TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

# Corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata


**Informazioni**
**Segreteria didattica**: *Dott.ssa Madalina Andronic*, tel. 06 72594685
**Coordinatore Corso di Laurea**: *Prof.ssa Carla Manni*
**Sito web**: `http://www.mat.uniroma2.it/didattica/`
**E-mail**: `dida@mat.uniroma2.it`


Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si inquadra nella Classe delle lauree magistrali in Matematica (Classe LM-40 del DM 16 Marzo 2007 "Determinazione delle classi di laurea") ed afferisce al Dipartimento di Matematica. La durata del corso di laurea è di due anni.

**Incentivi**

Per l'AA 2023/24, il Dipartimento di Matematica istituisce **3 premi laurea magistrale** dell'importo di **2000 euro** ciascuno, per gli studenti immatricolati al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata e **3 premi per tesi di laurea magistrale** dell'importo di **2000 euro** ciascuno. Informazioni dettagliate sono reperibili sul sito del corso di Laurea.

Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della matematica, garantendo ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni. Grazie alla sua formazione, il laureato magistrale in Matematica Pura ed Applicata potrà, a seconda dei casi, inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le sue capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti, oppure proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o affini.
Sono possibili percorsi formativi differenziati, atti ad integrare e completare la formazione matematica di ciascuno studente. Tuttavia, in ogni ambito vengono sottolineati gli aspetti metodologici al fine di assicurare una profonda comprensione della materia e la capacità di aggiornare costantemente le competenze acquisite. Con l'intento di accrescere le capacità di autonomia degli studenti, e per permettere la formulazione di piani di studio che si adattino alle esigenze di una società in rapida evoluzione, si è previsto un elevato grado di libertà nella scelta degli insegnamenti.
Al fine di far acquisire un'approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, il percorso formativo è caratterizzato dalla presenza, all'inizio, di insegnamenti intesi a fornire un quadro ampio e organico di argomenti di carattere avanzato nelle discipline fondamentali (algebra, analisi, geometria, fisica matematica, analisi numerica, probabilità). Successivamente, sono offerti insegnamenti a carattere specialistico, volti ad accogliere specifici interessi sviluppati dagli studenti, nonché a coadiuvare lo svolgimento del lavoro di tesi, cui è attribuita una valenza determinante per il compimento del ciclo di studi.
I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata devono inoltre essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari. Lo studente viene altresì sollecitato ad acquisire un contatto diretto con la letteratura matematica, anche a livello di ricerca, e ad affinare le capacità individuali di orientarsi nella consultazione di testi e nella creazione di bibliografie sia in italiano che in inglese. La redazione della prova finale costituisce, tra l'altro, una verifica dell'acquisizione di queste competenze e della padronanza delle tecniche usuali della comunicazione scientifica in ambito matematico.

# Indice

## Obiettivi formativi specifici del corso di laurea magistrale

Il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della matematica, garantendo ai suoi iscritti ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni.
Oltre ad avere un'approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, i laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata devono essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari, devono essere capaci di orientarsi nella consultazione della letteratura e di redigere bibliografie in ambito matematico.
I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata potranno, a seconda delle proprie inclinazioni e preferenze, proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le proprie capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti.

## Sbocchi lavorativi

Grazie alle conoscenze e alle competenze acquisite, ivi inclusa la mentalità flessibile e l'esperienza accumulata nell'analisi e soluzione di problemi, i laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata potranno disporre di un'ampia gamma di sbocchi occupazionali e professionali. I settori più indicati sono quelli in cui la matematica svolge un ruolo centrale sotto il profilo applicativo o teorico, o quantomeno costituisce un ambito chiaramente correlato quanto a importanza. Alcuni esempi:
- l'elaborazione e l'analisi di modelli a supporto dei processi industriali e dei servizi;
- l'analisi statistica dei dati;
- l'insegnamento;
- l'avviamento alla ricerca pura e applicata in un corso di dottorato;
- la diffusione della cultura scientifica;
- l'informatica e la telematica.

Inoltre, qualora il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata si innesti su un corso di laurea triennale in discipline affini, sarà possibile un pronto inserimento dei laureati anche in professioni o campi di studio differenti. Tutto questo è ampiamente documentato in una dettagliata analisi dei diversi impieghi ad alto livello dei laureati in Matematica in Italia.
Negli anni più recenti, i nostri laureati hanno trovato posti di lavoro negli ambiti più diversi ed in molte società importanti, tra cui Enel, Poste Italiane, TIM, Banca Nazionale del Lavoro, Accenture, Amazon, Deloitte, Engineering, KPMG consulting, ACEA, DMBI Consulting, AxA Assicurazioni, Allianz ConTe Assicurazioni, ARPM, BIP Business Integration Partners.

## Descrittori europei del titolo di studio

I Descrittori di Dublino di seguito riportati sono enunciazioni generali dei tipici risultati conseguiti dagli studenti che hanno ottenuto il titolo dopo aver completato con successo il ciclo di studio.

**Conoscenza e capacità di comprensione.** I laureati in Matematica Pura ed Applicata avranno:
- acquisito una conoscenza ampia e adeguata di tematiche avanzate in più settori della matematica, nonché in alcuni settori affini a questa disciplina;
- potuto acquisire una conoscenza adeguata di tecniche di formalizzazione e modellizzazione, anche complesse, tipiche delle applicazioni della matematica in vari ambiti scientifici e professionali;
- potuto acquisire un livello di comprensione del linguaggio, delle tecniche e dei contenuti dei principali settori della matematica, soprattutto relativi al campo di specializzazione prescelta, tale da metterli in grado di iniziare percorsi di avviamento alla ricerca.

Inoltre, i laureati in Matematica Pura ed Applicata dovranno avere facilità di astrazione, incluso lo sviluppo logico di teorie formali e delle loro relazioni. Lo strumento didattico privilegiato per il raggiungimento di tali obiettivi sono le lezioni, le esercitazioni e le attività di laboratorio e tutorato.

La verifica avviene in forma classica attraverso la valutazione di un elaborato scritto e/o un colloquio orale.

**Capacità di applicare conoscenza e comprensione.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno essere in grado di elaborare o applicare idee, anche originali, e possedere sicure competenze sia per ideare e sostenere argomentazioni che per risolvere problemi nel proprio campo di studi. In particolare, essi dovranno essere in grado di:
- comprendere approfonditamente problemi matematici anche di livello elevato;
- identificare gli elementi essenziali di un problema e saperlo modellizzare, in termini matematici, identificando metodologie idonee per la sua soluzione;
- produrre dimostrazioni originali e rigorose di semplici proposizioni in diversi campi della matematica.

Inoltre, con riferimento al campo di specializzazione prescelta, essi dovranno essere capaci di:
- estrarre informazioni qualitative da dati quantitativi;
- comprendere, utilizzare e progettare metodi teorici e/o computazionali adeguati alle tematiche affrontate;
- utilizzare in maniera efficace strumenti informatici di supporto.

La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avviene di norma mediante:
- le varie prove svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti durante la preparazione della prova finale.

**Autonomia di giudizio.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno:
- sapere collegare tra loro i diversi concetti matematici, tenendo presente la struttura logica e gerarchica della matematica;
- essere in grado di analizzare criticamente una dimostrazione, e di produrne una standard ove occorra;
- essere in grado di valutare l'appropriatezza di un modello o di una teoria matematica nella descrizione di un fenomeno concreto;
- essere in grado di fare ricerche bibliografiche autonome utilizzando libri di contenuto matematico, sviluppando anche una familiarità con le riviste scientifiche di settore;
- essere in grado di utilizzare per la ricerca scientifica gli archivi elettronici disponibili sul WEB, operando la necessaria selezione dell'informazione disponibile;
- essere in grado di capire e valutare le difficoltà del processo insegnamento/apprendimento in base all'argomento trattato e alla situazione dei discenti;
- possedere un adeguato livello di consapevolezza delle possibili implicazioni anche etiche e sociali della propria attività.

Queste capacità verranno stimolate in tutti gli insegnamenti, rafforzando il senso critico dello studente e assegnando problemi che lo studente deve svolgere anche in modo originale. La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avverrà di norma mediante:
- le varie prove svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti durante la preparazione della prova finale.

**Abilità comunicative.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata dovranno:
- essere in grado di elaborare o applicare idee, anche originali, e di sostenerle con chiarezza e rigore sia di fronte a specialisti del settore che ad un uditorio più vasto;
- sapere sollecitare, stimolare, favorire e guidare all'interesse per il pensiero matematico;
- ssere in grado di presentare la propria ricerca, o i risultati di una ricerca bibliografica, e di esporre in maniera compiuta il proprio pensiero su problemi, idee e soluzioni, utilizzando efficacemente, in forma scritta e orale, almeno una lingua dell'Unione Europea oltre l'italiano, nell'ambito specifico di competenza della matematica e per lo scambio di informazioni generali.

Tali abilità potranno essere conseguite alla fine del percorso formativo, come risultato dei contenuti di base dell'offerta formativa. Alcuni corsi prevederanno la presentazione di argomenti di approfondimento attraverso seminari o relazioni scritte, richiedendo allo studente di maturare capacità espositive, sia scritte che orali. La preparazione acquisita in materie affini ed integrative darà

la possibilità di interagire con laureati in altri settori, ed eventualmente con esperti in campi non necessariamente accademici, potenziando la capacità di formalizzare matematicamente situazioni complesse di interesse applicativo. La verifica del raggiungimento degli obiettivi posti avverrà:
- mediante le varie prove, anche a carattere seminariale, svolte durante gli insegnamenti impartiti e alla loro conclusione;
- in occasione di attività di tutorato nelle quali gli studenti potranno essere coinvolti;
- durante l'esposizione e la discussione dei risultati conseguiti per la prova finale.

**Capacità di apprendimento.** I laureati magistrali in Matematica Pura ed Applicata:
- hanno una mentalità flessibile, e sono in grado di inserirsi prontamente negli ambienti di lavoro, adattandosi facilmente a nuove problematiche;
- sono in grado di acquisire rapidamente le competenze pedagogiche necessarie per gestire il processo insegnamento-apprendimento in base all'argomento trattato e alla situazione dei discenti;
- avendo acquisito autonomia e originalità del pensiero matematico si riescono ad inserire con successo in percorsi di avviamento alla ricerca;
- sanno consultare materiale bibliografico, banche dati e materiale presente in rete, con particolare riferimento al reperimento di fonti bibliografiche nella ricerca matematica, per l'aggiornamento continuo delle conoscenze.

La verifica dell'acquisizione di tali capacità avviene:
- attraverso la valutazione dell'apprendimento di argomenti proposti per lo studio autonomo, durante le prove di esame;
- in occasione di attività di tutorato nelle quali gli studenti potranno essere coinvolti;
- in occasione della prova finale.

## Ordinamento degli studi

Sul sito web del Corso di Laurea si trova il Regolamento che con i suoi articoli disciplina e specifica gli aspetti organizzativi del Corso di Laurea. Per conseguire la laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata lo studente deve aver acquisito almeno 120 crediti (CFU) nell'ambito delle varie attività formative compreso il lavoro di tesi. Le attività formative prevedono insegnamenti teorici e pratici. I crediti relativi alle attività formative caratterizzanti, affini o integrative sono acquisiti seguendo moduli didattici e superando i relativi esami, secondo il piano delle attività formative ed in base alla programmazione didattica definita dal Consiglio di Dipartimento. I percorsi formativi danno ampio spazio a esercitazioni e ad attività di tutorato e di laboratorio. I crediti relativi alle attività a scelta dello studente vengono normalmente acquisiti con insegnamenti scelti dallo studente, mediante la formulazione di un piano di studio, nell'ambito delle opzioni proposte dal Consiglio del Dipartimento di Matematica. Modalità diverse di acquisizione di tali crediti, proposte dallo studente, verranno valutate dal Consiglio di Dipartimento in riferimento agli obiettivi formativi del corso di laurea ed alla valenza culturale complessiva del piano di studio proposto. La ripartizione delle attività formative, con il numero di crediti assegnato ad ognuna, è contenuta nell'Ordinamento del Corso di Laurea, disponibile sul sito del corso di Laurea Magistrale in Matematica Pura ed Applicata.

## Schema del piano di studio

Attività formative caratterizzanti 44 CFU
Formazione affine ed integrativa 28 CFU
Formazione a scelta 16 CFU
Prova finale 27 CFU
Altre attività formative (ulteriori attività formative art. 10, comma 5, lettera d) 5 CFU

Attività formative caratterizzanti: 44 CFU
*(i corsi a scelta di questa sezione devono far parte della programmazione didattica del corso di studio)*
- CAM 1 (6 CFU)
- CAM 2 (6 CFU)
- Corsi a scelta nel gruppo di settori MAT01/MAT02/MAT03/MAT04/MAT05 per 16 CFU in totale
- Corsi a scelta nel gruppo di settori MAT06/MAT07/MAT08/MAT09 per 16 CFU in totale

Formazione affine ed integrativa: 28 CFU
*(i corsi a scelta di questa sezione devono far parte della programmazione didattica del corso di studio)*
- Laboratorio di Calcolo (4 CFU)
- Corsi a scelta per 24 CFU nei settori affini (dei quali 16 CFU al massimo di settori MAT)

Formazione a scelta: Corsi per 16 CFU a libera scelta

Attività formative per prova finale: 27 CFU

Lo studente dovrà inoltre scegliere almeno 4 settori MAT diversi ed almeno un corso in ciascuna delle seguenti coppie di settori: MAT02/MAT03, MAT05/MAT07, MAT06/MAT08.

## Programmazione didattica A.A. 2023/24

### 1° SEMESTRE

- **CAM 1 - Teoria della Misura (6 CFU) - *attività caratterizzante - obbligatoria***
- **Laboratorio di Calcolo (4 CFU) - *attività affine - obbligatoria - erogato in lingua inglese***
- Algebra Commutativa (8 CFU)
- *Analisi di Reti (9 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- CAN 1 - Modellizzazione Geometrica e Simulazione Numerica (8 CFU)
- *Chimica Generale (8 CFU) - *mutuato da Scienza dei Materiali*
- *Complementi di Fisica (8 CFU)
- Complementi di Probabilità (8 CFU)
- Elementi di Analisi Numerica (8 CFU)
- *Fisica Computazionale (8 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- *Fisica dei Fluidi Complessi e Turbolenza (8 CFU) - *mutuato da Fisica*
- Introduzione alle Varietà Differenziabili (8 CFU)
- Laboratorio di Didattica della Matematica (8 CFU)
- *Meccanica Statistica 2 (6 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- *Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari (8 CFU)
- Metodi e Modelli in Computer Graphics (8 CFU)
- *Natural Language Processing (6 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- Numerical Methods for Computer Graphics in Java (8 CFU)
- Superfici di Riemann (8 CFU)
- Teoria dei Giochi e Progetto di Reti (9 CFU) - *mutuato da Teoria dei Giochi e Business Analytics, LM Ingegneria Informatica*

**2° SEMESTRE**

- **CAM 2 - Introduzione all'Analisi Funzionale (6 CFU) -** ***attività caratterizzante - obbligatoria***
- Algebre di Operatori (8 CFU)
- Analisi Armonica (8 CFU)
- CAN 2 - Algebra Lineare Numerica con Applicazioni alle PDE e Big Data (8 CFU)
- Complementi di Topologia Algebrica e Analisi Dati (8 CFU)
- Controllo, Dinamica e Ottimizzazione (8 CFU)
- EAM 1 - Teoria Spettrale (8 CFU)
- EAM 2 - Spazi di Sobolev e Soluzioni Deboli (8 CFU)
- Elementi di Probabilità 1 (8 CFU)
- Equazioni Differenziali (8 CFU)
- Geometria Algebrica (8 CFU)
- Geometria Complessa (8 CFU)
- Geometria Differenziale (8 CFU)
- High Dimensional Probability and Statistics (8 CFU)
- *Introduzione ai processi aleatori (8 CFU)
- Lingua inglese (5 CFU)
- *Machine Learning (9 CFU) - *mutuato da LM Informatica*
- Meccanica Analitica e Celeste (FM3) (8 CFU) - *fruito, per 6 CFU, da Celestial Mechanics and Dynamical Systems, LM Fisica*
- Meccanica Superiore 1 (8 CFU)
- Metodi di Ottimizzazione per Big Data (9 CFU) - *mutuato da LM Ingegneria Informatica e Ingegneria Automazione*
- *Progettazione di Sistemi Informatici (8 CFU)
- *Relatività e Cosmologia (8 CFU) - *mutuato da LM Fisica*
- Sistemi Dinamici (8 CFU)
- Statistical Learning and High Dimensional Data (8 CFU)
- Storia della Scienza (8 CFU)
- Teoria delle Rappresentazioni 1 (8 CFU)
- *Web Mining and Retrieval (9 CFU) - *mutuato da LM Informatica*

(*) *se inserito nel piano di studio il corso deve far parte delle attività affini o a scelta dello studente.*

## Ripartizione dell'offerta formativa dei settori MAT

### SETTORE MAT/02: ALGEBRA

- Algebra Commutativa
- Teoria delle Rappresentazioni 1

### SETTORE MAT/03: GEOMETRIA

- Complementi di Topologia Algebrica e Analisi Dati
- Geometria Algebrica
- Geometria Complessa
- Geometria Differenziale
- Introduzione alle Varietà Differenziabili
- Superfici di Riemann

### SETTORE MAT/04: MATEMATICHE COMPLEMENTARI

- Laboratorio di Didattica della Matematica
- Storia della Scienza

**SETTORE MAT/05: ANALISI MATEMATICA**

- Algebre di Operatori
- Analisi Armonica
- CAM 1 - Teoria della Misura
- CAM 2 - Introduzione all'Analisi Funzionale
- Complementi di Analisi Funzionale
- Controllo, Dinamica ed Ottimizzazione
- EAM 1 - Teoria Spettrale
- EAM 2 - Spazi di Sobolev e Soluzioni Deboli
- Equazioni Differenziali

**SETTORE MAT/06: PROBABILITÀ**

- Complementi di Probabilità
- Elementi di Probabilità 1
- Statistical Learning and High Dimensional Data
- High Dimensional Probability and Statistics

**SETTORE MAT/07: FISICA MATEMATICA**

- Meccanica Analitica e Celeste
- Meccanica Superiore 2
- Metodi Computazionali per Sistemi Hamiltoniani

**SETTORE MAT/08: ANALISI NUMERICA**

- CAN 1 - Modellizzazione Geometrica e Simulazione Numerica
- CAN 2 - Algebra Lineare Numerica con Applicazioni alle PDE e ai Big Data
- Elementi di Analisi Numerica
- Metodi e Modelli in Computer Graphics
- Numerical Methods for Computer Graphics in Java

**SETTORE MAT/09: RICERCA OPERATIVA**

- Teoria dei Giochi e Progetto di Reti
- Metodi di Ottimizzazione per Big Data

Si veda anche la pagina della didattica erogata A.A. 2023/24.

## Calendario 2023/24

Gli insegnamenti del primo semestre si terranno dal 2 ottobre 2023 al 12 gennaio 2024. Quelli del secondo semestre dal 4 marzo 2024 al 7 giugno 2024. Il 14 settembre 2023 alle ore 10.00, in aula 2, si terrà un incontro con gli studenti nel quale i docenti illustreranno brevemente i programmi dei corsi opzionali.

## Esami

Gli insegnamenti del primo semestre prevedono due appelli nella sessione estiva anticipata (gennaio-febbraio), due appelli nella sessione estiva (giugno-luglio) e due in quella autunnale (settembre). I corsi del secondo semestre prevedono due appelli nella sessione estiva, due in quella autunnale e due in quella invernale. Il calendario degli esami è pubblicato nella sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

### Valutazione

Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi. La prova di esame sarà valutata secondo i seguenti criteri: Non idoneo: importanti carenze e/o inaccuratezza nella conoscenza e comprensione degli argomenti; limitate capacità di analisi e sintesi.
18-20: conoscenza e comprensione degli argomenti appena sufficiente con possibili imperfezioni; capacità di analisi sintesi e autonomia di giudizio sufficienti.
21-23: conoscenza e comprensione degli argomenti routinaria; capacità di analisi e sintesi corrette con argomentazione logica coerente.
24-26: discreta conoscenza e comprensione degli argomenti; buone capacità di analisi e sintesi con argomentazioni espresse in modo rigoroso.
27-29: conoscenza e comprensione degli argomenti completa; notevoli capacità di analisi, sintesi. buona autonomia di giudizio.
30-30: ottimo livello di conoscenza e comprensione degli argomenti. notevoli capacità di analisi e di sintesi e di autonomia di giudizio. Argomentazioni espresse in modo originale.

