mathbf{0} = \mathbf{0}_{b^{k-1}-1}
$$

(for example $\{L(\mathbf{a})\}_n^{-1}\{\mathbf{e}_1\}_n$, $v_0 = 1$, $v_i = 0$ $i \geq 1$), can be represented as follows

$$
\begin{aligned}
\{\mathbf{z}\}_n &= \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})\}_n \{E\}_n \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_n \{E\}_n \cdots \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})\}_n \{E\}_n \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_n \{\mathbf{v}\}_n \\
&= \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(0)})\}_n \{E\}_{n,\frac{n}{b}} \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(1)})\}_{\frac{n}{b}} \{E\}_{\frac{n}{b},\frac{n}{b^2}} \cdots \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-2)})\}_{\frac{n}{b^{k-2}}} \{E\}_{\frac{n}{b^{k-2}},\frac{n}{b^{k-1}}} \{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_{\frac{n}{b^{k-1}}} \{\mathbf{v}\}_b
\end{aligned}
$$

Amount of operations. In the following $n = b^k$ and $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{b-1}$:

First: For $j = 0, \ldots, k-1$ compute, by performing $\varphi_{\frac{n}{b^j}}$ arithmetic operations, the vectors $I^1_{\frac{n}{b^j}}\hat{\mathbf{a}}^{(j)}$ and $I^1_{\frac{n}{b^{j+1}}}\mathbf{a}^{(j+1)}$, i.e. scalars $\hat{a}_i^{(j)}$ and $a_i^{(j+1)}$ such that

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1^{(j)} & 1 & & & \\ a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{\frac{n}{b^j}-1}^{(j)} & \cdot & a_2^{(j)} & a_1^{(j)} & 1 \end{bmatrix}}_{\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(j)} \\ \hat{a}_2^{(j)} \\ \cdot \\ \hat{a}_{\frac{n}{b^j}-1}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ a_1^{(j+1)} \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ a_{\frac{n}{b^{j+1}}-1}^{(j+1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \ldots, k-1
$$

(note that there is no $a_i^{(k)}$ to be computed).

Important remark. The $\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}$ l.t.T. by vector products, $j = 0, \ldots, k-2$, that one has to perform in order to compute $I^1_{\frac{n}{b^{j+1}}}\mathbf{a}^{(j+1)}$, can be in fact replaced with b $\frac{n}{b^{j+1}} \times \frac{n}{b^{j+1}}$ l.t.T. by vector products, $j = 0, \ldots, k-2$.

Second: Compute the $b \times b$ l.t.T. by vector product $\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(k-1)})\}_{\frac{n}{b^{k-1}}} \begin{bmatrix} v_0 \\ \cdot \\ v_{b-1} \end{bmatrix}$, and $\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}$ l.t.T. by vector products of type

$$\underbrace{\left\{L(\hat{\mathbf{a}}^{(j)})\right\}_{\frac{n}{b^j}}}_{\frac{n}{b^j} \times \frac{n}{b^j}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ \bullet \\ \mathbf{0} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad j = k-2, \ldots, 1, 0.$$

Comments. If we assume the cost of a $b^j \times b^j$ l.t.T. by vector product and φ_{b^j} both bounded by $cb^j j$ where c is a constant (we know that this is true at least for $b = 2, 3$), then the total cost of the above operations is smaller than $O(b^k k) = O(n \log_b n)$. So, we have stated, in particular, a l.t.T. linear system solver of complexity $O(n \log_b n)$ (choose $v_0 = 1$, $v_i = 0$ $i > 0$).

Acknowledgements

Thanks to professor Wolf Gross who taught to the first author Bernoulli numbers and their beautiful properties, to professor Dario Bini who pointed us the problem of polynomial arithmetic related with the algorithms presented, and to the Rome-Moscow school 2012 which gave the authors the opportunity to teach, and then to write, in the present form, their studies on the numerical linear algebra of Bernoulli numbers.