### Piani di studio

Di norma entro il mese di novembre del primo anno di corso, lo studente presenta al Consiglio di Dipartimento una proposta di piano di studio. Il Consiglio valuterà entro il mese di dicembre il piano di studio proposto. Qualora l'iscrizione alla laurea magistrale avvenga in un periodo diverso dell'anno, s'intende che il piano di studio va presentato entro un mese dall'iscrizione e che il Consiglio è tenuto a valutarlo entro il mese successivo. I piani di studio vengono preventivamente valutati dalla Commissione Pratiche Studenti che verifica la loro coerenza con gli obiettivi formativi. Il piano di studio non può comprendere insegnamenti i cui programmi siano stati già svolti in insegnamenti relativi al conseguimento dei 180 CFU della laurea triennale. A tal proposito si consulti la pagina dedicata alle modalità e alle regole per la presentazione del piano di studio.

### Prova finale

La prova finale per il conseguimento della laurea magistrale richiede la stesura di una tesi elaborata in modo originale dallo studente, comprendente la redazione di un documento scritto (eventualmente anche in lingua inglese) e una prova seminariale conclusiva. La scelta dell'argomento della tesi deve essere concordata con un docente scelto dallo studente, che svolge le funzioni di relatore. La tesi dovrà evidenziare nei suoi contenuti la maturità culturale del laureando in un'area disciplinare attinente alla sua formazione curriculare. La prova finale verrà valutata in base alla originalità dei risultati, alla padronanza dell'argomento, all'autonomia e alle capacità espositiva e di ricerca bibliografica mostrate dal candidato. A tal proposito si consulti la pagina dedicata alle modalità e alle regole della prova finale.

### Modalità e requisiti di ammissione

Per essere ammessi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata occorre essere in possesso della laurea o del diploma universitario di durata triennale, ovvero di un altro titolo di studio conseguito all'estero riconosciuto idoneo. Sono inoltre richiesti specifici requisiti curriculari, caratteristici delle lauree in discipline matematiche. La natura interdisciplinare della matematica rende possibile anche a studenti che abbiano conseguito la laurea in altri settori di accedere alla laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata, purché in possesso dei suddetti requisiti e di un'adeguata preparazione personale.

Per accedere al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata è necessario che i laureati siano in possesso dei requisiti curriculari elencati in almeno uno dei due seguenti punti:

- possesso di una laurea nella classe L-35 (DM 270/2004) provenienti da qualsiasi ateneo italiano (o di studenti in possesso di analogo titolo di studio estero);
- almeno 24 CFU conseguiti complessivamente nei settori da MAT/01 a MAT/09.

Tutti gli studenti che intendano immatricolarsi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata devono presentare la richiesta secondo le modalità previste dall'Ateneo. Le domande pervenute saranno esaminate dal Coordinatore del Corso di Studio, con l'ausilio dalla Commissione Pratiche Studenti.

La verifica della preparazione personale avviene tramite l'analisi del curriculum, dei programmi degli esami sostenuti e delle votazioni ottenute durante gli studi pregressi e può, eventualmente, richiedere un colloquio. Sono accolte senza ulteriore verifica le domande di tutti i candidati che abbiano conseguito la laurea nella classe L-35, con almeno 6 CFU nel settore MAT/02 e con una votazione pari o superiore a 80/110.

A seguito della valutazione, potrà essere richiesto di includere nel piano di studi uno o più corsi appositamente organizzati in base al curriculum personale dello studente. In particolare, potrà essere richiesto l'inserimento, nel piano di studio della laurea magistrale, di uno o più insegnamenti della laurea triennale in matematica per un massimo di 24 CFU.

Si invitano gli interessati a richiedere un parere preventivo ed informale da parte della Commissione Pratiche Studenti scrivendo a `dida@mat.uniroma2.it` e allegando il proprio curriculum studiorum con elenco degli esami sostenuti, completo di crediti formativi, settori disciplinari e programmi relativi. Si veda anche la sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

### Trasferimenti

Gli studenti che intendono trasferirsi al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata possono richiedere un parere preventivo ed informale da parte della Commissione Pratiche Studenti scrivendo a `dida@mat.uniroma2.it` e allegando il proprio curriculum studiorum con elenco degli esami sostenuti, completo di crediti formativi, settori disciplinari e programmi relativi. Se lo studente ottiene un parere positivo dovrà seguire le modalità previste dall'Ateneo per i trasferimenti.
Gli studenti che si trasferiscono al Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata provenendo da altri corsi di laurea magistrale, possono chiedere il riconoscimento dei crediti relativi ad esami sostenuti nel corso di studi d'origine. Il Consiglio valuterà di volta in volta le singole richieste. Si veda anche la sezione apposita del sito web del Corso di Studio.

### Percorso di Eccellenza

Per il Corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata è attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" un Percorso di Eccellenza con lo scopo di valorizzare la formazione degli studenti meritevoli ed interessati ad attività di approfondimento su tematiche di interesse per la Matematica Pura ed Applicata. Il Percorso di Eccellenza, per un totale di 10 crediti formativi aggiuntivi, prevede la partecipazione ad attività formative aggiuntive a quelle del corso di studio, costituite da approfondimenti, attività seminariali, o dalla partecipazione a corsi esterni, secondo un programma che verrà personalizzato e concordato con ogni singolo studente. Lo studente che abbia ottenuto l'accesso al Percorso di Eccellenza viene affidato dalla Commissione Pratiche Studenti ad un docente tutor che ne segue il percorso e collabora alla organizzazione delle attività concordate con lo studente. Lo studente può consultare le modalità e i requisiti per l'accesso sulla pagina dedicata.

### Percorso Formazione 24 CFU

Per l'accesso ai concorsi per la funzione docente nella scuola secondaria è richiesto il conseguimento di 24 CFU in forma curricolare, aggiuntiva o extra curricolare nelle discipline antropo-psico-

pedagogiche e nelle metodologie e tecnologie didattiche. Lo studente interessato può maturare all'interno del proprio curriculum di laurea magistrale 24 CFU conformi riconoscibili per il Percorso Formazione 24 CFU istituito appositamente dall'Ateneo. A tal fine, oltre ad iscriversi al percorso al Percorso Formazione 24 CFU di Ateneo, dovrà inserire nel proprio piano di studio almeno 12 CFU nel settore MAT/04 e due insegnamenti di almeno 6 CFU ciascuno (nelle attività a libera scelta dello studente) in due distinti tra i seguenti ambiti disciplinari:
- Pedagogia, Pedagogia speciale e didattica dell'inclusione
- Psicologia
- Antropologia

Per l'elenco degli esami disponibili in tali ambiti nonché per ogni altra informazione si invita a consultare il sito di Ateneo.

### Vita pratica

La maggior parte delle informazioni è riportata nel sito web del Corso di Studi. Informazioni si possono anche ottenere per posta elettronica (`dida@mat.uniroma2.it`), oppure rivolgendosi alla segreteria didattica, Dott.ssa Madalina Andronic, tel. 06 72594685 (`andronic@mat.uniroma2.it`).

**Modalità di erogazione della didattica**

La didattica si svolge in **presenza e la frequenza è fortemente consigliata**. Come supporto alla didattica, per la larga maggioranza degli insegnamenti, i docenti sono disponibili ad utilizzare le classi virtuali Teams per scambio di materiale, contatti con gli studenti, ricevimento e altro. Inoltre, alcuni docenti sono anche disponibili, su motivata richiesta degli studenti e subordinatamente alla disponibilità di strumenti adeguati ed efficienti, ad effettuare streaming e/o registrazione delle lezioni. Si ribadisce tuttavia che **lo streaming e/o la registrazione delle lezioni possono essere intesi unicamente come supporto collaterale alla didattica svolta in aula e non possono in alcun modo essere considerati come sostituto sistematico per essa.**

## Programmi dei corsi

### ALGEBRA COMMUTATIVA

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/02 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: R. Schoof**

**Programma**: Si tratta di un corso di base di algebra commutativa; categorie, teoria di Galois alla Grothendieck, algebra omologica, un po' di schemi.

**Obiettivi di apprendimento**: Approfondire lo studio delle strutture algebriche introdotte nel corso di Algebra 1, quali gruppi, anelli e campi.

**Testi consigliati**:
M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969
H. Matsumura: *Commutative algebra*, Second edition, Benjamin, 1980
N. Bourbaki: *Elements of Mathematics: Commutative algebra*, Chapters 1-7, Springer-Verlag, 1989
A. J. de Jong: *The Stacks Project: Commutative algebra*, Columbia University, NY

**Modalità di esame**: Prova scritta.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: This is a basic course in commutative algebra; category theory, Grothendieck-style Galois theory, homological algebra and some scheme theory.

**Learning objectives**: Deepen the study of the algebraic structures introduced in the course of Algebra 1, such as groups, rings and fields.

**Text books**:
M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969
H. Matsumura: *Commutative algebra, Second edition*, Benjamin, 1980
N. Bourbaki: *Elements of Mathematics: Commutative algebra, Chapters 1-7*, Springer-Verlag, 1989
A. J. de Jong: *The Stacks Project: Commutative algebra*, Columbia University, NY

**Exam mode**: Written exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ALGEBRE DI OPERATORI

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: F. Fidaleo**

**Programma**: 1. Algebre di Banach e C*-algebre. 2. Spettro e Risolvente. 3. Funzionali positivi, rappresentazione di Gelfand-Naimark-Segal, teorema di Gelfand-Naimark. 4. Algebre abeliane, trasformata di Gelfand, teorema di Gelfand. 5. Algebre di von Neumann, teorema di von Neumann. W*-algebre, teorema di Sakai. 6. Classificatione delle proiezioni, W*-algebre di tipo I, II e III. 7. Elementi di teoria modulare, teorema di Tomita. 8. Rappresentazione standard. 9. Stati di Kubo-Martin-Schwinger, applicazioni alla meccanica statistica quantistica (cenni).

**Obiettivi di apprendimento**: Nonostante la vastità e la complessità delle potenziali tematiche, il corso in questione si prefigge di fornire importanti nozioni basilari sulla tematica in rapido sviluppo delle cosiddette "Algebre di Operatori", materia quest'ultima in rapido sviluppo e suscettibile di svariate applicazioni. Lo scopo primario del corso sarà quindi quello di presentare nella maniera più semplice possibile, senza comunque tralasciare del tutto i risvolti tecnici, le problematiche coinvolte in questa affascinante materia. La parte finale del corso sarà dedicata (tempo permettendo) a descrivere alcune stimolanti applicazioni a campi della matematica e della fisica quantistica. Relativamente all'insegnamento sarà dato rilievo ai seguenti campi: 1. CONOSCENZA E CAPACITÀ DI COMPRENSIONE, 2. CAPACITÀ DI APPLICARE CONOSCENZA E COMPRENSIONE, 3. AUTONOMIA DI GIUDIZIO, 4. ABILITÀ COMUNICATIVE, 5. CAPACITÀ DI APPRENDIMENTO.

**Testi consigliati**:
O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics, I, II*
M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979
S. Stratila, L. Zsido: *Lectures on von Neumann algebras, 2nd edition*, Springer
S. Stratila: *Modular theory in operator algebras*, abacus press
Materiale messo a disposizione del docente

**Modalità di esame**: Esame orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: 1. Banach algebras and C*-algebras. 2. Spectrum and Resolvent. 3. Positive functionals, Gelfand-Naimark-Segal representation, Gelfand-Naimark theorem. 4. Abelian algebras, Gelfand transformation, Gelfand theorem. 5. von Neumann algebras, von Neuman theorem. W*-algebras, Sakai theorem. 6. Classification of projections, type I, II and III W*-algebras. 7. Modular theory, Tomita theorem. 8. The standard representation. 9. Kubo-Martin-Schwinger states, applications to quantum statistical mechanics (outlook).

**Learning objectives**: Despite wideness and complexity of the topic, the objective of the course under consideration is to provide some relevant argument of the topic "Operator Algebras". The primary aim of the course is that to present the involved tools in the simplest possible way, but without missing the relevant technical details. Time permitting, the final part of the course shall provide some of stimulating applications to other branches of mathematics, and quantum physics. Teaching will be particularly focussed on the following fields: 1. KNOWLEDGE AND UNDERSTANDING, 2. APPLYING KNOWLEDGE AND UNDERSTANDING, 3. MAKING JUDGEMENTS, 4. COMMUNICATION SKILLS, 5. LEARNING SKILLS.

**Text books**:
O. Bratteli, D. W. Robinson: *Operator algebras and quantum statistical mechanics, I, II*

M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979
S. Stratila, L. Zsido: *Lectures on von Neumann algebras, 2nd edition*, Springer
S. Stratila: *Modular theory in operator algebras*, abacus press
Slides provided by the teacher

**Exam mode**: Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ANALISI ARMONICA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Sorrentino**

**Programma**: Introduzione all'analisi armonica classica: serie di Fourier e loro convergenza, Trasformata di Fourier, applicazioni, analisi di Fourier su gruppi, etc. Applicazioni ed argomenti più avanzati, sulla base degli interessi degli studenti.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso si propone di illustrare alcuni concetti fondamentali dell'analisi armonica classica e moderna, con alcune sue applicazioni. L'obiettivo è quello di rendere lo studente capace di elaborare tali concetti in maniera critica e di acquisire le conoscenze necessarie per risolvere con rigore i problemi proposti.

**Testi consigliati**:
Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004
M. Picardello: *Analisi armonica: aspetti classici e numerici*, dispense disponibili on-line
E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2007

**Modalità di esame**: L'esame consiste in un prova orale in cui il/la candidato/a dovrà dimostrare di saper esporre con competenza e rigore le nozioni apprese ed, eventualmente, di essere in grado di elaborarle in maniera originale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Introduction to classical harmonic analysis: Fourier series and convergence, Fourier transform, applications, Fourier Analysis on groups, etc. Applications and more advanced topics, based on students' interests.

**Learning objectives**: In this course we intend to illustrate some basic concepts in classical and modern harmonic analysis, as well as some applications. The goal is to allow students to critically elaborate on such concepts, and to be able to solve, in a rigorous way, the problems proposed in the course.

**Text books**:
Y. Katznelson: *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004
M. Picardello: *Analisi armonica: aspetti classici e numerici*, notes available on-line
E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis*, Princeton University Press, 2007

**Exam mode**: The exam consists in an oral interview. The candidate should be able to present the learned notions with competence and rigour, and, if necessary, to elaborate on them in an original way.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ANALISI DI RETI

**1° semestre**

*9 CFU – settore INF/01 – 72 ore di lezione in aula*

**Docente: M. Di Ianni (codocente: L. Gualà)**

**Programma**: 1. Modelli generativi di grafi aleatori e loro rilevanza nella rappresentazione di reti: modello di Erdos-Renyi, modello basato sul fenomeno rich-get-richer (popolarità come effetto rete), grafi geometrici aleatori, modelli per lo Small-world e ricerca decentralizzata (modelli e analisi). 2. Teoria dei grafi e delle reti sociali: chiusura triadica, collegamenti forti e deboli, comunità, partizionamenti in comunità, indici di centralità e metodo di Girvan-Newman. 3. Dinamiche nelle reti: modelli di diffusione, cascate e cluster, capacità di cascata, herding e cascate informative 4. Comportamento aggregato e sistemi di voto. 5. Reti di Informazione: il World Wide Web, Link analysis e ricerca nel Web, il problema del Ranking, Hubs e Authorities, il PageRank.

**Obiettivi di apprendimento**: Acquisizione di competenze relative ad analisi e soluzione di problemi connessi alla progettazione e alla gestione di reti complesse.

**Testi consigliati**:

D. Easley, J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010

Dispense a cura del docente disponibili sul sito del corso.

**Modalità di esame**: Esame orale.

**Program**: 1. Random graphs generative models and their relevance in representing networks: Erdos-Renyi model, Rich-get-richer phenomenon based model, geometric random graphs, modelling the Small-world phenomenon. 2. Graph Theory and Social Networks: TriadicClosure, Strong and Weak Ties, Communities, graph partitioning, centrality indeces, betweenness measures Girvan-Newman method. 3. Network Dynamics. Ddiffusion, cascades, clusters, cascade capacity, herding and information Cascades. 4. Aggregate behavior and voting systems. 5. Information networks: the World Wide Web, Link analysis and Web search, the Ranking problem, Hubs and Authorities, PageRank

**Learning objectives**: Acquiring competence related to analysis and solution of problems about design and management of complex networks.

**Text books**:

D. Easley, J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010

Lecture notes by the teacher available on the web page of the course.

**Exam mode**: Oral exam.

---

## CAM 1 - TEORIA DELLA MISURA

**1° semestre**

*6 CFU – settore MAT/05 – 60 ore di lezione in aula*

**Docente: F. Radulescu**

**Programma**: 1. Cardinalità. Concetti generali sulla cardinalitaà. Teorema di Cantor-Bernstein. Cardinalità del continuo. Esempi. 2. Teoria generale della misura. Algebre e $\sigma$-algebre. Funzioni additive e $\sigma$-additive di insieme. Misure, misure finite e $\sigma$-finite, misure complete. Spazi misurabili e spazi di misura. Limite superiore e limite inferiore di insiemi, e relazione con la misura. Classi monotone e teorema di estensione di Halmos. Misure esterne, estensione a una $\sigma$- algebra di funzioni $\sigma$-additive su un'algebra, teorema di Carathéodory. Misure di Borel e di Radon. Misura di Lebesgue in $R$ e in $RN$ . Insiemi boreliani e insiemi Lebesguemisurabili. Invarianza per traslazione e per rotazione. Cubi diadici e aperti visti come unione di cubi diadici. Insieme di Cantor (a livello di esercizi). Proprietà di regolarità delle misure di Radon. 3. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili e funzioni di Borel. Caratterizzazioni delle funzioni misurabili a valori reali o a valori reali estesi. Relazione tra misurabilità e continuità. Lo spazio delle funzioni misurabili è chiuso rispetto a somma, prodotto, massimo, minimo, sup e inf numerabili, massimo e minimo limite. Funzioni semplici. Ogni funzione misurabile nonnegativa è limite crescente di funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura, e relazioni tra di loro. Teorema di Lusin. 4. Integrazione. Integrale di funzioni semplici nonnegative. Integrale di funzioni misurabili nonnegative. Integrali di funzioni misurabili. Funzioni integrabili e sommabili. Le funzioni sommabili sono finite quasi ovunque. Principali proprietà dell'integrale: linearità, integrale del modulo e modulo dell'integrale, crescenza dell'integrale rispetto alla funzione integranda, integrali di funzioni coincidenti quasi ovunque, una funzione misurabile non-negativa ha integrale 0 se e solo se è nulla quasi ovunque. Assoluta continuità dell'integrale. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Teorema di Beppo Levi, Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominata, e conseguenze. Continuità e derivata della funzione integrale, dipendente da un parametro. Esempi. 5. Spazi $L^p$. Spazi $L^p$ per $1 \le p < \infty$ e per $p = \infty$. Loro completezza. Teorema di Riesz-Fischer. Disuguaglianze di Holder e Minkowski e conseguenze. Relazione tra norma $L^p$ e norma $L^\infty$ (senza dimostrazione). La convergenza in $L^p$ implica la convergenza in misura. Separabilità degli spazi $L^p$ e densità delle funzioni continue a supporto compatto in $L^p$ quando $p < \infty$. 6. Misure prodotto. $\sigma$-algebra prodotto. Misure prodotto. Misure prodotto e $\sigma$-algebre n prodotto in $R$ . Teoremi di Tonelli e di Fubini. 7. Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata. Le funzioni monotone sono misurabili. Le funzioni monotone hanno al massimo un insieme numerabile di 1 punti di discontinuità. Una funzione monotona è derivabile quasi ovunque (dimostrazione facoltativa). Variazione totale di funzioni a valori reali e funzioni a variazione limitata. Principali proprietà della variazione totale e delle funzioni a variazione limitata. Le funzioni a variazione limitata costituiscono uno spazio vettoriale e sono esattamente le funzioni differenza di due funzioni crescenti. Funzioni assolutamente continue. Le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata, ma non vale il viceversa. Le funzioni assolutamente continue costituiscono uno spazio vettoriale. Relazione tra funzioni assolutamente continue e funzioni integrali di funzioni $L$. Una funzione assolutamente continua con derivata nulla quasi ovunque è costante (senza dimostrazione). Teorema fondamentale e formula fondamentale del calcolo integrale per funzioni assolutamente continue e versione corrispondente per funzioni a variazione limitata.

**Obiettivi di apprendimento**: Illustrare alcuni concetti di base dell'analisi funzionale. Gli studenti dovranno acquisire le conoscenze necessarie per la comprensione di alcuni risultati generali dell'analisi funzionale e per l'applicazione di alcuni metodi a problemi particolari.

**Testi consigliati**:
P. Cannarsa, T. D'Aprile: *Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale*, Springer, 2008

**Modalità di esame**: Prova scritta e orale.

**Bibliografia di riferimento**:
P. R. Halmos: *Measure Theory*, Springer, 1974

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: 1. Cardinality. General concepts on cardinality. General properties. Cantor-Bernstein theorem. Cardinality of the continuum. Examples. 2. General measure theory. Algebras and $\sigma$-algebras. Additive and $\sigma$-additive functions of of sets. Measures finite and $\sigma$-finite measures, complete measures Measurable spaces and spaces of measure. Upper limit and lower limit of sets, and relationship with the measure. Classes monotone and Halmos extension theorem. External measures, extension to a $\sigma$-algebra of $\sigma$-additive functions on an algebra, Carathéodory theorem. Borel measure of Radon. Lebesgue measure in $R$ and in $RN$ . Borelian sets and measurable Lebesgue sets. Invariance under translation and under rotation. Dyadic and open cubes seen as union of dyadic cubes. Cantor set (at the level of exercises). Regularity property of Radon measurements 3. Measurable functions. Measurable functions and Borel functions. Characterizations of measurable real-valued or extended real-valued functions. Relationship between measurability and continuity. The space of measurable functions is closed under sum, product, maximum, minimum, sup and inf countable, maximum and minimum limit. Simple functions. Every nonnegative measurable function is an increasing limit of simple functions. Convergence almost everywhere, almost uniformly and to an extent, and relations between them. Theoremm of Lusin. 4. Integration. Integral of simple nonnegative functions. Integral of measurable functions nonnegative. Integrals of measurable functions. Integrable and summable functions. The summable functions ended up almost everywhere. Main properties of the integral: linearity, integral of the modulus and modulus of the integral, growth of the integral with respec to the integrand function, integrals of functions coinciding almost everywhere, a function non-negative measurable has integral 0 if and only if it is zero almost everywhere. Absolute continuity of the integral. Theorems of passage to the limit under the integral sign: Beppo Levi's theorem, Fatou's lemma, dominated convergence theorem, e consequences. Continuity and derivative of the integral function, dependent on a parameter. Examples. 5. $L^p$ spaces. $L^p$ spaces for $1 \le p < \infty$ and for $p = \infty$. Their completeness. Riesz-Fischer theorem. Holder and Minkowski inequalities and consequences. Relationship between norm $L^p$ and norm $L^\infty$ (without proof). Convergence in $L^p$ implies convergence in measure. Separability of spaces $L^p$ and density of continuous functions with compact support in $L^p$ when $p < \infty$. 6. Product measurements. $\sigma$-algebra product. Product measures. Product measures and $\sigma$-algebras n produced in $R$. Tonelli's and Fubini's theorems. 7. Absolutely continuous and limited variation functions. The monotonic functions are measurable. Monotonic functions have at most one countable set of 1 points of discontinuity. A monotonic function is differentiable almost everywhere (proof optional). Total variation of real-valued functions and functions with limited variation. Main properties of the total variation and of functions with limited variation. Functions with bounded variation constitute a vector space and are exactly the functions difference of two increasing functions. Absolutely continuous functions. Functions absolutely continuous are of limited variation, but the converse is not true. Functions absolutely continuous constitute a vector space. Relationship between functions continuously and integral functions of functions L. A function absolutely continuous with zero derivative almost everywhere it is constant (without proof). Theorem fundamental and fundamental formula of integral calculus for absolutely functions continue and corresponding version for functions with limited variation.

**Learning objectives**: Explain some basic concepts of functional analysis. Students will have to acquire the necessary knowledge for the understanding of some general results of functional analysis and for the application of some methods to particular problems.

**Text books**:
P. Cannarsa, T. D'Aprile: *Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale*, Springer, 2008

**Exam mode**: Written and oral exam.

**Reference bibliography**:
P. R. Halmos: *Measure Theory*, Springer, 1974

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CAM 2 - INTRODUZIONE ALL'ANALISI FUNZIONALE

**2° semestre**

*6 CFU – settore MAT/05 – 60 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Porretta**

**Programma**: SPAZI DI BANACH. Definizioni ed esempi. Operatori limitati su uno spazio normato. Spazio duale. Teorema di Hahn-Banach e conseguenze. SPAZI DI HILBERT. Basi ortonormali ed esempi. Sistema trigonometrico e serie di Fourier in $L^2(T)$. LEMMA DI BAIRE. Principio dell'uniforme limitatezza. Teorema dell'applicazione aperta, e teorema del grafico chiuso. Operatore aggiunto. Operatori limitati su uno spazio di Hilbert. TOPOLOGIE DEBOLI. Topologia debole e topologia star-debole. Teorema di Banach-Alaoglu. Spazi riflessivi. Esempi. TEORIA SPETTRALE E OPERATORI COMPATTI. Spettro di un operatore. Operatori compatti e teoria di Fredholm. Applicazioni ed esempi.

**Obiettivi di apprendimento**: Illustrare alcuni concetti di base dell'analisi funzionale. Gli studenti dovranno acquisire le conoscenze necessarie per la comprensione di alcuni risultati generali dell'analisi funzionale e per l'applicazione di alcuni metodi a problemi particolari.

**Testi consigliati**:
H. Brezis: *Analisi funzionale, teoria e applicazioni*, Liguori Edizioni, 1983
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

**Modalità di esame**: Risoluzione di esercizi, anche assegnati durante il corso. Esame scritto e orale. L'esame scritto è propedeutico all'esame orale, costituendone una premessa essenziale.

**Bibliografia di riferimento**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980
W. Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1991

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: BANACH SPACES Definitions and examples. Bounded Operators on normed spaces. Dual space, Hahn-Banach theorem and its main consequences. HILBERT SPACES. Orthonormal bases, examples, Trigonometric system and Fourier series in $L^2(T)$. HAHN-BANACH THEOREM AND ITS MAIN CONSEQUENCES. Baire's lemma. Uniform boundedness principle, Open mapping theorem and closed graph theorem. Adjoint of an operator. Bounded operators on Hilbert spaces. WEAK TOPOLOGIES: Weak and weak*-topologies, Banach-Alaoglu theorem. Reflexive spaces. Examples. SPECTRAL THEORY AND COMPACT OPERATORS: Spectrum of an operator, Compact operators and Fredholm alternative. Spectral theorem for compact self-adjoint operators. Applications and examples.

**Learning objectives**: Explain some basic concepts of functional analysis. Students will have to acquire the necessary knowledge for the understanding of some general results of functional analysis and for the application of some methods to particular problems.

**Text books**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

**Exam mode**: Solving exercises, also assigned during the course. Written and oral exam. The written exam is an essential premise to the oral exam.

**Reference bibliography**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol 1, Functional Analysis*, Academic Press, 1980
W. Rudin: *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1991

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CAN 1 - MODELLIZZAZIONE GEOMETRICA E SIMULAZIONE NUMERICA

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: C. Manni (codocente: H. Speleers)**

**Programma**: Il corso fornisce un'introduzione alla costruzione ed alle proprietà delle funzioni spline nonché al loro utilizzo nell'ambito della grafica computerizzata, della progettazione del trattamento numerico di equazioni differenziali alle derivate parziali. Polinomi di Bernstein e curve di Bézier. B-spline: costruzione, proprietà analitiche e geometriche. Curve e superfici B-spline. Curve e superfici NURBS. Proprietà di approssimazione di spazi spline. Trattamento di problemi ellittici multidimensionali: fondamenti del metodo degli elementi finiti e dell'analisi isogeometrica.

**Obiettivi di apprendimento**: L'insegnamento si propone di fornire le conoscenza di base riguardo delle funzioni spline e di alcune loro applicazioni salienti. Al termine dell'insegnamento, lo studente conoscerà le principali proprietà delle funzioni splines, della base B-spline e i principali aspetti delle loro applicazioni nell'ambito del free-form design, dell'approssimazione di funzioni e della soluzione di equazioni alle derivate parziali.

**Testi consigliati**:
C. Manni, H. Speleers: *Standard and Non-standard CAGD Tools for Isogeometric Analysis: A Tutorial*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2161, pp. 1-69, 2016
T. Lyche, C. Manni, H. Speleers (eds.): *Splines and PDEs: from Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2219, 2018

**Modalità di esame**: Nella prova orale lo studente dovrà dimostrare di saper illustrare, sia in modo sintetico che analitico, e con proprietà di linguaggio i fondamenti matematici dei metodi numerici presentati a lezione. Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi.

**Bibliografia di riferimento**:
C. de Boor: *A practical Guide to Splines*, Springer 2001
A. Quarteroni: *Numerical Models for Differential Problems*, Springer, 2009

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The course provides an introduction to the construction and properties of spline functions as well as their use in geometric modeling, approximation and numerical treatment of partial differential equations. Bernstein polynomials and Bézier curves. B-spline: construction, analytical and geometric properties. B-spline curves and surfaces. NURBS curves and surfaces. Approximation properties of spline spaces. Numerical treatment of multidimensional elliptic problems: fundamentals of the finite element method and isogeometric analysis.

**Learning objectives**: The course aims to provide basic knowledge about splines and some of their salient applications. At the end of the course, the student will know the main properties of splines functions, of the B-spline basis and the main aspects of their applications to free-form design, approximation of functions, and the numerical solution of partial differential equations.

**Text books**:
C. Manni, H. Speleers: *Standard and Non-standard CAGD Tools for Isogeometric Analysis: A Tutorial*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2161, pp. 1-69, 2016
T. Lyche, C. Manni, H. Speleers (eds.): *Splines and PDEs: from Approximation Theory to Numerical Linear Algebra*, Springer Lecture Notes in Mathematics 2219, 2018

**Exam mode**: In the oral exam the student has to prove to be able to illustrate with a proper language, both synthetically and analytically, the mathematical foundations of the numerical methods presented in class. The exam score is given by a mark expressed in thirtieths.

**Reference bibliography**:
C. de Boor: *A practical Guide to Splines*, Springer 2001
A. Quarteroni: *Numerical Models for Differential Problems*, Springer, 2009

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CAN 2 - ALGEBRA LINEARE NUMERICA CON APPLICAZIONI ALLE PDE E AI BIG DATA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: D. Bertaccini**

**Programma**: Nozioni di analisi dell'errore. Matrici sparse, calcolo parallelo e acceleratori hardware. Tecniche di proiezione. Algoritmi di proiezione in sottospazi di Krylov: CG and GMRES. BiCG, CGS, Bi-CGStab. Flexible GMRES (FGMRES). Precondizionatori a fattorizzazione incompleta. Precondizionatori per alcuni sistemi strutturati. Nozioni di funzioni di matrici. Calcolo efficiente di funzioni di matrici. Applicazione all'integrazione di modelli di PDE e big data. Grafi e matrici nella complex network analysis. Matrici di adiacenza, laplaciana, di incidenza. Misure di centralità e importanza dei dati. Cenni all'evoluzione e alla robustezza di una rete complessa con applicazioni alla social network analysis, reti biologiche, in finanza, nelle reti di comunicazione, internet e trasporti, negli algoritmi di consenso.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso si propone di sviluppare competenze e conoscenze avanzate in vari settori della di matematica, garantendo agli iscritti alla laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata ampia possibilità di approfondimento sia degli aspetti teorici di questa disciplina che delle sue applicazioni. Oltre ad avere un'approfondita conoscenza sia degli aspetti disciplinari sia di quelli metodologici della matematica, gli studenti del corso devono essere in grado di esprimere le proprie conoscenze in contesti professionali sia specifici sia interdisciplinari, devono essere capaci di orientarsi nella consultazione della letteratura e di redigere bibliografie in ambito matematico. Potranno, a seconda delle proprie inclinazioni e preferenze, proseguire negli studi partecipando a programmi di dottorato in discipline matematiche o inserirsi nel mondo del lavoro, sia utilizzando le specifiche competenze acquisite che valorizzando le proprie capacità di flessibilità mentale e di collaborazione con altri esperti, perfettamente in linea con gli obiettivi formativi del corso di laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata.

**Testi consigliati**:
D. Bertaccini, F. Durastante: *Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2018

**Modalità di esame**: Seminario su un argomento monografico a scelta dello studente tra quelli del corso.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Notions of error analysis. Sparse matrices, parallel computing and hardware accelerators. Projection techniques: CG and GMRES. BiCG, CGS, BiCGStab, Flexible GMRES (FGMRES). Incomplete factoring preconditioners. Preconditioners for some structured systems. Notions of functions of matrices. Application to the integration of PDE and big data models. Graphs and matrices in complex network analysis. Adjacency, Laplacian, and incidence matrices. Measurements of centrality and importance of data. Evolution and robustness of a complex network with applications to social network analysis, biological networks, finance, communication networks, internet and transportations, in consensus algorithms.

**Learning objectives**: The course aims to develop advanced skills and knowledge in various fields of Mathematics, guaranteeing students enrolled in the course of study "Laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata" wide opportunities to study both the theoretical and apllicative aspects of this discipline. In addition to having an in-depth knowledge of both the disciplinary and methodological aspects of mathematics, the students of the course must be able to express their knowledge in both specific and interdisciplinary professional contexts, they must be able to orient themselves in the consultation of literature and to draw up bibliographies in the mathematical field. Depending on their inclinations and preferences, they will be able to continue their studies by participating in doctoral programs in mathematical disciplines or in the working world, both by using the specific skills acquired and by enhancing their skills of mental flexibility and collaboration with other experts, perfectly in line with the educational objectives of the course of study "Laurea magistrale in Matematica Pura ed Applicata"

**Text books**:
D. Bertaccini, F. Durastante: *Iterative Methods and Preconditioning for Large and Sparse Linear Systems with Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2018

**Exam mode**: Seminar on a monographic topic chosen by the student on the topics of the course.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CHIMICA GENERALE

**1° semestre**

*8 CFU – settore CHIM/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: S. Piccirillo**

**Programma**: La struttura dell'atomo. Sistema periodico degli elementi. Legame chimico (ionico, covalente, metallico). Forze intermolecolari e legame a idrogeno. Stato della materia. Rapporti ponderali nelle reazioni chimiche. Numero di ossidazione. Bilanciamento delle reazioni chimiche. Termodinamica. Funzioni di stato. Equilibri tra fasi. Equilibri chimici omogenei ed eterogenei. La costante di equilibrio termodinamico. Equilibri di solubilità. Dissociazione elettrolitica. Soluzioni e proprietà colligative. Equilibri acido-base in soluzione acquosa: pH, idrolisi, soluzioni tampone, indicatori. Sistemi ossidoriduttivi: potenziali elettrodici, pile, equazione di Nernst, elettrolisi, legge di Faraday.

**Obiettivi di apprendimento**: Apprendimento dei principi basilari della Chimica, in termini di conoscenza delle proprietà generali degli elementi, dei legami che definiscono la struttura dei composti e delle leggi fondamentali che ne regolano le trasformazioni chimiche e fisiche. Esercitazioni pratiche volte alla comprensione dei concetti esposti durante le lezioni frontali.

**Testi consigliati**:
I. Bertini, C. Luchinat, F. Mani: *Chimica*, Ambrosiana, 1972
P. W. Atkins, L. Jones: *Principi di Chimica*, Zanichelli, 2018
M. Speranza: *Chimica Generale e Inorganica*, EdiErmes, 2013

**Modalità di esame**: Prova scritta e prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Atomic structure. Periodic table of the elements. Chemical bonding (ionic, covalent, metallic). Intermolecular forces and hydrogen bonding. State of matter. Weight relations in chemical reactions. Oxidation number. Balance of chemical reactions. Thermodynamics. State functions. Equilibrium between phases. Homogeneous and heterogeneous chemical equilibria. The thermodynamic equilibrium constant. Solubility equilibria. Electrolytic dissociation. Solutions and colligative properties. Acid-base equilibria in aqueous solution: pH, hydrolysis, buffer solutions, indicators. Redox systems: electrode potentials, batteries, Nernst equation, electrolysis, Faraday's law.

**Learning objectives**: Knowledge of the basic concepts and principles of Chemistry, as concerns the comprehension of the general properties of the elements, of the chemical bonding defining compounds structure and of the fundamental laws that govern chemical and physical transformation of matter. Practical exercises aimed to a deeper understanding of the concepts presented during the lectures.

**Text books**:
I. Bertini, C. Luchinat, F. Mani: *Chimica*, Ambrosiana, 1972
P. W. Atkins, L. Jones: *Principi di Chimica*, Zanichelli, 2018
M. Speranza: *Chimica Generale e Inorganica*, EdiErmes, 2013

**Exam mode**: Written exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI FISICA

**1° semestre**

*8 CFU – settore FIS/01 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: V. Merlo**

**Programma**: Fondamenti della meccanica statistica classica. Teoria degli ensemble, funzioni termodinamiche, applicazioni elementari. Postulati della meccanica quantistica. Equazione di Schrödinger, barriere e buche di potenziale, effetto tunnel. Oscillatore armonico lineare. Momento angolare. Atomo di idrogeno. Spin. Teoria delle perturbazioni. Metodo variazionale. Struttura fine. Particelle identiche. Gas quantistici di Fermi-Dirac e Bose-Einstein e loro proprietà: gas di Fermi degenere, corpo nero, condensazione di Bose.

**Obiettivi di apprendimento**: Acquisizione di conoscenze di base di Fisica Moderna.

**Testi consigliati**: I testi saranno comunicati dal docente all'inizio del corso.

**Modalità di esame**: L'esame consiste in una prova scritta di screening su argomenti svolti durante il corso, al superamento della quale lo studente espone una tesina orale concordata con il docente e avente come oggetto un nuovo argomento di interesse per lo studente.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Fundamentals of classical statistical mechanics. Ensemble theory, thermodynamics, elementary examples. The postulates of quantum mechanics. The Schroedinger equation, potential wells and barriers, tunnelling. The linear harmonic oscillator. Angular momentum. The hydrogen atom. Spin. Perturbation theory. The variational principle. Fine structure. Identical particles. Quantum gases, Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics. Degenerate Fermi gas, thermodynamics. Bose gas: black body, Bose condensation.

**Learning objectives**: To acquire a base knowledge of modern physics.

**Text books**: All the information will be given at the beginning of the course.

**Exam mode**: First comes a screening written test based on the topics covered during the term; then an oral exam takes place, where the student is required to discuss a new subject previously agreed upon.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: B. Torti (codocente: P. Baldi)**

**Programma**: Richiami di teoria della misura. Spazi di probabilità astratti. Indipendenza. Legge 0-1 di Kolmogorov. Lemma di Borel-Cantelli. Convergenza quasi certa e in probabilità. Legge dei grandi numeri. Funzioni caratteristiche. Convergenza in legge. Aspettazione condizionale. Martingale a tempo discreto.

**Obiettivi di apprendimento**: Introdurre gli argomenti di base del Calcolo delle probabilità tramite gli strumenti forniti dalla Teoria della Misura in modo da comprendere bene gli aspetti matematici della teoria.

**Testi consigliati**: Verranno distribuiti appunti.

**Modalità di esame**: L' esame finale è articolato in una prova scritta ed una prova orale. La prova scritta consiste nella risoluzione di esercizi e la prova orale verte sulle nozioni, i teoremi e le dimostrazioni visti a lezione.

**Bibliografia di riferimento**:
D. Williams: *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991
P. Billingsley: *Probability and measure*, John Wiley & Sons, 1976

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Hints on measure Theory. Probability spaces. Independence. Kolmogorov's 0-1 law. Borel-Cantelli Lemma. Almost sure convergence and convergence in probability. Law of large numbers. Characteristic functions. Convergence in law. Conditional expectation. Martingales in discrete time.

**Learning objectives**: To introduce to the basic elements of Probability Calculus through the tools provided by the Measure Theory in order to better understand the mathematical aspects of the theory.

**Text books**: Class notes will be available

**Exam mode**: The final exam is divided into a written test and an oral test. The written test consists in solving exercises and the oral test focuses on the notions, theorems and proofs taught.

**Reference bibliography**:
D. Williams: *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991
P. Billingsley: *Probability and measure*, John Wiley & Sons, 1976

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## COMPLEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA E ANALISI DI DATI

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: P. Salvatore**

**Programma**: Complessi simpliciali. Complessi di catene. Gruppi di omologia. Sequenze esatte. Omologia persistente. Applicazioni all'analisi dati.

**Obiettivi di apprendimento**: Apprendimento delle nozioni di base di topologia algebrica e dell'analisi topologica dei dati. Capacità di applicare le nozioni apprese per analizzare grandi dati.

**Testi consigliati**:
H. Edelsbrunner, J. Harer: *Computational topology, an introduction*, Duke University

**Modalità di esame**: Esame orale.

**Bibliografia di riferimento**:
Carlsson: *Topology and data*, Bulletin AMS 2009 Volume 46, Number 2, April 2009, pp. 255–308
P. Bubenik: *Pagina web su analisi topologica dei dati*
Dlotko: *Computational and applied topology*

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Simplicial complexes. Chain complexes. Homology groups. Exact sequences. Persistent homology. Applications of topological data analysis.

**Learning objectives**: Learning basic notions of algebraic topology and topological data analysis. Skill to apply these notions to the analysis of big data.

**Text books**:
H. Edelsbrunner, J. Harer: *Computational topology, an introduction*, Duke University

**Exam mode**: Oral exam.

**Reference bibliography**:
Carlsson: *Topology and data*, Bulletin AMS 2009 Volume 46, Number 2, April 2009, pp. 255–308
P. Bubenik: *Webpage on Topological Data Analysis*
Dlotko: *Computational and applied topology*

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## CONTROLLO, DINAMICA ED OTTIMIZZAZIONE

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: P. Cannarsa**

**Programma**: CONTROLLO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE. Osservabilità, controllabilità e stabilizzabilità di processi di controllo lineari a coefficienti costanti su spazi euclidei. EQUAZIONI DI EVOLUZIONE. 1. Semigruppi di operatori lineari e continui su spazi di Banach. Generatore infinitesimale. Teorema di Hille-Yosida. Comportamento asintotico. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine. 2. Operatori dissipativi e massimali dissipativi. Teoremi di Lumer-Phillips. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni iperboliche del secondo ordine. 3. Aggiunto di un operatore lineare nel caso Hilbertiano. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Teorema di Stone. Applicazione all'equazione di Schrödinger. 4. Il problema di Cauchy non omogeneo. Il caso degli operatori autoaggiunti e dissipativi. CONTROLLO DI EQUAZIONI PARABOLICHE DEL SECONDO ORDINE. 1. Il problema della controllabilità per equazioni di evoluzione. Nozioni di osservabilità. 2. Controllabilità a zero con il metodo dei momenti. 3. Stime di Carleman per equazioni ellittiche e paraboliche del secondo ordine. Applicazione all'osservabilità. 4. Il modello di Budyko-Sellers in climatologia. CONTROLLO DI EQUAZIONI IPERBOLICHE DEL SECONDO ORDINE. 1. Osservabilità e controllabilità dell'equazione delle corde vibranti con la formula di d'Alembert. 2. Studio delle equazioni di evoluzione del secondo ordine con il metodo di Fourier. 3. Osservabilità di modelli elastici con il metodo dei moltiplicatori. 4. Controllabilità di modelli elastici con il metodo HUM. 5. Stabilizzazione di modelli elastici. APPENDICE: RICHIAMI SUGLI SPAZI DI SOBOLEV. 1. Spazi di Sobolev su domini limitati nel caso hilbertiano. 2. Duali di spazi di Sobolev.

**Obiettivi di apprendimento**: Acquisire metodologie teoriche e competenze computazionali sul controllo di equazioni a derivate parziali lineari, di tipo evolutivo.

**Testi consigliati**:
P. Cannarsa, F. Gazzola: *Dynamic Optimization for Beginners, with prerequisites and applications*, EMS Publishing House, 2021.
P. Cannarsa: *Lecture notes on evolution equations*, dispense disponibili on-line

**Modalità di esame**: Prova orale in cui il candidato dimostra di conoscere definizioni, teoremi, le dimostrazioni fondamentali e di saper combinare le nozioni apprese in modo originale.

**Bibliografia di riferimento**:
J.-M. Coron: *Control and nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007
J. Zabczyk: *Mathematical control theory*, Birkhäuser, 1995

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: CONTROL OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Observability, controllability and stabilizability of linear control processes with constant coefficients on Euclidean spaces. EVOLUTION EQUATIONS. 1. Semigroups of bounded linear operators on Banach spaces. Infinitesimal generator. The Hille-Yosida theorem. Asymptotic behaviour. Solution of the Cauchy-Dirichlet problem for second order linear parabolic equations. 2. Dissipative and maximal dissipative operators. Lumer-Phillips theorems. Solution of the Operatori dissipativi e massimali dissipativi. Teoremi di Lumer-Phillips. Soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet problem for second order linear hyperbolic equations. 3. Hilbertian adjoint of a linear operator. Symmetric and self-adjoint operators. Stone's theorem. Application to Schrödinger's equation. 4. The nonhomogeneous Cauchy problem. CONTROL OF SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS. 1. Notions of controllability and observability for first order evolution equations. 2. Null controllability via the moment method. 3. Carleman estimates for second order elliptic and parabolic equations. Application to observability. 4. The Budyko-Sellers model in climatology. CONTROL OF SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS. 1. Observability and controllability of vibrating strings by d'Alembert's formula. 2. Second order evolution equations via Fourier's method. 3. Observability of vibrating bodies via the multiplier method. 4. Controllability of vibrating bodies via the Hilbert Uniqueness Method. 5. Stabilization of vibrating bodies. APPENDIX: SOBOLEV SPACES. 1. Sobolev spaces on a bounded domain in the Hilbertian case. 2. Duals of Sobolev spaces.

**Learning objectives**: To acquire theoretical methods and computational skills for control of partial differential equations of evolutionary type.

**Text books**:
P. Cannarsa, F. Gazzola: *Dynamic Optimization for Beginners, with prerequisites and applications*, EMS Publishing House, 2021
P. Cannarsa: *Lecture notes on evolution equations*, notes available on-line

**Exam mode**: In the oral exam the candidate has to show a good control of definitions, major results and some of their proofs.

**Reference bibliography**:
J.-M. Coron: *Control and nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007
J. Zabczyk: *Mathematical control theory*, Birkhäuser, 1995

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## EAM 1 - TEORIA SPETTRALE

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: D. Guido**

**Programma**: Algebre di Banach. Ideali massimali. Calcolo funzionale analitico. Algebre di Banach commutative e trasformazione di Gelfand. $C*$-algebre. Elementi positivi, e funzionali positivi. $C*$-algebre commutative e teorema di Gelfand-Naimark. Calcolo funzionale continuo. Stati e rappresentazioni di una $C*$-algebra. Rappresentazione GNS. Algebre di von Neumann. Teoremi di densità di von Neumann e di Kaplanski. Algebre abeliane massimali. Calcolo funzionale Boreliano. Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti, limitati e illimitati.

**Obiettivi di apprendimento**: Apprendere alcune nozioni elementari delle algebre di operatori.

**Testi consigliati**:
R. Kadison, J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras 1*, Academic Press, 1983
J. B. Conway: *A course in functional analysis*, Springer, 1990
G. K. Pedersen: *Analysis now*, Springer, 1989
W. Arveson: *A short course on spectral theory*, Graduate Texts in Mathematics 209, Springer-Verlag, New York, 2002.
M. Reed. B. Simon: *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.*, Academic Press, New York-London, 1972.

**Modalità di esame**: Prova orale. Discussione dei principali risultati, e degli esercizi svolti durante il corso.

**Bibliografia di riferimento**:
M. Takesaki: *Theory of operator algebras 1*
G. J. Murphy: *C*-algebras and operator theory*

**Program**: Banach algebras. Maximal ideals. Holomorphic functional calculus. Commutative Banach algebras and Gelfand transform. $C*$-algebras. Positive elements and positive functionals. Commutative $C*$-algebras and Gelfand-Naimark theorem. Continuous functional calculus. States and representations of a $C*$-algebra. GNS representation. Von Neumann algebras. Von Neumann and Kaplanski density theorems. Maximal abelian von Neumann algebras. Borel functional calculus. Spectral theorem for self-adjoint operators, bounded and unbounded.

**Learning objectives**: To learn basic notions in the field of operator algebras.

**Text books**:
R. Kadison, J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras 1*, Academic Press, 1983
J. B. Conway: *A course in functional analysis*, Springer, 1990
G. K. Pedersen: *Analysis now*, Springer, 1989
W. Arveson: *A short course on spectral theory*, Graduate Texts in Mathematics 209, Springer-Verlag, New York, 2002.
M. Reed. B. Simon: *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.*, Academic Press, New York-London, 1972.

**Exam mode**: Oral exam. Each student will discuss the most important results presented during the lectures, and the exercises handed out along the lectures.

**Reference bibliography**:
M. Takesaki: *Theory of operator algebras 1*
G. J. Murphy: *C*-algebras and operator theory*

---

## EAM 2 - SPAZI DI SOBOLEV E SOLUZIONI DEBOLI

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: C. Sinestrari**

**Programma**: Teoremi di compattezza in spazi di funzioni. Derivate deboli e distribuzioni. Spazi di Sobolev e loro proprietà. Teoremi di immersione. Formulazione debole delle equazioni ellittiche e teoremi di esistenza in spazi di Sobolev. Applicazioni della teoria di Fredholm e della teoria spettrale degli operatori compatti. Regolarità delle soluzioni. Principio di massimo per equazioni ellittiche e paraboliche. Semigruppi di operatori ed esistenza di soluzioni deboli per equazioni di evoluzione.

**Obiettivi di apprendimento**: Insegnare i metodi di base della teoria moderna delle equazioni differenziali alle derivate parziali, applicando gli strumenti dell'analisi funzionale e la formulazione debole delle equazioni in spazi di Sobolev.

**Testi consigliati**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 2010

**Modalità di esame**: Nella prova orale verranno chieste le definizioni, i teoremi e gli esempi visti nel corso, e alcune delle principali dimostrazioni.

**Bibliografia di riferimento**:
L. C. Evans, R. Gariepy: *Measure theory and fine properies of functions*, CRC Press, 1991
D. Gilbarg, N. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2009

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Compactness theorems in function spaces. Weak derivatives and distributions. Sobolev spaces and their basic properties. Embedding theorems. Weak formulation of elliptic equations and existence theorems in Sobolev spaces. Applications of Fredholm theory and of the spectral decomposition of compact operators. Regularity of solutions. Maximum principle for elliptic and parabolic equations. Operator semigroups and existence of weak solutions of evolution equations.

**Learning objectives**: Teaching the basic methods of the modern theory of partial differential equations, by using the tools of functional analysis and the weak formulation of the equations in Sobolev spaces.

**Text books**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 2010

**Exam mode**: In the oral exam the candidate is required to show knowledge of the definitions, the theorems the examples and of the main proofs seen in the course.

**Reference bibliography**:
L. C. Evans, R. Gariepy: *Measure theory and fine properies of functions*, CRC Press, 1991
D. Gilbarg, N. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2009

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: C. Di Fiore**

**Programma**: Polinomi di Bernoulli, formula di Eulero-Maclaurin, metodi numerici per il calcolo degli autovalori e degli autovettori di matrici, metodo delle potenze, teoria di Perron-Frobenius, l'importanza dei nodi nei grafi orientati (page-rank), metodi di tipo differenze finite per la risoluzione di problemi differenziali e/o migliore approssimazione di una matrice in algebre di bassa complessità.

**Obiettivi di apprendimento**: Approfondire alcuni argomenti specifici della Matematica Numerica.

**Testi consigliati**: Appunti del docente e di ex-studenti.

**Modalità di esame**: Prova scritta e orale.

**Bibliografia di riferimento**:
D. Bertaccini, C. Di Fiore, P. Zellini: *Complessità e Iterazione - Percorsi, matrici e algoritmi veloci nel calcolo numerico*, Bollati Boringhieri, 2013
R. S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*, Springer, 2000 (per teoria di Perron-Frobenius)
P. Berkhin: *A Survey on PageRank Computing (per page-rank)*, Internet Mathematics Vol. 2, 2005
Per gli argomenti rimanenti: files sul sito del docente e un qualsiasi buon libro di Matematica Numerica

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Bernoulli polynomials, Eulero-Maclaurin formula, numerical methods for matrix eigenvalues and eigenvectors computation, power method, Perron-Frobenius theory, the authority of the nodes in oriented graphs (page-rank), difference methods for solving differential problems and/or best approximation of a matrix in low complexity algebras.

**Learning objectives**: Investigate some specific topics of Numerical Mathematics.

**Text books**: Notes of the teacher and of ex-students.

**Exam mode**: Written and oral exam.

**Reference bibliography**:
D. Bertaccini, C. Di Fiore, P. Zellini: *Complessità e Iterazione - Percorsi, matrici e algoritmi veloci nel calcolo numerico*, Bollati Boringhieri, 2013
R. S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*, Springer, 2000 (for Perron-Frobenius theory)
P. Berkhin: *A Survey on PageRank Computing (for page-rank)*, Internet Mathematics Vol. 2, 2005
For the remaining topics: files on teacher web-site and any good book of Numerical Mathematics

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## ELEMENTI DI PROBABILITÀ 1

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Calzolari**

**Programma**: Si tratta di un corso di calcolo stocastico. In estrema sintesi: moto Browniano; martingale a tempo continuo; integrali stocastici; formula di Itô; equazioni differenziali stocastiche e processi di Markov.

**Obiettivi di apprendimento**: Arrivare alla conoscenza, con il supporto di libri di testo avanzati, di alcuni argomenti di calcolo stocastico.

**Testi consigliati**:
P. Baldi: *Stochastic calculus*, Springer, 2017

**Modalità di esame**: Le conoscenze degli studenti saranno verificate attraverso una prova scritta strutturata in esercizi, che avranno come argomenti principali: 1) moto Browniano; 2) integrali stocastici; 3) processi di Markov; 4) equazioni differenziali stocastiche. La prova orale sarà sui teoremi e le dimostrazioni visti a lezione.

**Program**: This is a stochastic calculus course. In a nutshell: Brownian motion; continuous time martingale; stochastic integrals; Itô's formula; stochastic differential equations and Markov processes.

**Learning objectives**: To get to the knowledge, with the support of advanced textbooks, of some stochastic calculus topics.

**Text books**:
P. Baldi: *Stochastic calculus*, Springer, 2017

**Exam mode**: Learning achievements will be verified by means of a written exam based on questions/exercises, with the following main topics: 1) Brownian motion; 2) stochastic integrals; 3) Markov processes; 4) stochastic differential equations. The oral exam will be on the theorems and proofs seen in class.

---

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/05 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: D. Bartolucci**

**Programma**: Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali: equazioni di Poisson, del calore e delle onde. Cenni alla formulazione debole della soluzione di problemi ellittici, al Teorema di Lax-Milgram e ai problemi agli autovalori. Applicazioni: problemi di curvatura prescritta e meccanica statistica dei vortici in dimensione 2. Problemi ellittici semilineari, metodi variazionali (metodo diretto, Lemma di passo montano) e non variazionali (punto fisso, sopra-sotto soluzioni). Equazioni di campo medio. Curve di soluzioni minimali e non minimali. Diagramma di biforcazione e bending.

**Obiettivi di apprendimento**: Acquisire familiarità con alcuni metodi classici e moderni per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali. In particolare verranno considerate equazioni nonlineari di tipo ellittico. La comprensione di tali concetti, metodi e teorie, permetterà di affrontare anche contesti potenzialmente differenti da quelli visti a lezione.

**Testi consigliati**:
L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010
A. Ambrosetti, G. Prodi: *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993
D. Bartolucci: *Lecture notes of the course*,
M. Struwe: *Variational methods*, Springer, 1990

**Modalità di esame**: Prova orale.

**Bibliografia di riferimento**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Introduction to partial differential equations: Poisson, heat and wave equations. Outline of weak formulation of elliptic equations, Lax-Milgram Theorem and eigenvalue problems. Applications: prescribed curvature problem and statistical mechanics of vortices in dimension 2. Semilinear elliptic problems, variational (direct method, mountain pass Lemma) and non variational methods (fixed point, sub-super solutions). Mean field equations. Branches of minimal and non minimal solutions. Bifurcation diagram and bending.

**Learning objectives**: To learn some classical and modern methods of the analysis of partial differential equations. In particular we will discuss semilinear elliptic equations. The comprehension of such concepts, methods, and theories will enable students to solve problems even in different contexts from those analyzed during the course.

**Text books**:
L. C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010
A. Ambrosetti, G. Prodi: *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993
D. Bartolucci: *Lecture notes of the course*,
M. Struwe: *Variational methods*, Springer, 1990

**Exam mode**: Oral exam.

**Reference bibliography**:
H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010
D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## FISICA COMPUTAZIONALE

**1° semestre**

*8 CFU – settore FIS/01 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Pecchia**

**Programma**: Fondamentali di numerica, errori di troncamento e arrotondamento. Equazioni differenziali ordinarie (ODE) - Analisi di Stabilità. - Metodi di soluzione espliciti e impliciti - Runge-Kutta e Dormand-Prince ODE5(4) e confronto con ODE8(7) - Metodi Gear's. - Applicazioni: Attrattori strani e caos, pendolo caotico e biforcazioni, esponenti di Lyapunov e frattalità - Introduzione alla dinamica molecolare - sviluppo di un simulatore - Applicazioni: studio di un liquido di Lennard-Jones Soluzione di equazioni lineari metodi diretti ed iterativi (CG, GMRES). Equazioni alle derivate parziali (PDE). - Classificazione in equazioni Ellittiche, Paraboliche ed Iperboliche - Discretizzazioni e stabilità (FDM, FVM, FEM). - Soluzione numerica equazioni di Poisson e di Fourier. - Soluzione numerica di equazioni di Navier-Stokes (Finite Volume Method).

**Obiettivi di apprendimento**: Gli studenti acquisiscono la capacità di risolvere problemi fisici utilizzando il computer come strumento numerico. Durante il corso vengono affrontati esempi non banali di soluzioni numeriche di modelli fisici, tra cui la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie (ODE) e alle derivate parziali (PDE). In particolare vengono discussi i problemi posti dalla loro soluzione numerica originati dalle limitazioni dell'aritmetica finita dei calcolatori e come mitigare le instabilità numeriche associate. Risolutori ODE di diverso tipo vengono applicati all'analisi di attrattori strani e traiettorie caotiche. Vengono illustrati metodi per il calcolo dei punti critici e delle biforcazioni, numeri di Feigenbaum, il calcolo degli esponenti di Lyapunov e della dimensione frattale di diversi attrattori. Particolarmente rivolto agli studenti di Fisica Teorica e di Fisica Statistica, viene sviluppato un modello atomistico di dinamica molecolare classica, applicato allo studio di un gas di Lennard Jones. In particolare viene dimostrata il meccanismo di transizione di fase solido-liquido ed il calcolo del coefficiente di diffusione. Nell'ultima parte del corso vengono discusse le equazioni PDE fino al secondo ordine, ellittiche (e.g. equazione di Poisson), paraboliche (eq. del calore) ed iperboliche (advection-diffusion e Navier-Stokes). Di queste viene discussa la discretizzazione ed i metodi di stabilizzazione. Per poter risolvere tali equazioni vengono introdotti i solutori iterativi. Il corso si prefigge anche di insegnare i rudimenti di programmazione scientifica in ambiente Linux, l'utilizzo di librerie numeriche esistenti e prospettive nello sviluppo di computazione parallela. Alla fine del corso agli studenti viene assegnato un problema pratico da risolvere sviluppando un opportuno programma sul quale vengono valutati. Il corso di Fisica Computazionale risponde agli obiettivi formativi del corso di fisica, in particolare rafforza le conoscenze teoriche di base e la capacità di analisi critica di eventuali risultati errati a causa di errori tecnici di programmazione. Rafforza la capacità critica e di applicazione delle conoscenze acquisite, in particolare durante lo sviluppo del lavoro di tesina in preparazione dell'esame, permettendo anche di raffinare le abilità comunicative che vengono testate in sede d'esame grazie alla presentazione del lavoro svolto e dei risultati ottenuti. Gli argomenti trattati sono spesso proiettati al limite attuale della ricerca e dello sviluppo, dando la possibilità agli studenti di ricercare letteratura scientifica e di sviluppare una capacità critica e di apprendimento autonoma in vista di un eventuale dottorato.

**Testi consigliati**:
R. Landau, M. Paez, C. Bordeinau: *Computational Physics 2nd ed*, WILEY-VCH, 2007
R. Fizpatrik: *Computational Physics*, Univ. Texas Austin, 2015
K. W. Morton, D. F. Mayers: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2012
L. Barone, E. Morinari, G. Organtini, F. Ricci-Tresenghi: *Programmazione scientifica*, Pearson Education, 2006
M. Metcald, J. Reid, M. Cohen: *Modern Fortran Explained*, Oxford University Press, 2018

**Modalità di esame**: Per valutare il reale apprendimento viene assegnato un problema da risolvere mediante implementazione numerica che poi gli studenti discutono all'esame sotto forma di una tesina. Spesso il problema viene discusso individualmente con ciascun studente per assecondarne interessi e orientamenti particolari. All'esame viene discusso il lavoro di tesina e vengono fatte domande sul programma del corso.

**Program**: Introduction to numerics, roundoff and truncation errors. Ordinary differential equations (ODE) - Stability - Explicit and implicit methods. - Runge-Kutta e Dormand-Prince ODE5(4) and ODE8(7) Gear's Methods. - Applications: Strange attractors and caos, caotic pendulum and bifurcation, Lyapunov exponents and fractality - Introduction to molecular dynamics - Development of an efficient simulator O(N). - Applications: study of a Lennard-Jones liquid (phase transitions, diffusivity) - Solutions of linear systems: direct and iterative methods (CG, GMRES). Partial differential equations (PDE). - Elliptic, Parabolic and Hyperbolic classifications - Discretizations and stability (FDM, FVM, FEM). - Numerical solutions of Poisson and Fourier Heat equations. - Numerical Solutions of Navier-Stokes equations (Finite Volume Method).

**Learning objectives**: Students acquire the ability to solve physical problems with the help of a computer as numerical instrument. During this lecture course non-trivial examples of numerical solutions to physical models are tackled, among which numerical solutions to Ordinary Differential Equations (ODE) and Partial differential equations (PDE). In particular problems related to discretizations and finite precision arithmetics are presented and solutions discussed. ODE solvers are developed and applied to analyze strange attractors and caotic trajectories. Methods to compute critical points, bifurcations, Feigenbaum numbers, Lyapunov exponents and fractal dimensions are presented and discussed. Particularly oriented to theorist in phisics and statistical physics, a classical molecular dynamics is developed and applied to study the Lennad-Jones gas, modelling solid-liquid phase transition and computing radial distributions functions and self-diffiusion coefficients. In the last part of the course, solutions to PDEs are tackled, either elliptic (e.g., Poisson equation), parabolic (e.g. heat equation) or hyperbolic (advection and Navier-Stokes). In all cases discretization and stabilization methods are presented. In order to enable solutions of such equations, iterative methods such as Conjugate-Gradients and Krylov subspace methods are presented and implemented. Additionally, the course aims at teaching the basics af scientific programming under Linux and using a high level programming language such as Modern Fortran. How to compile and link external numerical libraries and some rudiments of parallel programming (MPI/OpenMP). At the end the students are given a problem to be solved developing a code. This is used as part of the evaluation process in the final exam. Computational Physics adresses ad the general objective of the batchelor course in Physics. In particular it strengthen basic theoretical knowledge and capability of analysis of erroneus results due to implementation mistakes. It strengthen critical abilities of acquired knowledge, particularly during the development of the final homework, also giving the chance to refine communication skills since the work and results must be illustrated at the exam under the form of a presentation. The treated subjects are frequently projected to the research forefront and development, giving the possibility to make literature searches and developing critical abilities and learning skills, also in view of a possible postgraduate stage.

**Text books**:
R. Landau, M. Paez, C. Bordeinau: *Computational Physics 2nd ed*, WILEY-VCH, 2007
R. Fizpatrik: *Computational Physics*, Univ. Texas Austin, 2015
K. W. Morton, D. F. Mayers: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2012

L. Barone, E. Morinari, G. Organtini, F. Ricci-Tresenghi: *Programmazione scientifica*, Pearson Education, 2006

M. Metcald, J. Reid, M. Cohen: *Modern Fortran Explained*, Oxford University Press, 2018

**Exam mode**: Students are evaluated on a homework based on a physical problem that requires implementation of an algorithm or anything of computational nature. The work is presented in the final examination, together with additional questions on the subjects treated over the course.

---

### FISICA DEI FLUIDI COMPLESSI E TURBOLENZA

**1° semestre**

*8 CFU – settore FIS/01 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: M. Chinappi (codocente: L. Biferale)**

**Programma**: Equazioni fondamentali. Equazione di conservazione della massa e della quantità di moto. Simmetria tensore degli sforzi. Relazione costitutiva fluidi newtoniani. Equazione di Navier-Stokes per flussi incomprimibili. Condizioni al bordo. Condizione di Navier e lunghezza di scorrimento. Forma adimensionale equazioni di Navier-Stokes. Numero di Reynolds. Equazione di Stokes, linearità e simmetrie. Cenni al teorema di Purcell sul nuoto dei microorganismi. Flusso di Poiseuille. Moto Browniano. Diffusione di particelle in un fluido. Equazione di conservazione. Equazione di Langevin per il moto di un singolo colloide. Teorema di fluttuazione dissipazione. Metodi numerici per equazioni differenziali stocastiche. Elettroidrodinamica. Sistema completo di equazioni per trasporto specie cariche. Equazione di Poisson-Boltzmann. Lunghezza di Debye. Flusso elettroosmotico ideale in un canale piano. Flussi elettroosmotici in nanopori. Applicazioni per biosensori e blue energy. Tensione superficiale e dinamica delle interfacce. Definizione di tensione superficiale. Equazione di Laplace. Equazione di Young e angolo di contatto. Stati di Cassie e di Wenzel. Legge di Jurin. Lunghezza di capillarità. Instabilità Taylor-Rayley. Cenno ai modelli continui per flussi bifase (Continuum force model). Cenni su tecniche di simulazione atomistica. Turbolenza. Descrizione in spazio di Fourier. Produzione, trasferimento e dissipazione di energia cinetica turbolenta. Teoria di Kolmogorov per turbolenza omogenea e isotropa. Scala di Kolmogorov. Equazioni mediate alla Reynold e problema della chiusura.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso fornisce un'introduzione su argomenti avanzati di dinamica dei fluidi. Il filo conduttore del corso è la complessità e le metodologie per affrontarla. Gli esempi selezionati saranno scelti in un'ottica multiscala (diverse scale spaziali e temporali rilevanti per l'analisi del fenomeno) e multifisica (diversi effetti contribuiscono alla fenomenologia). In particolare, verranno trattati i seguenti argomenti: moti turbolenti per fluidi semplici, soluzioni colloidali di particelle micrometriche (moto Browniano), flussi bifase ed elettroidrodinamica. Nel corso vengono forniti gli strumenti concettuali e analitici per descrivere fluidi e flussi complessi.

**Testi consigliati**:

U. Frisch: *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995

S. B. Pope: *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000

M. San Miguel, R. Toral: *Stochastic effects in physical systems. In Instabilities and nonequilibrium structures VI*, Springer, 2000, Dordrecht (pp. 35-127)

**Modalità di esame**: Prova orale.

**Program**: Fundamental equations. Conservation of mass and momentum. Stress tensor symmetry. Newtonian fluids constitutive relation. Navier-Stokes equation for incompressible flows. Boundary conditions. Navier condition and slip length. Dimensionless form of the Navier-Stokes equations. Reynolds number. Stokes equation, linearity and symmetries. Notes on Purcell's theorem concerning the swimming of microorganisms. Poiseuille flow. Brownian Motion. Diffusion of particles in a fluid. Conservation equation. Langevin equation for the motion of a single colloid. Fluctuation-dissipation theorem. Numerical methods for stochastic differential equations. Electrohydrodynamics. Complete system of equations for transporting charged species. Poisson-Boltzmann equation. Debye length. Ideal electroosmotic flow in a plane channel. Electroosmotic flows in nanopores. Applications for biosensors and blue energy. Surface and dynamic tension of the interfaces. Definition of surface tension. Laplace equation. Young's equation and contact angle. Cassie and Wenzel states. Jurin's law. Capillary length. Taylor-Rayley instability. Overview on continuous models for two-phase flows (Continuum force model). Atomistic simulation techniques. Turbulence. Description in Fourier space. Production, transfer and dissipation of turbulent kinetic energy. Kolmogorov theory for homogeneous and isotropic turbulence. Kolmogorov scale. Reynold-averages equations.

**Learning objectives**: The course provides an introduction to advanced topics in fluid dynamics. The common thread of the course is the complexity and the methodologies to face it. The selected examples will be chosen from a multiscale perspective (different spatial and temporal scales relevant to the analysis of the phenomenon) and multi-physics (different effects contribute to the phenomenology). In particular, the following topics will be covered: turbulent motions for simple fluids, colloidal solutions of micrometric particles (Brownian motion), two-phase and electro-dynamic flows. The course provides conceptual and analytical tools to describe complex fluids and flows.

**Text books**:
U. Frisch: *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995
S. B. Pope: *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000
M. San Miguel, R. Toral: *Stochastic effects in physical systems. In Instabilities and nonequilibrium structures VI*, Springer, 2000, Dordrecht (pp. 35-127)

**Exam mode**: Oral exam.

---

## GEOMETRIA ALGEBRICA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: F. Flamini**

**Programma**: Si tratta di un'introduzione alla Geometria Algebrica, basato sullo studio delle varietà algebriche; precisamente il corso consiste di: 1. Premesse algebriche: anelli noetheriani, grado di trascendenza di un'estensione di campi, moduli e localizzazione. Prefasci e fasci su uno spazio topologico. 2. Spazio affine. Insiemi algebrici affini e topologia di Zariski. Ideali radicali. Hilbert Nullstellensatz. Irriducibilità. Varietà affini. Anello delle coordinate e campo delle funzioni razionali di una varietà affine 3. Anelli ed ideali omogenei. Spazio proiettivo. Insiemi algebrici proiettivi. Teorema degli zeri proiettivo. Varietà proiettive e quasi-proiettive. Anello delle coordinate omogenee, campo delle funzioni razionali. 4. Varietà algebriche. Fascio strutturale di una varietà algebrica. Morfismi di varietà algebriche. Morfismo di Veronese. Morfismi dominanti. Applicazioni razionali e birazionali. Esempi: sistemi lineari di ipersuperficie di uno spazio proiettivo, proiezioni, scoppiamenti. Scioglimento di singolarità di curve piane mediante scoppiamenti. 5. Prodotti di varietà algebriche. Varietà di Segre. Grafico di un morfismo. Completezza delle varietà proiettive. 6. Dimensione di una varietà algebrica.. Spazi tangenti e non-singolarità. Spazio tangente di Zariski. 7. Semicontinuità della dimensione delle fibre di un morfismo dominante.

**Obiettivi di apprendimento**: Apprendimento di alcuni aspetti di Geometria Algebrica.

**Testi consigliati**:
F. Flamini: *A first course in Algebraic Geometry and Algebraic varieties*, Essential Textbooks in Mathematics, World Scientific publishing, 2023

**Modalità di esame**: Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The course gives an introduction to Algebraic Geometry, related to Algebraic varieties; more precisely the course will consist of: 1. Algebraic preliminaries: Noetherian rings, field extensions, modules and localization. Presheaves and sheaves on a topological space. 2. Affine space. Affine algebraic sets and Zariski topology. Radical ideals. Hilbert Nullstellensatz. Irreducibility. Affine varieties. Coordinate ring and field of rational functions of an affine variety. 3. Homogeneous rings and ideals. Projective space. Projective algebraic sets. Projective Hilbert Nullstellensatz. Projective and quasi-projective varieties. Ring of homogeneous coordinates, field of rational functions. 4. Algebraic varieties. Structural sheaf of an algebraic variety. Morphisms of algebraic varieties. Veronese morphism. Dominant morphisms. Rational and birational maps. Examples: linear systems of hypersurfaces of a projective space, projections, blow-ups. Resolution of singularities of plane curves by blow-ups. 5. Products of algebraic varieties. Segre variety. Graph of a morphism. Completeness of projective varieties. 6. Dimension of an algebraic variety. Tangent spaces and non-singularity of affine and of projective varieties. Zariski tangent space of an algebraic variety. 7. Semicontinuity of the fibre-dimension of a dominant morphism.

**Learning objectives**: Learning some aspects of Algebraic Geometry.

**Text books**:
F. Flamini: *A first course in Algebraic Geometry and Algebraic varieties*, Essential Textbooks in Mathematics, World Scientific publishing, 2023

**Exam mode**: Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

### GEOMETRIA COMPLESSA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: S. Trapani**

**Programma**: Richiami su varietà differenziabili e geometria Riemanniana, richiami su coomologia di De Rham, forme armoniche, teorema di Hodge su varietà differenziabili, varietà complesse, varietà di Kahler. Richiami sul teorema di Dolbeau, coomologia delle (p,q) forme e decomposizione di Hodge per le varietà di Kahler. Fibrati in rette e teorema di immersione di Kodaira.

**Obiettivi di apprendimento**: Introdurre lo studente alla geometria delle varietà Kahleriane

**Testi consigliati**:
J. Demailly: *Complex analytic and differential geometry*, Université de Grenoble I, 1997
C. Voicin: *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Centre de Mathématiques de Jussieu, Paris

**Modalità di esame**: Prova orale.

**Bibliografia di riferimento**:
R. Wells: *Differential analysis on complex manifolds*, Springer-Verlag New York 2008

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Summary of differentialble manifolds, Riemannian geometry, and De Rhan cohomology. Harmonic forms and Hodge thoery on differentiable minifolds. Complex manifolds and Kahler manifolds. Summary on Dolbeau cohomology, Hodge theory for Kahler manifolds, line bundles and Kodaira embedding theorem.

**Learning objectives**: Introduce the student to the method of Kahler geometry

**Text books**:
J. Demailly: *Complex analytic and differential geometry*, Université de Grenoble I, 1997
C. Voicin: *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Centre de Mathématiques de Jussieu, Paris

**Exam mode**: Oral exam.

**Reference bibliography**:
R. Wells: *Differential analysis on complex manifolds*, Springer-Verlag New York 2008

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

### GEOMETRIA DIFFERENZIALE

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Iannuzzi**

**Programma**: Gruppi topologici. Elementi della teoria di Lie, mappa esponenziale, sottogruppi e sottoalgebre di Lie, la rappresentaziona aggiunta. Varietà Riemanniane. Connessioni affini, connessione di Levi Civita. Geodetiche e mappa esponenziale Riemanniana. Nozioni di curvature. Campi di Jacobi. Varietà Riemanniane complete, teoremi di Hopf e di Hadamard. Spazi a curvatura sezionale costante. Teorema di Bonnet-Myers: la topologia dei gruppi di Lie con metrica bi-invariante.

**Obiettivi di apprendimento**: Elementi di teoria dei gruppi di Lie e di geometria Riemanniana.

**Testi consigliati**:
M. P. Do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992
W. M. Boothby: *An introduction to differentiable manifold and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*, Springer, 2004
M. Abate, F. Tovena: *Geometria differenziale*, Springer-Verlag Italia 2011
Note di Mauro Nacinovich

**Modalità di esame**: Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Topological groups. Elements of Lie theory, exponential map, Lie subgroups and subalgebras, the adjoint representation. Riemannian manifolds. Affine and Levi Civita connections. Geodesic and Riemannian exponential map. Notions of curvature. Jacobi fields. Complete Riemannian manifolds. Hopf and Hadamard's theorems. Spaces of constant sectional curvature. Bonnet-Myers theorem and the topology of Lie groups admitting a bi-invariant metric.

**Learning objectives**: Theory of Lie goups and Riemannian geometry.

**Text books**:
M. P. Do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992
W. M. Boothby: *An introduction to differentiable manifold and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975
S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*, Springer, 2004
M. Abate, F. Tovena: *Geometria differenziale*, Springer-Verlag Italia 2011
Mauro Nacinovich's notes

**Exam mode**: Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## HIGH DIMENSIONAL PROBABILITY AND STATISTICS

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: M. Salvi**

**Programma**: Verranno trattati argomenti scelti di probabilità e statistica in alta dimensione. Verrà dato particolare risalto all'applicazione di tecniche avanzate a problemi applicati in diversi campi. Gli argomenti principali del corso includono: disuguglianze di concentrazione; vettori aleatori in alta dimensione; applicazioni ai grafi aleatori; matrici aleatorie; applicazioni a problemi in computer e data science; processi stocastici gaussiani e subgaussiani; chaining; applicazioni allo statistical learning; metric entropy; principal component analysis in alta dimensione.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso si prefigge di fornire agli studenti strumenti avanzati della moderna teoria delle probabilità e della statistica in alta dimensione e di illustrarne numerose applicazioni (tra cui machine learning, statistical learning e data science). L'obiettivo è quello di rendere gli studenti indipendenti nell'utilizzo di tali tecniche in modo che possano a loro volta adattarle a problemi ed a contesti differenti.

**Testi consigliati**:
R. Vershynin: *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018
M. J. Wainwright: *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2019

**Modalità di esame**: Le conoscenze apprese verranno verificate attraverso un colloquio orale ed alla presentazione di un progetto.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: We will treat a selection of topics in high dimensional probability and statistics. We will put a particular emphasis on the application of advanced techniques to problems arising from different fields. The main arguments of the course include: concentration inequalities; random vectors in high dimension; applications to random graphs; random matrices; applications in computer science and data science; gaussian and sub-gaussian stochastic processes; chaining; applications to statistical learning; metric entropy; principal component analysis in high dimension.

**Learning objectives**: In this course we will learn advanced tools from modern probability theory and statistics in high dimension and apply them to problems in a number of fields (such as machine learning, statistical learning and data science). The final goal is to make the student able to master those tools in order to flexibly apply them in different contexts.

**Text books**:
R. Vershynin: *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge University Press, 2018
M. J. Wainwright: *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2019

**Exam mode**: The evaluation will consist of an oral examination and the presentation of a project.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## INTRODUZIONE AI PROCESSI ALEATORI

**2° semestre**

*8 CFU – settore SECS-S/01 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: D. Marinucci**

**Programma**: Introduzione - stazionarietà debole e forte. Richiami di spazi di Hilbert. Processi ARMA - condizioni di esistenza e stazionarietà, proprietà funzioni di covarianza. Teorema di Herglotz-Bochner; densità e distribuzione spettrale. Filtri lineari; densità spettrale processi ARMA. Costruzione degli integrali stocastici; teorema di rappresentazione spettrale. Stima della densità spettrale: il periodogramma e le sue proprietà asintotiche. Whittle likelihood. Processi nonstazionari: convergenza debole in spazi di funzioni, processi a radici unitarie, tests. Campi aleatori isotropi sulla sfera: rappresentazione spettrale.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso fornisce una introduzione all'analisi spettrale dei processi stazionari; vengono affrontati anche argomenti più specialistici, quali i processi a radici unitarie ed i campi aleatori sulla sfera.

**Testi consigliati**:
P. J. Brockwell, R. A. Davis: *Time Series Models*, Springer, 1991

**Modalità di esame**: Prova scritta e orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Weak and strong stationarity. Background on Hilbert spaces. ARMA processes, covariance functions, Herglotz-Bochner Theorem, spectral density and distribution function. Linear filters, spectral density of ARMA processes. Stochastic integrals and the spectral representation theorem. Spectral density estimators: the periodogram and its asymptotic properties. Whittle likelihood. Nonstationary processes, weak convergence on function spaces, unit roots, tests. Random fields on the sphere: spectral representations.

**Learning objectives**: The aim of this coruse is to provide an introduction to the theory of stationary stochastic processes. Some more advanced material is also addressed, such as unit root processes and spherical random fields.

**Text books**:
P. J. Brockwell, R. A. Davis: *Time Series Models*, Springer, 1991

**Exam mode**: Written and oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## INTRODUZIONE ALLE VARIETÀ DIFFERENZIABILI

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: G. Pareschi**

**Programma**: Varietà topologiche e differenziabili. Funzioni e mappe lisce su varietà. Vettori tangenti, fibrato tangente e differenziale di mappe. Sommersioni, immersioni, embedding, sottovarietà. Teorema di Whitney (caso compatto). Gruppi di Lie, azioni e quozienti, spazi omogenei. Campi vettoriali, parentesi di Lie, algebre di Lie. Flussi di campi vettoriali, derivate di Lie, campi che commutano. Tensori, forme differenziali, differenziale esterno, orientazione di varietà, integrazione di forme differenziali, Teorema di Stokes. Teorema di Frobenius e applicazioni. Fanno parte integrante del programma anche gli esercizi assegnati settimanalmente.

**Obiettivi di apprendimento**: Alla fine del corso, lo studente dovrà aver acquisito le nozioni di base della geometria differenziale e dovrà essere in grado di applicarle alla risoluzione dei problemi assegnati durante il corso.

**Testi consigliati**:
J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013
W. Boothby: *An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003

**Modalità di esame**: Prova orale. Lo studente deve essere in grado di esporre in modo rigoroso i risultati discussi durante il corso. Deve anche saperli applicare agli esempi e ai problemi assegnati settimanalmente.

**Bibliografia di riferimento**:
F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, 1969
W. Boothby: *An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Topological and smooth manifolds. Functions and maps on manifolds. Tangent vectors, tangent bundle and differential of maps. Submersion, immersions, embeddings, submanifolds. Whitney's theorem (compact case). Lie groups, actions and quotients, homogeneous spaces. Vector fields, Lie brackets, Lie algebras. Flow of a vector field, Lie derivatives, commuting vector fields. Tensors, differential forms, exterior differentiation, orientation of a manifold, integration of a differential form, Stokes Theorem. Frobenius theorem and applications. The program also includes the excercises assigned weekly.

**Learning objectives**: At the end of the course the student should have acquired the basic notions of differential geometry and be able to apply them to the solution of the problems assigned during the course.

**Text books**:
J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Springer, 2013
M. Abate, F. Tovena: *Geometria differenziale*, Springer-Verlag Italia, 2011

**Exam mode**: Oral exam. The student must be able to rigorously expose the results discussed during the course. The student should also be able to apply them to the examples and to the problems assigned weekly.

**Reference bibliography**:
F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag, 1969
W. Boothby: *An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## LABORATORIO DI CALCOLO

**1° semestre**

*4 CFU – settore INF/01 – 40 ore di lezione in aula*

**Docente: H. Speleers**

**Programma**: Il corso fornisce un'introduzione al sistema Python per il calcolo scientifico. In particolare saranno presentati: - Python, un linguaggio di programmazione general purpose; interpretato e scritto dinamicamente quindi molto adatto ad una programmazione interattiva e ad una prototipazione veloce pur essendo sufficientemente potente per affrontare applicazioni di larga scala. - NumPy, il package fondamentale per il calcolo. - Matplotlib, un package per la grafica in 2D con estensioni per semplici grafici 3D. - SciPy, una collezione di algoritmi numerici. - SymPy, un package per il calcolo simbolico e la computer algebra.

**Obiettivi di apprendimento**: L'insegnamento si propone di fornire conoscenze di base per l'uso di software scientifico per lo studio e la risoluzione di problemi di matematica avanzata.

**Testi consigliati**:
G. Varoquaux, E. Gouillart, O. Vahtras, et al.: *Scipy Lecture Notes*, disponibile on-line
Note disponibili sul sito web del docente

**Modalità di esame**: Nella prova orale lo studente deve discutere il progetto realizzato. Il punteggio della prova d'esame è attribuito mediante un voto espresso in trentesimi.

**L'insegnamento sarà erogato in lingua inglese.**

**Program**: The course provides an introduction to the Python ecosystem for scientific computing. In particular, the following packages are addressed: - Python, a general purpose programming language; it is interpreted and dynamically typed and is very suited for interactive work and quick prototyping, while being powerful enough to write large applications in. - NumPy, the fundamental package for numerical computation. - Matplotlib, a mature package for 2D plotting as well as basic 3D plotting. - SciPy, a collection of numerical algorithms. - SymPy, a package for symbolic mathematics and computer algebra.

**Learning objectives**: The course aims at the ability to use scientific software for the analysis and solution of advanced mathematical problems.

**Text books**:
G. Varoquaux, E. Gouillart, O. Vahtras, et al.: *Scipy Lecture Notes*, notes available on-line
Material available on the website of the course

**Exam mode**: A project has to be made. In the oral exam the student has to discuss the project. The exam score is given by a mark expressed in thirtieths.

**Lectures will be given in English.**

---

## LABORATORIO DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/04 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: F. Tovena**

**Programma**: Vengono analizzati i principali testi in letteratura che discutono il ruolo della didattica laboratoriale, della relativa progettazione e valutazione, con speciale attenzione alle indicazioni nazionali per la matematica relative alla scuola secondaria di primo e secondo grado e alle informazioni fornite dai recenti studi in neuroscienze. A partire dallo studio di testi di matematica si propongono attività laboratoriali in cui si valorizza il legame tra aritmetica e geometria e si pone l'attenzione sugli aspetti didattici e multidisciplinari. Si trattano, tra l'altro: la nozione di numero, il concetto di commensurabilità e gli insiemi numerici; l'estensione; applicazioni fisico-matematiche. Gli studenti interessati possono svolgere 3CFU di tirocinio scolastico all'interno dell'insegnamento.

**Obiettivi di apprendimento**: Delineazione degli aspetti significativi del ruolo del laboratorio all'interno del processo di insegnamento/apprendimento della matematica nella scuola secondaria. Sperimentazione di esempi e discussione sui criteri della loro progettazione. Valorizzazione del legame tra algebra e geometria, della storia della matematica e dei legami interdisciplinari.

**Testi consigliati**:
L. Russo, G. Pirro, E. Salciccia: *Euclide, il I libro degli Elementi*, Carocci Editore, 2017
M. Montessori: *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori, 2012
Dispense messe a disposizione dai docenti

**Modalità di esame**: Nella prova orale, lo studente discute gli argomenti svolti nel corso delle lezioni, presenta e motiva una propria proposta didattica su argomenti correlati a quelli discussi nel corso delle lezioni, illustrandone le motivazioni didattiche e corredandola con i relativi materiali. Nell'esposizione, sono verificate il livello di padronanza delle nozioni introdotte nel corso dell'insegnamento, l'autonomia e la consapevolezza nell'individuazione delle modalità didattiche in funzione dei destinatari e dei nodi cognitivi nell'argomento trattato, la completezza e la chiarezza espositiva, la capacità di sintesi e di analisi critica, la coerenza e l'efficacia delle argomentazioni prodotte, la rilevanza degli argomenti trattati e la puntualità nell'individuazione degli obiettivi didattici e della loro valutazione.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The main texts in the literature discussing the role of laboratory teaching, its design and evaluation are analysed, with special attention paid to the national indications for mathematics for primary and secondary schools and the information provided by recent studies in neuroscience. Starting from the study of mathematics texts, laboratory activities are proposed in which the link between arithmetic and geometry is emphasised and the didactic and multidisciplinary aspects are highlighted. The following are dealt with, among others: the notion of number, the concept of commensurability and number sets; extension; physical-mathematical applications. Interested students can carry out 3CFU of school internship within the teaching.

**Learning objectives**: Outlining the significant aspects of the role of the laboratory within the teaching/learning process of mathematics in the secondary school. Experimentation with examples and discussion of the criteria for their design. Enhancement of the link between algebra and geometry, the history of mathematics and interdisciplinary links.

**Text books**:
L. Russo, G. Pirro, E. Salciccia: *Euclide, il I libro degli Elementi*, Carocci Editore, 2017
M. Montessori: *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori, 2012
Lecture notes made available by the teachers

**Exam mode**: In the oral test, the student discusses the topics developed in the course of the lectures, presents and justifies his/her own teaching proposal on topics related to those developed in the course of the lectures, illustrating the didactic motivations and accompanying it with the relevant materials. In the presentation, the level of mastery of the notions introduced during the course of the course, autonomy and awareness in identifying the didactic methods according to the recipients and the cognitive nodes in the subject matter, completeness and clarity of presentation, the ability to summarise and critically analyse, the coherence and effectiveness of the arguments produced, the relevance of the topics dealt with and the punctuality in identifying the teaching objectives and their evaluation are all verified.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## LINGUA INGLESE CORSO AVANZATO

**2° semestre**

*5 CFU – settore L-LIN/12 – 40 ore di lezione in aula*

**Docente: CLA (codocente: D. Giammarresi)**

**Programma**: Il programma si compone di due parti: una di inglese e una di introduzione al LaTeX.
Per la parte di Inglese (4 CFU): Forme comuni e strutture principali della lingua inglese. Vocabolario necessario per operare in inglese nel settore professionale.
Per la parte di LaTeX (1 CFU): Introduzione all'editoria scientifica e al LaTeX. Formule matematiche, stili di testo, ambienti per stili di scrittura, liste, tabelle, matrici, figure. Realizzazione di un documento di classe article. Preambolo, pacchetti da includere, definizioni di ambienti di tipo "theorem". Etichette e riferimenti. Scrivere una tesi di laurea. Uso della classe book e organizzazione dei file necessari. Realizzazione della bibliografia usando BibTeX e il database di MatSciNet.

**Obiettivi di apprendimento**: Obiettivo del corso è il raggiungimento di competenze e conoscenze linguistiche tali da permettere una padronanza della lingua di livello avanzato in ambito professionale.
Relativamente alla parte di LaTeX, l'obiettivo è quello di essere in grado di scrivere un articolo scientifico e la tesi di laurea secondo gli stardard dell'editoria scientifica.

**Testi consigliati**:
P. Dummett, J. Hughes, H. Stephenson: *Life Advanced*, Second Edition, Cengage Learning, 2018
L. Lamport: *LATEX. A Document Preparation System*, Addison-Wesley, 1994

**Modalità di esame**: Un esame scritto o computer based per la parte di Inglese. Per la parte di LaTeX, allo studente verrà richiesto di scrivere il codice LaTex per la realizzazione di un breve documento contenente formule matematiche e completo di bibiliografia.

**Program**: The course is composed by two different parts: advanced English and Introduction to LaTeX.
English part (4 CFU): Common forms and main structures of the English language. Vocabulary needed to work in English in the professional sectors.
LaTeX part (1 CFU): Introduction to scientific publishing and to LaTeX. Mathematical formulas, text styles, environments for writing styles, lists, tables, matrices, figures. Realization of an article class document. Preamble, packages to be included, definitions of "theorem" type environments. Labels and references.

How to write a thesis. Use of the book class and organization of the necessary files. Implementation of the bibliography using BibTeX and the MatSciNet database.

**Learning objectives**: The aim of the course is the achievement of linguistic skills and knowledge that allow for an advanced level of proficiency in the professional field.
With regard to the LaTeX part, the goal is to be able to write a scientific article and the degree thesis according to the stardards of scientific publishing.

**Text books**:
P. Dummett, J. Hughes, H. Stephenson: *Life Advanced*, Second Edition, Cengage Learning, 2018
L. Lamport: *LATEX. A Document Preparation System*, Addison-Wesley, 1994

**Exam mode**: A written or computer based exam for the English part. For the LaTeX part, the student will be asked to write the LaTeX code corresponding to a given short document with math formulas and bibliography.

---

## MACHINE LEARNING

**2° semestre**

*9 CFU – settore INF/01 – 72 ore di lezione in aula*

**Docente: G. Gambosi**

**Programma**: Pattern recognition e machine learning. Schema generale di un sistema di ML. Inferenza. Apprendimento supervisionato e non supervisionato. Regressione lineare. Funzioni base e regressione. Overfitting e funzioni di penalizzazione. Model selection. Introduzione alla teoria delle decisioni. Classificazione: approcci (funzioni di discriminazione, modelli probabilistici discriminativi, modelli probabilistici generativi). Riduzione di dimensionalità e feature selection. Il modello connessionistico. Reti neurali a più strati. Apprendimento di reti neurali. Optimal margin classifiers e support vector machines. Funzioni kernel. Metodi non parametrici per la stima di probabilità: applicazione alla classificazione. Apprendimento non supervisionato. Clustering. Algoritmo k-means. Modelli di mistura di distribuzioni. Modelli a variabili latenti e algoritmo EM. Modello probabilistico di PCA. Factor analysis. Ensemble methods. Modelli statistici del testo. LSA, PLSA, Topic models. Utilizzo di strumenti in ambiente Python per l'analisi e l'apprendimento da dataset reali.

**Obiettivi di apprendimento**: Esporre i concetti e i principali metodi di apprendimento automatico e di pattern recognition, insieme ai relativi fondamenti matematici. Introdurre all'utilizzo e allo sviluppo di codice software di machine learning per l'analisi su insiemi di dati di dimensioni limitate.

**Testi consigliati**:
M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

**Modalità di esame**: Prova orale.

**Program**: Pattern recognition and machine learning. General scheme of a ML process. Inference. Supervised and unsupervised learning. Linear regression. Base function and regression. Overfitting and penalty functions. Model selection. Introduction to decision theory. Classification: discrimination functions, discriminative probabilistic models, generative probabilistic models. Dimensionality reduction and feature selection. Neural networks. Learning in neural networks. Optimal margin classifiers and support vector machines. Kernel functions. Non parametric methods for probability estimation. Application to classification. Unsupervised learning. Clustering. K-means algorithm. Mixture models. Latent variable models and the EM algorithm. Probabilistic PCA. Factor analysis. Ensemble methods. Statistical models of text. LSA, PLSA, topic models. Use of tools in the framework of the Python language for analysis and learning on real datasets.

**Learning objectives**: Presenting the underlying concepts and the main methods for machine learning and pattern recognition, together with their mathematical foundations. Introducing to the use and the development of software programs for machine learning on datasets of limited size.

**Text books**:
M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

**Exam mode**: Oral exam.

---

## MECCANICA ANALITICA E CELESTE

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: G. Pucacco**

**Programma**: Richiami di Meccanica Hamiltoniana. Integrabilità, integrali primi, simmetrie. Non integrabilità, instabilità, caos. Metodi analitici e numerici per lo studio di sistemi dinamici Hamiltoniani. Problema dei due corpi. Problema dei tre corpi. Problema degli N corpi. Moto in potenziali assegnati.

**Obiettivi di apprendimento**: L'insegnamento è volto a fornire una introduzione alle tematiche avanzate della meccanica analitica e delle relative problematiche applicative in Meccanica Celeste e Dinamica Galattica.

**Bibliografia di riferimento**:
D. Boccaletti, G. Pucacco: *Theory of Orbits*, Springer, 1999
L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976)

**Modalità di esame**: L'esame si svolge con una tesina scritta su un argomento concordato e una discussione orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Review of Hamiltonian mechanics. Integrability, first integrals, simmetries. Non-integrability, instability, chaos. Analytical and numerical methods for the study of Hamiltonian dynamical systems. Two-body problem. Three-body problem. N-body problem. Motion in assigned potentials.

**Learning objectives**: The course aims at providing the students with an introduction to the problem of N self-gravitating bodies. Applications in Celestial Mechanics and Galactic Dynamics are shown.

**Reference bibliography**:
D. Boccaletti, G. Pucacco: *Theory of Orbits*, Springer, 1999
L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976)

**Exam mode**: Written report on a given argument and oral discussion.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## MECCANICA STATISTICA 2

**1° semestre**

*6 CFU – settore FIS/03 – 48 ore di lezione in aula*

**Docente: R. Marra**

**Programma**: Introduzione alle transizioni di fase. Modello di Ising. Argomento di Peierls. Teoria di campo medio per il modello di Ising. Trasformazione di dualità. Soluzione di Onsager. Gruppo di rinormalizzazione. Blocchi di spin e teorema del limite centrale. Leggi di scala ed esponenti critici. Elementi di teoria della percolazione. Altri modelli: Modello Gaussiano, Rotatore piano. Modelli di teorie di gauge. Metodi di simulazione numerica. Tempi di rilassamento. Efficienza di un algoritmo. Algoritmi Montecarlo: dinamica di Glauber e di Kawasaki. Elementi di dinamica dei fluidi. Teoria cinetica. Equazione di Boltzmann. Entropia e teorema H. Relazione con l'idrodinamica.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso è volto a fornire una preparazione avanzata nel campo della Meccanica Statistica di equilibrio e di non-equilibrio, con conoscenze di argomenti specialistici della recente ricerca nel settore. Gli obiettivi formativi prevedono la conoscenza avanzata della fisica delle transizioni di fase e dell'equazione di Boltzmann e dei metodi matematici per il loro studio. Capacità di risolvere problemi generali nel settore.

**Testi consigliati**: Dispense del corso, disponibili on-line sul sito del docente.

**Modalità di esame**: La valutazione è formulata mediante prova orale. In particolare, si richiede allo/a studente di dimostrare: a) di aver compreso idee e concetti e saperli comunicare utilizzando conoscenze di fisica di base; b) di saper formalizzare i concetti e saperli trattare attraverso l'uso di uno o più tra i metodi sviluppati nel corso e relative procedure; c) autonomia, consapevolezza di quanto appreso, efficacia ed efficienza nella comunicazione scientifica; d) di saper svolgere un argomento non trattato in modo autonomo.

**Program**: Phase transitions: introduction. Ising Model. Peierls result. Mean field theory. Rigourous results on thE Ising model. Renormalization group and spin blocks. Boltzmann equation. H theorem. Hydrodynamics.

**Learning objectives**: The course is aimed at providing advanced preparation in the field of Statistical Mechanics of equilibrium and non-equilibrium, with knowledge of specialized topics of recent research in the field. The educational objectives include advanced knowledge of the physics of phase transitions and the Boltzmann equation and mathematical methods for their study. Ability to solve general problems in the field.

**Text books**: Lecture notes are available on the teacher web page.

**Exam mode**: The evaluation is formulated by oral test. In particular, the student is required to demonstrate: a) to have understood ideas and concepts and to know how to communicate them using basic physics knowledge; b) to know how to formalize the concepts and know how to treat them through the use of one or more of the methods developed in the course and related procedures; c) autonomy, awareness of what has been learned, effectiveness and efficiency in scientific communication; d) to know how to carry out an untreated topic independently.

---

## MECCANICA SUPERIORE 1

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: R. L. Greenblatt**

**Programma**: Panoramica della termodinamica e ensemble statistici. Il modello di Ising: assenza di transizioni di fase in una dimensioni, presenza e struttura di transizioni di fase in 2 o più dimensioni. Misure di Gibbs a volume infinito e ordine a lungo raggio. Modelli di spin continui (Heisenberg e varianti): il teorema di Mermin e Wagner, dimostrazione di rottura di simmetria tramite positività per riflesso.

**Obiettivi di apprendimento**: Questo corso è pensato come introduzione allo studio matematico di meccanica statistica, una teoria fisica del comportamento globale di sistemi con numeri molto grandi di componenti interagenti identici, in particolare tramite stati di equilibrio. Esporrò la formulazione matematica dei concetti fondamentali della meccanica statistica classica (come misure di Gibbs, transizioni di fasi, ed il limite termodinamico) ed alcune delle tecniche più frequentemente applicate a tali concetti nel contesto di modelli sul reticolo comunemente usati fra quali il modello di Ising, gas reticolare, ed il modello classico di Heisenberg. Il corso dovrebbe aiutare gli studenti a leggere e studiare autonomamente la letteratura scientifica correlata, ad applicare le tecniche studiate a problemi in questo ed altri campi, e spiegare il contesto di dimostrazioni matematiche.

**Testi consigliati**:
S. Friedli, Y. Velenik: *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge University Press, 2017
Dispense disponibili on-line

**Modalità di esame**: Prova orale. Durante l'esame sarà discusso l'approfondimento teorico o l'applicazione numerica scelta dallo studente, e si discuteranno brevemente temi generali proposti dal docente.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Review of thermodynamics and statistical ensembles. The Ising model: absence of phase transition in 1 dimension, presence and structure of phase transitions in 2 or more dimensions. Infinite volume Gibbs measures and long-range order. Continuous spin models (the Heisenberg model and relatives): the Mermin-Wagner theorem, proof of symmetry breaking via reflection positivity.

**Learning objectives**: This course is intended as an introduction to the mathematical study of statistical mechanics, a physical theory of the global description of systems with very large numbers of interchangeable interacting component parts, especially the description of equilibrium states. I will discuss the mathematical formulation of the fundamental notions of classical statistical mechanics (such as Gibbs measures, phase transitions, and the thermodynamic limit) and some of the most common techniques used to apply them in the context of widely-used lattice models such as the Ising model, lattice gasses, and the classical Heisenberg model. The course is also intended to improve students' abilities to read and study the scientific literature in the area on their own, to apply the techniques to solve problems in this and other fields, and to explain the context of mathematical proofs.

**Text books**:
S. Friedli, Y. Velenik: *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction*, Cambridge University Press, 2017
Lecture notes available on-line

**Exam mode**: Oral exam. During the exam the theoretical subject or the numerical application chosen by the student will be discussed, followed by a brief discussion of subjects proposed by the teacher.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## METODI DI OTTIMIZZAZIONE PER BIG DATA

**2° semestre**

*9 CFU – settore MAT/09 – 72 ore di lezione in aula*

**Docente: A. Cristofari**

**Programma**: Introduzione all'ottimizzazione. Richiami di analisi matematica e geometria. Condizioni di ottimalià per problemi di ottimizzazione non vincolata. Algoritmi di ottimizzazione non vincolata. Introduzione al machine learning. Modelli e metodi di addestramento nell'apprendimento supervisionato. Cluster analysis. Condizioni di ottimalità per problemi di ottimizzazione vincolata. Algoritmi di ottimizzazione vincolata.

**Obiettivi di apprendimento**: L'obiettivo del corso è introdurre i concetti fondamentali e illustrare alcuni algoritmi di ottimizzazione non lineare, sia non vincolata, sia vincolata, con particolare attenzione all'applicazione nel campo del machine learning.

**Testi consigliati**:
D. P. Bertsekas: *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1999
L. Bottou, F.E. Curtis, J. Nocedal: *Optimization Methods for Large-Scale Machine Learning*, SIAM Review, 2018, 60(2), 223-311
L. Grippo, M. Sciandrone: *Metodi di ottimizzazione non vincolata*, Springer, 2011
G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani: *An Introduction to Statistical Learning*, Springer, 2021
Appunti tratti dalle lezioni. Copia materiale didattico usato per le lezioni

**Modalità di esame**: L'esame si compone di una prova scritta e di un progetto che possono essere svolti indipendentemente (quindi nell'ordine che preferisce il candidato) purchè entro un anno l'uno dall'altro. La prova scritta si compone di domande teoriche da svolgere in un tempo di approssimativamente 2 ore. Il progetto riguarda l'implementazione di un metodo di ottimizzazione per l'addestramento di un modello di machine learning su dataset della letteratura. Il progetto è valutato sia sulla base del modello e dell'algoritmo di ottimizzazione scelti, sia sulla base della correttezza e del rigore. Il voto finale è la media delle valutazioni delle due prove.

**Program**: Introduction to optimization. Review of concepts from calculus and geometry. Optimality conditions for unconstrained optimization problems. Unconstrained optimization algorithms. Introduction to machine learning. Models and training algorithms in supervised learning. Cluster analysis. Optimality conditions for constrained optimization problems. Constrained optimization algorithms.

**Learning objectives**: The aim of the course is to introduce fundamental concepts and describe some algorithms for nonlinear optimization, both in unconstrained and constrained setting, with specific attention to applications in the field of machine learning.

**Text books**:
D. P. Bertsekas: *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1999
L. Bottou, F. E. Curtis, J. Nocedal: *Optimization Methods for Large-Scale Machine Learning*, SIAM Review, 2018, 60(2), 223-311
L. Grippo, M. Sciandrone: *Metodi di ottimizzazione non vincolata*, Springer, 2011
G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani: *An Introduction to Statistical Learning*, Springer, 2021
Lectures notes. Slides used during the lectures.

**Exam mode**: The exam has a written test and a project, which can be carried out independently (that is, in the order preferred by the student) as long as they are within one year of each other. The written test has questions about theoretical aspects to be carried out in about 2 hours. The project requires the implementation of an optimization method to train a machine learning model on a dataset from the literature. The project is assessed on the basis of the choice of the model, optimization algorithm, correctness and rigour. The final grade is the average of the grades of the written test and the project.

## METODI E MODELLI DEI MERCATI FINANZIARI

**1° semestre**

*8 CFU – settore SECS/S-06 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: L. Caramellino**

**Programma**: Il corso si propone lo studio dei modelli continui in tempo e in spazio per la descrizione dei mercati finanziari, con particolare riferimento ai due problemi fondamentali in finanza: prezzo e copertura di opzioni. La prima parte del corso è dedicata a richiami ed approfondimenti di calcolo stocastico (processi di Markov, teorema di Girsanov, teoremi di rappresentazione delle martingale browniane, diffusioni e formule di rappresentazione alla Feymnan-Kac). Successivamente vengo introdotti i modelli continui (modelli di Itô, processi di diffusione) per la finanza, le strategie di gestione, l'arbitraggio e la completezza del mercato. Particolare enfasi è data al modello di Black e Scholes. Parte del corso è dedicata ai metodi numerici Monte Carlo in finanza. L'ultima parte del corso sarà scelta, sulla base degli interessi degli studenti, tra i seguenti argomenti: tassi di interesse, opzioni americane, calcolo di Malliavin e applicazioni in finanza.

**Obiettivi di apprendimento**: Comprensione del linguaggio proprio della finanza matematica; conoscenza dei modelli continui per la finanza, in particolare per la risoluzione dei problemi legati alle opzioni (calcolo del prezzo e della copertura); capacità di istituire collegamenti con materie collegate (analisi, geometria, linguaggi di programmazione etc.) e con problemi provenienti dal mondo reale; risoluzione numerica di problemi reali tramite costruzione di algoritmi, anche Monte Carlo.

**Testi consigliati**:
D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman & Hall, 2008
P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer, 2017
D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki: *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*, Journal of Risk Management in Financial Institutions, 2(4), 2008-2009
P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer-Verlag, 2004
D. Lamberton: *Optimal stopping and American options*, Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, 2009
Dispense del corso sui metodi Monte Carlo in Finanza
Dispense del corso sul calcolo di Malliavin e e le sue applicazioni alla Finanza

**Modalità di esame**: Prova orale, previa consegna e discussione di un progetto con la risoluzione dei problemi numerici proposti (si richiede l'uso di un linguaggio di programmazione, ad esempio C). L'esame orale prevede la verifica dei concetti teorici e delle dimostrazioni svolte in aula.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The course aims to study continuous models in time and space for the description of financial markets, with particular reference to the two fundamental problems in finance: pricing and hedging options. Firstly, special topics on stochastic calculus are recalled and developed (Markov processes, Girsanov's theorem, representation theorems of Brownian martingales, diffusion processes and Feymnan-Kac-style representation formulas). Continuous models in finance are then introduced (Itô models, diffusion processes) and trading strategies, arbitrage and market completeness are studied. A special emphasis is given to the Black and Scholes model. The final part of the course deals with Monte Carlo numerical methods in finance. The very last part of the course will be chosen, on the basis of the students' interests, among the following topics: interest rates, American options, Malliavin calculus and applications in finance.

**Learning objectives**: Understanding of the language of mathematical finance; knowledge of continuous models for finance, in particular for solving options related problems (price and hedging); ability to establish links with related subjects (analysis, geometry, programming languages, etc.) and with problems from the real world; numerical resolution of real problems through the construction of algorithms, including Monte Carlo ones.

**Text books**:
D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman & Hall, 2008
P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*, Springer, 2017
D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki: *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*,

Journal of Risk Management in Financial Institutions, 2(4), 2008-2009
P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer-Verlag, 2004
D. Lamberton: *Optimal stopping and American options*, Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, 2009
Lecture Notes on Monte Carlo methods in Finance
Lecture Notes on Malliavin calculus and applications to Finance

**Exam mode**: Oral exam. Candidates can take the exam only after having delivered and discussed the numerical exercises (to be solved by means of a programming language, for example C). The oral exams is based on proofs and understanding of the theoretical background.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## METODI E MODELLI IN COMPUTER GRAPHICS

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: C. Garoni**

**Programma**: Vengono studiati in dettaglio i seguenti argomenti: ray casting, modelli d'illuminazione diretta e globale, ray tracing (ricorsivo), radiosità. Vengono inoltre ripassati e integrati i seguenti argomenti: - metodi iterativi (stazionari e non stazionari) per sistemi lineari - superfici e integrali di superficie. Il programma del corso prevede anche l'apprendimento del software di calcolo simbolico Maple, necessario per risolvere esercizi e problemi inerenti il corso nonché per sostenere l'esame finale.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso copre gli algoritmi classici della computer graphics per il rendering 3D fotorealistico, con particolare riferimento agli aspetti matematici (soprattutto analitici, numerici e probabilistici). Vengono studiati in dettaglio i seguenti argomenti: ray casting, modelli d'illuminazione diretta e globale, ray tracing (ricorsivo), radiosità. Un ulteriore importante obiettivo formativo è l'apprendimento del software di calcolo simbolico Maple, necessario per risolvere esercizi e problemi inerenti al corso nonché per sostenere l'esame finale.

**Testi consigliati**:
C. Garoni: *Metodi e Modelli Matematici in Computer Graphics: Rendering 3D Fotorealistico*, libro di testo fornito durante il corso
M. Picardello: *Rendering tridimensionale: metodi numerici, analitici e probabilistici*, dispense disponibili on-line
P. Dutré, K. Bala, P. Bekaert: *Advanced Global Illumination*, Second edition, Taylor & Francis, 2006

**Modalità di esame**: L'esame avviene attraverso una prova scritta ed una orale. Allo scritto sarà verificato anche l'apprendimento di Maple.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The following topics are studied in detail: ray casting, direct and global illumination models, recursive ray tracing, radiosity. The following topics are recalled and integrated: - stationary and non-stationary iterative methods for linear systems - surfaces and surface integrals. The course program also includes the learning of the symbolic computation software Maple, which is necessary to solve exercises and problems of the course as well as to pass the final exam.

**Learning objectives**: Computer graphics algorithms for the photorealistic 3D rendering are covered, with emphasis on the mathematical aspects (especially, analytic, numerical and probabilistic aspects). The following topics are studied in detail: ray casting, direct and global illumination models, recursive ray tracing, radiosity. A further important objective of the course consists in learning the symbolic computation software Maple, which is necessary to solve exercises and problems of the courseas well as to pass the final exam.

**Text books**:
C. Garoni: *Metodi e Modelli Matematici in Computer Graphics: Rendering 3D Fotorealistico*, textbook provided during the course
M. Picardello: *Rendering tridimensionale: metodi numerici, analitici e probabilistici*, notes available online
P. Dutré, K. Bala, P. Bekaert: *Advanced Global Illumination*, Second edition, Taylor & Francis, 2006

**Exam mode**: The exam is based upon a written test and an oral test. During the written test, also the knowledge of Maple will be checked.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## NATURAL LANGUAGE PROCESSING

**1° semestre**

*6 CFU – settore INF-ING/05 – 48 ore di lezione in aula*

**Docente: F. Zanzotto**

**Programma**: Introduzione al NLP e la sfida delle macchine parlanti. Il Linguaggio: modelli e teorie linguistiche. Modelli Linguistici e Sistemi. Come determinare che un modello è corretto e un sistema è efficace: inter-annotation agreement e statistical significance. Automi a stati finiti e trasduttori per la morfologia (appunti per la lezione): software Xerox Finite State Transducers. Elaborazione sintattica con le grammatiche context-free. Parsing con le grammatiche context-free. Feature Structures e Unificazione. Tree Adjoining Grammars. Modular and Lexicalized Parsing. Probabilistic context-free grammar. Semantica. Rappresentazione semantica simbolica: Introduzione a WordNet e FrameNet. Lambda Calcolo per la semantica del linguaggio naturale. Rappresentazione semantica distribuzionale. Textual Entailment Recognition. Cenni di Rappresentazione Simbolica Distribuita per Reti Neurali.

**Obiettivi di apprendimento**: Il corso si propone di introdurre lo studente agli scopi, alle principali problematiche e ai principali modelli simbolici dell'elaborarazione del linguaggio naturale.

**Testi consigliati**:
D. Jurafsky, J. H. Martin: *Speech and Language PROCESSING: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition*, 2014
I. Dagan, D. Roth, M. Sammons, F. M. Zanzotto: *Recognizing Textual Entailment: Models and Applications, Synthesis Lectures on Human Language Technologies #23*, Morgan & Claypool Publishers, 2013

**Modalità di esame**: La valutazione dello studente prevede lo svolgimento di un task progettuale seguito da una prova orale nella quale verrà discusso il task progettuale presentato ed approfonditi gli argomenti illustrati durante il corso.

**Program**: Introduction to NLP and to the challenge of talking machines. The language: linguistic models and theories. Linguistic models and systems. How to determine that a model is correct and a system is effective: inter-annotation agreement and statistical significance. Morpholgy: Finite state automaton and transducers. Syntactic analysis with context-free grammars Parsing with context-free grammars. Feature Structures and Unification. Tree Adjoining Grammars. Modular and Lexicalized Parsing. Probabilistic context-free grammar. Semantics. Symbolic Semantic Representation: WordNet and FrameNet. Lambda Calculus for natural languagte semantics. Distributional semantics. Textual Entailment Recognition. Distributed Representations of Discrete Symbolic Representations for Neural Networks.

**Learning objectives**: The course introduces the common practices and the common models of natural language processing.

**Text books**:
D. Jurafsky, J. H. Martin: *Speech and Language PROCESSING: An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition*, 2014
I. Dagan, D. Roth, M. Sammons, F. M. Zanzotto: *Recognizing Textual Entailment: Models and Applications, Synthesis Lectures on Human Language Technologies #23*, Morgan & Claypool Publishers, 2013

**Exam mode**: Students are evaluated by assigning a project task to be developed and then discussed in an oral presentation, which also includes questions about the topics illustrated during the course.

---

## NUMERICAL METHODS FOR COMPUTER GRAPHICS IN JAVA

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/08 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: H. Speleers**

**Programma**: La computer graphics è largamente utilizzata nell'industria cinematografica e dei video giochi. Il corso ha lo scopo di fornire le techniche di base per la computer graphics ed una introduzione alla programmazione in Java. Il corso è formato da due parti. Parte 1: Introduzione a Java e alla programmazione orientata agli oggetti. Parte 2: Principi della computer graphics, fondamenti del rendering pipeline e rendering foto-realistico tramite ray-tracing.

**Obiettivi di apprendimento**: Fornire conoscenze di base delle tecniche di computer graphics per le applicazioni nel modelling e nella visualizzazione; mettere gli studenti in grado di implementare programmi di media dimensione in Java seguendo una programmazione orientata agli oggetti.

**Testi consigliati**:
B. Eckel: *Thinking in JAVA, 4th Edition*, Prentice Hall, 2006
F. S. Hill, S. M. Kelley: *Computer Graphics Using OpenGL, 3rd Edition*, Prentice Hall, 2006
Note disponibili sul sito web del docente

**Modalità di esame**: La prova scritta è composta da quesiti teorici ed esercizi. Nella prova orale lo studente deve discutere il progetto realizzato.

**L'insegnamento sarà erogato in lingua inglese.**

**Program**: Computer graphics is widely used in the video game and movie industry. The goal of this course is to provide some basic techniques in computer graphics, and to give an introduction to the programming language Java. The course consists of two parts. Part 1: Introduction to Java as an object-oriented programming language. Part 2: Principles of computer graphics, the basic rendering pipeline, and photo-realistic rendering by ray-tracing.

**Learning objectives**: Insight in the basic computer graphics techniques for modelling and visualization applications; the ability to implement small to medium-sized problems in an object-oriented programming language as Java.

**Text books**:
B. Eckel: *Thinking in JAVA, 4th Edition*, Prentice Hall, 2006
F. S. Hill, S. M. Kelley: *Computer Graphics Using OpenGL, 3rd Edition*, Prentice Hall, 2006
Material available on the website of the course

**Exam mode**: The written exam consists of both theoretical questions and exercises. A project has to be made. In the oral exam the student has to discuss the project.

**Lectures will be given in English.**

---

## PROGETTAZIONE DI SISTEMI INFORMATICI

**2° semestre**

*8 CFU – settore INF/01 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: E. Nardelli**

**Programma**: Test driven design. Statecharts. Basi di dati.

**Obiettivi di apprendimento**: L'insegnamento si propone di fornire agli studenti gli elementi fondamentali per lo sviluppo di sistemi informatici.

**Testi consigliati**:
L. Koskela: *Test Driven*, Manning, 2007
D. Harel, M. Politi: *Modeling Reactive Systems with Statecharts: the STATEMATE approach*, McGraw Hill, 1998
P. Atzeni et al.: *Basi di Dati*, McGraw Hill, 2014

**Modalità di esame**: Svolgimento di prova scritta con: esercizio di progettazione con StateCharts, esercizi di progettazione di Basi di Dati. Progetto di sviluppo di un sistema informatico in Eiffel. Discussione orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Test driven design. Statecharts. Databases.

**Learning objectives**: This module aims at providing to students the fundamental concepts needed during informatics systems development.

**Text books**:
L. Koskela: *Test Driven*, Manning, 2007
D. Harel, M. Politi: *Modeling Reactive Systems with Statecharts: the STATEMATE approach*, McGraw Hill, 1998
P. Atzeni et al.: *Basi di Dati*, McGraw Hill, 2014

**Exam mode**: Written exam with: StateCharts design exercise, Database design exercises. Project developing an informatics system in Eiffel. Oral discussion.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## RELATIVITÀ E COSMOLOGIA

**2° semestre**

*6 CFU – settore FIS/05 – 48 ore di lezione in aula*

**Docente: N. Vittorio**

**Programma**: Il principio di equivalenza. Campi gravitazionali deboli. Moto geodetico. Significato fisico della metrica. Arrossamento delle righe spettrali. Forze inerziali. Tensori. Derivazione covariante. Il tensore di Riemann-Christoffel. Equazione di campo nel vuoto. Il tensore energia-impulso. Equazione di campo in presenza di materia. Leggi di conservazione. La soluzione di Schwarzschild: coordinate isotrope; moto planetario; deflessione della luce. L'espansione di Hubble. La radiazione cosmica di fondo. La metrica di Friedmann-Robertson-Walker. Nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri. Il problema della distanza in Cosmologia. Il modello standard in cosmologia e gli scenari inflazionari.

**Obiettivi di apprendimento**: Conoscenza della relatività generale classica e degli strumenti del calcolo tensoriale ad essa necessari. Acquisizione di competenze specifiche, mirate alla risoluzione di alcuni problemi in relatività generale. Conoscenza delle problematiche che richiedono una trattazione general-relativistica (collasso gravitazionale, onde gravitazionali, cosmologia teorica) e delle osservazioni che consentono di validarne la loro trattazione teorica. Sviluppo di competenze mirate alla predizione di osservabili di interesse per l'astrofisica e la cosmologia moderna.

**Testi consigliati**:
J. V. Narlikar: *An introduction to Relativity*, Cambridge University Press, 2010
S. Carroll: *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003

**Modalità di esame**: Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: The equivalence principle. Weak gravitational field. Geodesic motion. Physical interpretation of the metric tensor. Reddening of spectral lines. Inertial forces. Tensors. Covariant derivatives. The Riemann-Christoffel tensor. Field equation in vacuum. The energy-momentum tensor. Field equations in the presence of matter. Conservation laws. The Schwarzschild solution: isotropic coordinates; planetary motion; light deflection. The Hubble expansion. The Cosmic Microwave Background radiation. The Friedmann-Robertson-Walker metric. Primordial nucleosynthesis. The distance problem in cosmology. The standard model in cosmology and inflationary scenarios.

**Learning objectives**: Knowledge of the basics of tensor calculus and of classical General Relativity. Acquisition of specific competences aimed at solving some problems in General Relativity. Knowledge of problems that require a General Relativity approach (gravitational collapse, gravitational waves, theoretical cosmology) and the observations that allow to validate their theoretical discussion. Skills development targeted to the prediction of observables of interest for Astrophysics and Cosmology.

**Text books**:
J. V. Narlikar: *An introduction to Relativity*, Cambridge University Press, 2010
S. Carroll: *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003

**Exam mode**: Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## SISTEMI DINAMICI

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/07 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: O. J. Butterley**

**Programma**: Richiami di teoria delle equazioni differenziali: esistenza ed unicità globale delle soluzioni per campi vettoriali $C^1$ e limitati. Teoria di Floquet. Sezioni di Poincaré. Teorema della dipendenza liscia dai dati iniziali e da parameteri. Studio del comportamento qualitativo delle soluzioni di una equazione differenziale sul piano. Teorema della scatola del flusso. Stabilità e funzioni di Lyapuov. Teorema di Grobman-Hartmann. Varietà stabili e instabili: Hadamard-Perron, teorema della varietà centrale. Concetto di genericità per famiglie di campi vettoriali dipendenti da parametri. Biforcazioni generiche: sella-nodo, Hopf. Insiemi $\omega$-limite e Teorema di Poincaré-Bendixon. Equazioni differenziali sul toro (bidimensionale) e riduzione allo studio dei diffeomorfismi del cerchio. Numero di rotazione. Teorema KAM. Sistemi Hamiltoniani e geometria simplettica. Trasformazioni canoniche. Relazione coi sistemi Lagrangiani. Sistemi completamente integrabili. Teoria della media. Integrale di Melnikov e ferri di cavallo. Sistemi dinamici misurabili (definizioni ed esempi elementari). Teorema di Krylov-Bogoliuvov. Cenni di teoria ergodica (teoremi di Birkhoff, Von Neumann, Poincaré, ergodicità, mescolamento, ..).

**Obiettivi di apprendimento**: Familiariazzarsi col panorama dei moderni sistemi dinamici.

**Testi consigliati**:
M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press
A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to modern dynamical systems*, Cambridge University Press
Note delle lezioni disponibili online.

**Modalità di esame**: Prova orale.

**L'insegnamento sarà erogato in lingua inglese.**

**Program**: ODE with bounded vector fields $C^1$, existence and uniqueness. Floquet Theory. Poincaré Sections. Dependence on initial data. Qualitative study of ODE. Lyapuov functions. Grobman-Hartmann theorem. Stable and unstable manifolds: Hadamard-Perron theorem. Genericity for family of vector fields. Bifurcations. $\omega$-limit sets and Poincaré-Bendixon theorem. Differential equation on the two dimensional torus and circle diffeomorphism. Rotation number, KAM theory. Hamiltonian system and symplectic geometry. Averaging. Melnikov integral and horseshoes. Measurable dynamical systems. Krylov-Bogoliuvov Theorem. Ergodic Theory.

**Learning objectives**: Become familiar with the modern filed of Dynamical Systems.

**Text books**:
M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press
A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to modern dynamical systems*, Cambridge University Press
Lecture notes available online.

**Exam mode**: Oral exam.

**Lectures will be given in English.**

---

## STATISTICAL LEARNING AND HIGH DIMENSIONAL DATA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/06 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: S. Vigogna**

**Programma**: Formalizzazione matematica del machine learning, supervised learning, regressione e classificazione, consistenza e generalizzazione, no free lunch theorem, ottimalità minimax, bias-variance trade-off, universalità, empirical risk minimization, regolarizzazione, modelli lineari, metodi kernel, spazi di Hilbert a nucleo riproducente, representer theorem, bounds di generalizzazione, misure di complessità, statistical-computational trade-offs, sparsità, reti neurali e deep learning, limiti Gaussiani, adattività, interpolazione, double descent.

**Obiettivi di apprendimento**: Concetti, strumenti, metodi e risultati fondamentali dello statistical learning, con particolare attenzione al caso supervisionato e ai problemi in alta dimensione.

**Testi consigliati**:
T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *The Elements of Statistical Learning*, Springer, 2009
I. Steinwart, A. Christmann: *Support vector machines*, Springer-Nature New York Inc, 2014
F. Cucker, D. Zhou: *Learning theory: an approximation theory viewpoint*, Cambridge University Press, 2007

**Modalità di esame**: Le conoscenze apprese verranno verificate attraverso un colloquio orale e la presentazione di soluzioni di esercizi assegnati.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Mathematical formalization of machine learning, supervised learning, regression and classification, consistency and generalization, no free lunch theorem, minimax optimality, bias-variance trade-off, universality, empirical risk minimization, regularization, linear models, kernel methods, reproducing kernel hilbert spaces, representer theorem, generalizations bounds, complexity measures, statistical-computational trade-offs, sparsity, neural networks and deep learning, Gaussian limits, adaptivity, interpolation, double descent.

**Learning objectives**: Concepts, tools, methods and fundamental results of statistical learning, with particular focus on the supervised case and problems in high dimensions.

**Text books**:
T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *The Elements of Statistical Learning*, Springer, 2009
I. Steinwart, A. Christmann: *Support vector machines*, Springer-Nature New York Inc, 2014
F. Cucker, D. Zhou: *Learning theory: an approximation theory viewpoint*, Cambridge University Press, 2007

**Exam mode**: The evaluation will consist of an oral examination and the presentation of solutions to assigned problems.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## STORIA DELLA SCIENZA

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/04 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: B. Scoppola (codocente: R. Bellé)**

**Programma**: Ripercorrere l'evoluzione della scienza sottolineando i legami tra la scienza ellenistica e la rinascita della scienza in età moderna. Lista degli argomenti: 1. Geometria, 2. Forma e dimensioni della Terra, 3. Geografia matematica, 4. Gravitazione, 5. Scienza e navigazione, 6. Teoria atomico-molecolare, 7. Evoluzione biologica, 8. Studio del sistema nervoso.

**Obiettivi di apprendimento**: Ci si attende che gli studenti comprendano l'evoluzione della scienza a partire dalle caratteristiche delle società in cui la scienza si è sviluppata.

**Testi consigliati**:
L. Russo: *Stelle atomi e velieri*, Mondadori Università, 2015
L. Russo: *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 2021
Elementi di Euclide
Appunti del corso

**Modalità di esame**: Prova orale. Gli studenti discuteranno una tesina su un argomento a loro scelta, e poi discuteranno brevemente qualche argomento scelto dal docente. Sarà valutata la capacità di stabilire connessioni tra lo stato attuale delle teorie scientifiche e la storia delle medesime teorie.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: To revise the evolution of the science outlining the links between ellenistic and modern science. 1. Arguments, 2. Geometry, 3. Shape and dimensions of the Earth, 4. Mathematical geography, 5. Gravitation, 6. Science and gravitation, 7. Atomic and molecular theory, 8. Biological evolution, 9. Study of the nervous system.

**Learning objectives**: It is expected that the students understand science evolution starting from the features of the societies in which the science has developed.

**Text books**:
L. Russo: *Stelle atomi e velieri*, Mondadori Università, 2015
L. Russo: *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 2021
Euclid's elements
Notes of the course

**Exam mode**: Oral exam. The students will discuss a subject of their choice, and then will answer to some question posed by the teacher. The knowledge of the relations between the curret state of a scientific theory and its history will be particularly evaluated.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## SUPERFICI DI RIEMANN

**1° semestre**

*8 CFU – settore MAT/03 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: M. Mcquillan**

**Programma**: Teorema di uniformizzazione come applicazione della dualità di Grothendieck-Verdier alla convergenza dei flussi di Ricci e, tempo permettendo, applicazioni, in particolare teorema di comparazione tra coomologia classica e etale.

**Testi consigliati**: Dispense a cura del docente

**Modalità di esame**: Prova orale.

**In presenza di studenti stranieri l'insegnamento può essere erogato in lingua inglese.**

**Program**: Uniformisation theorem as an application of Grothendieck-Verdier duality to the convergence of Ricci flow, and, time permitting, applications, particularly to the comparison theorem between classical and Etale cohomology.

**Text books**: Lecture Notes

**Exam mode**: Oral exam.

**In case the course is attended by foreign students, lectures can be given in English.**

---

## TEORIA DEI GIOCHI E PROGETTO DI RETI

**1° semestre**

*9 CFU – settore MAT/09 – 72 ore di lezione in aula*

**Docente: P. Oriolo**

**Programma**: 1. Giochi in forma normale. Equilibri di Nash. Ottimalità di Pareto. Strategie debolmente e strettamente dominanti. Strategie conservative. Payoff e preordini totali. 2. Un'applicazione delle strategie dominanti: i meccanismi di asta. Aste di primo prezzo e aste secondo prezzo (o di Vickrey). Un'applicazione degli equilibri di Nash: la legislazione di incidente. 3. Giochi antagonistici e a somma zero. Punti di sella ed equilibri di Nash per giochi a somma zero. Giochi strettamente competitivi. 4. Estensione in strategia mista di un gioco antagonistico. L'esistenza di un equilibrio nella strategia mista per i giochi aantagonistico e valore del gioco. Il teorema di von Neumann. Bluff, underbid e poker di Kuhn. 5. I giochi cooperativi. Nucleo di un gioco. Il teorema di Bondareva-Shapley. I mercati con utilità trasferibile. Giochi semplici e valore di Shapley. 6. Giochi cooperativi con l'utilità non trasferibile. Il problema dell'house allocation. Il problema dello stable marriage. 7. Facility location: teoria ed algoritmi risolutivi esatti ed approssimati, deterministici e randomizzati. Algoritmo primale duale e meccanismi di cost sharing. Facility location games. 8. Albero ricoprente di peso minimo: teoria e algoritmi esatti. Alberi di Steiner: teoria ed algoritmi risolutivi esatti ed approssimati. Algoritmo primale duale e meccanismi di cost sharing. Giochi con alberi di Steiner.

**Obiettivi di apprendimento**: Lo scopo di questo corso è quello di introdurre la teoria dei giochi e di mostrarne alcune applicazioni con un focus su problemi progetto di reti. Lo studente è introdotto alle conoscenze di base e alle tecniche tipiche della Teoria dei giochi con particolare riferimento ai giochi non-cooperativi, ai giochi cooperativa, alla teoria dei giochi algoritmica.

**Testi consigliati**: Dispense a cura di G. Oriolo.

**Modalità di esame**: Il voto finale si ottiene sommando il voto di una prima prova scritta (fino a 25 punti) e di una seconda prova scritta oppure (molto consigliato) di un progetto (entrambi fino a 5 punti). Le prove scritta si articolano su diversi esercizi, da svolgere in un tempo di 1 ora e 30 minuti, mirati ad appurare la padronanza delle varie parti del programma. Il progetto richiede la soluzione di un problema di Progetto di Reti per il quale vengono fornite istanze test e viene valutato sulla qualità sia della soluzione prodotta che della strategia di soluzione stessa. I progetti devono essere svolti in team.

**Bibliografia di riferimento**:

M. J. Osborne: *An introduction to Game Theory*, Oxford University press, 2003

N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani: *Algorithmic Game Theory*, Cambridge Univ. Press, 2011

**Program**: 1. Games in normal form. Nash equilibria. Pareto optimality. Weakly and strictly dominant strategies. Conservative strategies. Payoff and total preorders. 2. An application of dominant strategies: auction mechanisms. First price and second price (Vickrey) auctions. An application of Nash equilibria: law of accident. 3. Zero-sum games. Saddle points and Nash equilibria for zero-sum games. Strictly competitive games. 4. Extension in mixed strategy of a game. Existence of an equilibrium in mixed strategy for zero-sum games. Von Neumann's theorem. Bluff, underbid and Kuhn's poker. 5. Cooperative games. Core of a game. The theorem of Bondareva-Shapley. Markets with transferable utility. Shapley value. Simple games. 6. Cooperative games with nontransferable utility. The house allocation problem. The stable marriage problem. 7. Facility location: theory and exact approximate algorithms, deterministic and randomized. Primal dual schemes. Facility location games. 8. Minimum spanning tree: theory and exact algorithms. Steiner trees: theory and approximate algorithms. Primal dual schemes. Cost sharing mechanisms. Steiner trees games.

**Learning objectives**: The aim of this class is to introduce game theory and network design. Several examples of games, network problems and games on networks will be presented and solved by means of optimization techniques, mainly linear and integer programming.

**Text books**: Lecture Notes by G. Oriolo.

**Exam mode**: The final grading is obtained by summing the grades obtained in a first written exam (up to 25 pts.) and then either a second written exam or (highly recommended) a project (both up to 5 pts.) The written exam are comprised of a number of exercises and open questions each with a given value. Projects consists in solving a specific assigned network design problem which is evaluated with respect to the quality of both the solution strategy and the solution itself. Projects must be carried out in teams.

**Reference bibliography**:

M. J. Osborne: *An introduction to Game Theory*, Oxford University press, 2003

N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani: *Algorithmic Game Theory*, Cambridge Univ. Press, 2011

---

## TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI 1

**2° semestre**

*8 CFU – settore MAT/02 – 64 ore di lezione in aula*

**Docente: I. Damiani**

**Programma**: Gruppi liberi e presentazione di un gruppo per generatori e relazioni. Algebra multilineare: prodotto tensoriale, simmetrico, alterno. La categoria G-mod e l'algebra gruppo KG; sottomoduli, quozienti, somma diretta, prodotto tensoriale, duale, End, Hom, restrizione e induzione. Moduli ciclici e quozienti di KG; moduli irriducibili e lemma di Schur; irriducibili di GxH; moduli completamente riducibili e teorema di Maschke; moduli indecomponibili (caratteristica $p > 0$ oppure gruppi infiniti - cenni e confronto con la teoria degli A-moduli). Teoria dei caratteri. Rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico. Teorema del doppio centralizzatore. Rappresentazioni polinomiali e razionali del gruppo generale lineare.

**Obiettivi di apprendimento**: L'obbiettivo di questo corso è che gli studenti acquisiscano familiarità con il punto di vista della teoria delle rappresentazioni; che ne comprendano i problemi fondamentali e l'impostazione concettuale; che imparino e padroneggino i risultati principali della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti, sia negli aspetti generali sia in quelli specifici; che sappiano costruire le rappresentazioni irriducibili di alcune classi notevoli di gruppi finiti (abeliani, diedrali, simmetrici, di riflessioni o di Coxeter); che conoscano il legame tra le rappresentazioni del gruppo simmetrico e le rappresentaioni polinomiali o razionali del gruppo generale lineare e siano quindi pronti ad affrontare lo studio della teoria delle rappresentazioni dei gruppi classici, dei gruppi compatti, dei gruppi di Lie o delle algebre di Lie.

**Testi consigliati**:

W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory: a first course - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1991

S. Lang: *Algebra - 3rd Edition - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2002

G. Gaiffi: *Appunti rivisitati di Teoria delle rappresentazioni ( a cura di Sacco E.)*

J. P. Serre: *Linear representations of finite groups - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1977

**Modalità di esame**: Esame orale, eventualmente preceduto da esercizi scritti.

**Program**: Free groups and presentation of a groups by generators and relations. Multilinear algebra. G-mod category and the group algebra KG. Cyclic modules and quotients of KG; irreducible modules and Schur lemma; completely reducible modules and Maschke theorem; indecomposable modules. The theory of characters. Irreducible representations of the symmetric group. The double centralizer theorem. Polynomial and rational representations of the general linear group.

**Learning objectives**: The aim of this course is that students enter the point of view of representation theory, understand its fundamental problems and concepts and master the main results of the representation theory of finite groups, so to be ready to face the study of the representation theory of classical groups, compact groups, Lie groups or Lia algebras.

**Text books**:
W. Fulton, J. Harris: *Representation Theory: a first course - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1991
S. Lang: *Algebra - 3rd Edition - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2002
G. Gaiffi: *Revisited Notes of Theory of Representations (edited by Sacco E.)*
J. P. Serre: *Linear representations of finite groups - Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1977

**Exam mode**: Oral examination (with preliminary written exercises).

---

## WEB MINING AND RETRIEVAL

**2° semestre**

*9 CFU – settore ING-INF/05 – 72 ore di lezione in aula*

**Docente: R. Basili**

**Programma**: Richiami ai metodi base di ML. Metodi Supervised vs. Unsupervised. Paradigmi di ML, Metodi di addestramento. Machine Learning Metrics and Evaluation. Introduzione alla modellazione dei documenti per il Web: dall'Information Retrieval al Natural Language Processing. Modelli di Linguaggio. Processi Markoviani. Modelli Generativi: HMM. Use Case: Probabilstic POS tagging PAC Learnability. Perceptron SVM. Hard Margin. Soft margin SVM. Kernel polinomiali. Sequence Kernels. Kernel for NLP. Tree Kernels. Semantic Tree kernels Deep Learning. Intro e Background. NNs: tasks and Training. Convolutional Neural Networks. Recurrent Neural Networks. Attention. Trasformers. Deep Learning Software Development. NN in Python. Language Modeling con modelli neurali. Temi avanzati: attention; encoding-decoding; adversarial NNs; transformers. Web and Lexical Semantics: the role of lexical learning in Web scenarios. Opinion Mining e Sentiment Analysis: il taks, le risorse e le metodologie principali. Advanced Statistical NLP for QA (from NERC & SRL to QA). Advanced Machine Learning for the Web: Learning to Rank, Recommending systems.

**Obiettivi di apprendimento**: Il Web è la più grande collezione di informazione in formato digitale attualmente disponibile in modo pubblicamente accessibile. Il corso affronta gli aspetti teorici e realizzativi che ne consentono lo sfruttamento, dai processi di indicizzazione, accesso e recupero di informazione alla acquisizione di conoscenza da grandi collezioni di dati distribuite geograficamente. Le finalità del corso sono di: • Approfondire tematiche legate all'apprendimento automatico, presentando i metodi avanzati di induzione di conoscenza dai dati (kernel machines, deep neural networks). • Conoscere i diversi modelli utilizzati nei motori di ricerca per il WWW e nelle loro declinazioni semantiche (Semantic Enterprise Search). • Conoscere le tecnologie avanzate di Intelligenza Artificiale applicata al Web, per il trattamento linguistico dei testi (Natural Language Processing) e sperimentarne la applicazione nei domini del Social Web in problemi di Semantic document management, Link Analysis e Opinion Mining.

**Testi consigliati**:
C. D. Manning, P. Raghavan, H. Schütze: *Introduction to Information Retrieval*, Cambridge University Press, 2008
R. Basili, A. Moschitti: *Text Categorization: from Information Retrieval to Support Vector Learning*, ARACNE Editore, 2005
I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville: *Deep Learning*, MIT press, 2016
Note del docente e articoli scientifici distribuiti durante il corso

**Modalità di esame**: In due test di midterm (equivalenti ad una singole prove orale) vengono utilizzate (1) domande chiuse per la verifica dei temi dell'intero programma, ed (2) una prova di progettazione di un DB. Il progetto verte sullo studio di un modello di Machine Learning avanzato su dati Web o su dati erogati da competizioni di ricerca internazionali (come ad es. Kaggle benchmarks, SemEval dataset) e può prevedere lo sviluppo di una corrispondente applicazione Web che orchestra servizi avanzati di

Web Mining (ad es. Sentiment Analysis su Twitter) o di Web Retrieval (interfacce di ricerca in linguaggio naturale su dati Web).

La verifica delle competenze tende ad studiare le conoscenze acquisite in ampiezza sui temi del programma e la capacità modellistica e di progettazione di metodi avanzati di WB o WR in un dominio. Infine le competenze tecnologiche sono legate allo sviluppo del progetto dove il contributo su questi temi fornito dal singolo studente del team (max 3 persone) viene verificato con una discussione orale.

**Bibliografia di riferimento**:

C. M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

B. Liu: *Web Data Mining: Exploring Hyperlinks, Contents, and Usage Data. 2nd Edition*, Springer, 2011

**Program**: Basic overview of Machine Learning. Supervised vs. Unsupervised methods. Machine Learning Metrics and Evaluation. Introduction to document modelling: from Information Retrieval to Natural Language Processing models of free texts. Language Models. Markov processes. Generative models: HMM. Use Case: Probabilistic POS tagging PAC Learnability. Perceptron SVM. Hard Margin. Soft margin SVM. Kernels. Polynomial and Gaussian Kernels. Sequence Kernels. Kernel for NLP. Tree Kernels. Semantic Tree kernels. Deep Learning. Intro e Background. NNs: tasks and Training. Convolutional Neural Networks. Recurrent Neural Networks. Deep Learning Software Development. NN in Python. Language modelling with neural models. Advanced topics: attention; encoding-decoding; adversarial NNs; transformers. Web Search basics: Overview of the IR process. Crawling. Spam & Ads in Web search. Web Search & Link Analysis. Rank and Relevance: PageRank. HITS. Web and Lexical Semantics: the role of lexical learning in Web scenarios. Opinion Mining e Sentiment Analysis: the tasks, the resources and the training methods.Advanced Statistical NLP for QA (from NERC & SRL to QA). Advanced Machine Learning for the Web: Learning to Rank, Recommending systems.

**Learning objectives**: The Web is the largest collection of digital information currently available in a publicly accessible way. The course deals with the theoretical and implementation aspects that allow its exploitation, from the processes of indexing, access and retrieval of information to the acquisition of knowledge from large geographically distributed data collections. The aims of the course are: • Deepen topics related to machine learning, presenting advanced methods of inducing knowledge from data (kernel machines, deep neural networks). • Know the different models used in search engines for the WWW and their semantic declinations (Semantic Enterprise Search). • Know the advanced technologies of Artificial Intelligence applied to the Web, for the linguistic treatment of texts (Natural Language Processing) and experiment their application in the domains of the Social Web in problems of Semantic document management, Link Analysis and Opinion Mining.

**Text books**:

C. D. Manning, P. Raghavan, H. Schütze: *Introduction to Information Retrieval*, Cambridge University Press, 2008

R. Basili, A. Moschitti: *Text Categorization: from Information Retrieval to Support Vector Learning*, ARACNE Editore, 2005

I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville: *Deep Learning*, MIT press, 2016

Teacher's lecture notes and scientific papers distributed during the course

**Exam mode**: In two midterm tests (equivalent to a single oral exam) (1) closed questions are used to verify the topics of the entire program, and (2) a DB design test. The project focuses on the study of an advanced Machine Learning model on Web data or on data provided by international research competitions (such as Kaggle benchmarks, SemEval dataset) and may include the development of a corresponding Web application that orchestrates advanced Web Mining (e.g. Sentiment Analysis on Twitter) or Web Retrieval (natural language search interfaces on web data).

The competency test aims to study the knowledge acquired in breadth of the topics of the program and the modeling and design capacity of advanced WB or WR methods in a domain. Finally, the technological skills are linked to the development of the project where the contribution on these topics provided by the single student of the team (max 3 people) is verified with an oral discussion.

**Reference bibliography**:

C. M. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006

B. Liu: *Web Data Mining: Exploring Hyperlinks, Contents, and Usage Data. 2nd Edition*, Springer, 2011